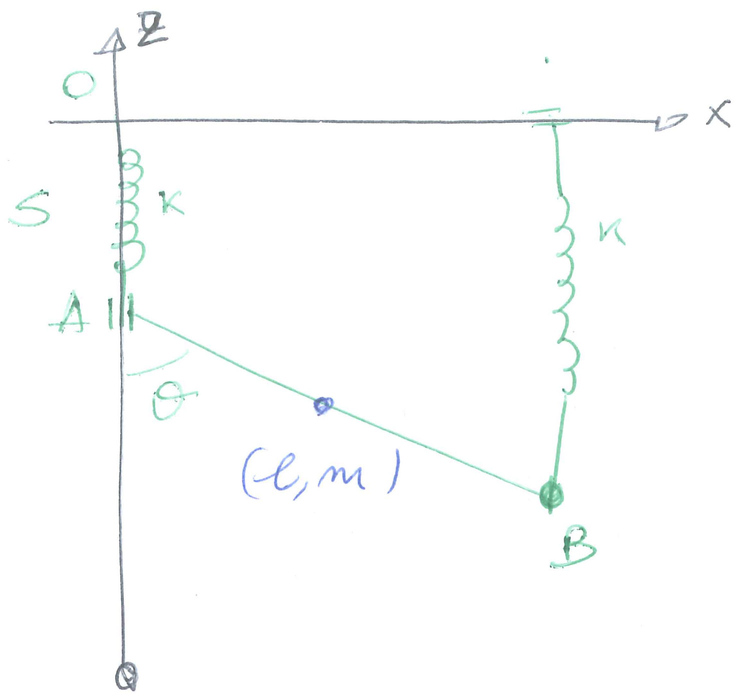
Es. Equilibrio di un sistema con 2 g.d.l.



Energia potenziale

$$U = -mg\left(s + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \frac{k}{2}s^2 +$$

$$+ \frac{k}{2}\left(s + \ell\cos\theta\right)^2$$

Punti di equilibrio

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -mg + ks + k(s + \ell\cos\theta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + \ell k(s + \ell\cos\theta)(-\sin\theta) = 0$$

dalla prima si ottiene $k(s + \ell\cos\theta) = mg - ks$

Si sostituisce nella seconda e si ottiene

$$\sin\theta\left(\frac{mg}{2}l + mgl + ksl\right) = 0$$

$$\sin\theta\left(-\frac{mg}{2} + ks\right) = 0$$

Ho 2 set di soluzioni

① $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \pi$

sostituito in $\frac{\partial U}{\partial s} = 0 \Rightarrow$ θ_1 $-mg + 2ks + kl = 0$

$$s_1 = \frac{mg - kl}{2k}$$

$\theta_2 \Rightarrow -mg + 2ks_2 - kl = 0$

$$s_2 = \frac{mg}{2k} + \frac{l}{2}$$

② $s_3 = \frac{mg}{2k}$

Sostituendo in $\frac{\partial U}{\partial s} = 0$

$$-mg + 2\frac{mg}{2k}k + k\,l\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0$$

Si hanno altre 2 soluzioni

$$\left(s_3 = \frac{mg}{2k}, \theta_3 = \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(s_4 = \frac{mg}{2k}, \theta_4 = \frac{3}{2}\pi\right)$$

Hessiana

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 2K$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \ell\left(\frac{mg}{2} - ks\right)\cos\theta + k\ell^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s \partial \theta} = -k\ell \sin\theta$$

Per ogni punto di equilibrio calcolo l'Hessiana

(1) $\left(s = \frac{mg}{2K} - \frac{\ell}{2}, \theta = 0\right) \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & -\frac{k\ell^2}{2} \end{pmatrix}$

INSTABILE

(2) $\left(s = \frac{mg}{2K} + \frac{\ell}{2}, \theta = \pi\right) \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}k\ell^2 \end{pmatrix}$

