Prova scritta di MECCANICA RAZIONALE

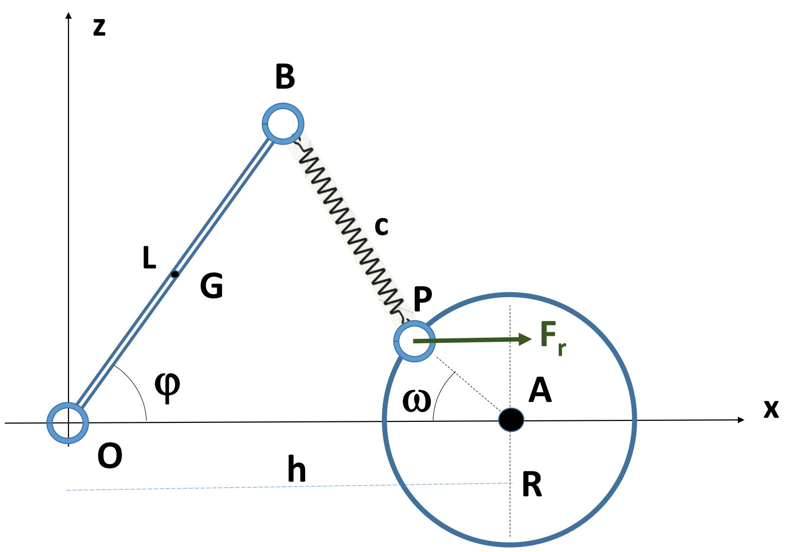
Nome: .... Cognome: ....

N. Matricola: ....

1. Un sistema meccanico giace nel piano verticale ed è costituito dai seguenti elementi rigidi

   - Un'asta di lunghezza L e massa m incernierata ad un estremo (punto O in figura)
   - Una lamina circolare con centro fissato in un punto A dell'asse x distante h da O. La lamina è libera di ruotare attorno ad A.

   I due rigidi sono connessi da una molla con lunghezza a riposo nulla che ha per estremi il punto B dell'asta ed un punto P appartenente alla circonferenza del disco. Inoltre, sull'estremo in cui la molla è collegata al disco agisce una forza esterna $\mathbf{F}_r = \hat{\mathbf{i}} f_0$ con f_0 costante ed $\hat{\mathbf{i}}$ versore dell'asse x.



   - Scrivere la Lagrangiana del sistema.
   - Determinare le configurazioni di equilibrio (senza lo studio della stabilità) assumendo $f_0 = ch$.

2. Si consideri un sistema di riferimento modibile definito dalla terna di versori $\mathbf{v}_1 = \cos(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(t)\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{v}_2 = -\sin(t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(t)\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{v}_3 = \hat{\mathbf{k}}$, dove t è il tempo e $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ sono i versori della terna fissa. Determinare la velocità angolare del riferimento mobile utilizzando il teorema di Poisson.

Soluzione: Lagrangiana

Coordinate dei punti significativi

$$
\begin{aligned}
B-O =& L\left(\hat{\mathbf{i}}\cos(\varphi)+\hat{\mathbf{k}}\sin(\varphi)\right)\\
P-O =& \hat{\mathbf{i}}\left(H-R\cos(\omega)\right)+\hat{\mathbf{k}}R\sin(\omega)\\
B-P =& \hat{\mathbf{i}}\left(L\cos(\varphi)-H+R\cos(\omega)\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(L\sin(\varphi)-R\sin(\omega)\right)\\
|B-P|^2 =& L^2+H^2+R^2+2R\cos(\omega)\left(L\cos(\varphi)-H\right)-2LR\sin(\varphi)\sin(\omega)-2LH\cos(\varphi)
\end{aligned}
$$

La forza esterna applicata è associata alla seguente energia potenziale

$$U_F=-f_0x+C$$

Si verifica immediatamente che $\mathbf{F}_r=-\nabla U_F$. Scegliamo la costante $C=0$. Energia potenziale del sistema

$$
\begin{aligned}
U(\varphi,\omega) &= \underbrace{mgz_G}_{\text{Asta}}+\underbrace{\frac{c}{2}|B-P|^2}_{\text{Molla}}+U_F(x_P(\varphi,\omega))\\
&= mg\frac{L}{2}\sin(\varphi)+\frac{c}{2}\left(L^2+H^2+R^2+2R\cos(\omega)\left(L\cos(\varphi)-H\right)-2LR\sin(\varphi)\sin(\omega)-2LH\cos(\varphi)\right)\\
&- f_0\left(H-R\cos(\omega)\right)
\end{aligned}
$$

Energia Cinetica

$$T(\varphi,\vartheta,\dot\varphi,\dot\vartheta)=\underbrace{\frac{1}{2}I^O_{yy}\dot\varphi^2}_{\text{Asta}}+\underbrace{\frac{1}{2}I^A_{yy}\dot\omega^2}_{\text{Disco}}=\frac{1}{6}ml^2\dot\varphi^2+\frac{1}{4}mR^2\dot\omega^2$$

Equilibrio

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(\varphi,\omega)}{\partial\varphi} &= \frac{mgL}{2}\cos(\varphi)+cL\left(\sin(\varphi)\left(H-R\cos(\omega)\right)-R\cos(\varphi)\sin(\omega)\right)\\
&= \frac{mgL}{2}\cos(\varphi)+cL\left(H\sin(\varphi)-R\sin(\varphi+\omega)\right)\\
\frac{\partial U(\varphi,\omega)}{\partial\omega} &= cR\left(-\sin(\omega)\left(L\cos(\varphi)-H\right)-L\sin(\varphi)\cos(\omega)\right)-f_0R\sin(\omega)\\
&= \sin(\omega)\left(-cRL\cos(\varphi)+cRH-f_0R\right)-cRL\sin(\varphi)\cos(\omega)\\
&= -cRL\left(\cos(\varphi)\sin(\omega)+\sin(\varphi)\cos(\omega)\right)+\sin(\omega)\left(cRH-f_0R\right)\\
&= -cRL\sin(\varphi+\omega)+R\sin(\omega)\left(cH-f_0\right)
\end{aligned}
$$

Usando $f_0=cH$ si determinano i punti di equilibrio

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(\varphi,\omega)}{\partial\omega}=0 &\Rightarrow \sin(\varphi+\omega)=0\\
\frac{\partial U(\varphi,\omega)}{\partial\varphi}=0 &\Rightarrow \tan(\varphi)=-\frac{mgl}{2cLH}
\end{aligned}
$$