INSTABILE

(3) $\left(s = \frac{mg}{2k}, \theta = \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & k\ell^2 \end{pmatrix}$

autovalori $\lambda = \frac{k\ell^2 + 2k \pm \sqrt{k^2\ell^4 + 4k^2}}{2} > 0$

infatti $|k\ell^2 + 2k| > \sqrt{k^2\ell^4 + 4k^2}$ (basta fare il quadrato

$\Rightarrow$ sol. STABILE

Calcolo autovalori

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2k & -ke \\ -ke & ke^2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \lambda - 2k & ke \\ ke & \lambda - ke^2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - \mathcal{H}| = (\lambda - 2k)(\lambda - ke^2) - k^2 e^2$$

$$\det(\lambda I - \mathcal{H}) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(-ke^2 - 2k) + 2k^2e^2 - k^2e^2 = 0$$

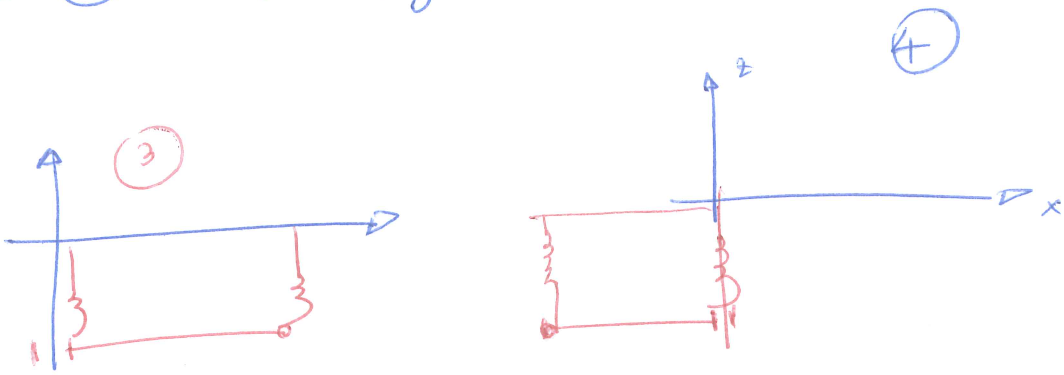
$$\lambda^2 + \lambda(-ke^2 - 2k) + k^2e^2 = 0$$

$$\Delta = k^2e^4 + 4k^2 + 4k^2e^2 - 4k^2e^2 = k^2e^4 + 4k^2 > 0$$

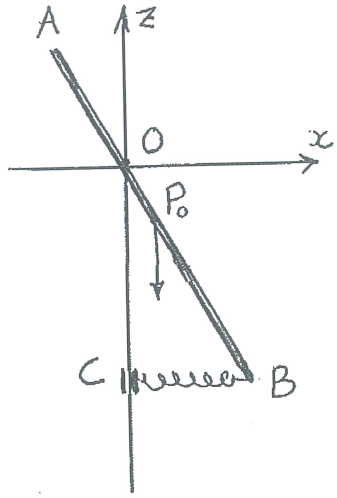
$$\lambda = \frac{ke^2 + 2k \pm \sqrt{k^2e^4 + 4k^2}}{2}$$

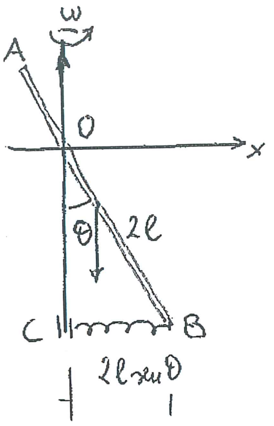
il caso ④ $\left(S = \frac{mg}{2k}, \theta = \frac{3}{2}\pi\right)$ si comporta

come ③ (configurazione simmetrica



Un'asta AB, omogenea, di massa m e lunghezza 3ℓ è incernierata con una cerniera cilindrica fissa nel punto O, distante 2ℓ da B. Oltre alla forza peso, sull'asta agisce una forza di richiamo elastica $-k(B-C)$, $k>0$, dove C è il punto dell'asse z avente la stessa quota di B. Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità. Scrivere l'equazione per le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile. Nel caso in cui il piano xz ruoti con velocità costante $\underline{\omega}$ intorno all'asse z, discutere le posizioni di equilibrio relativo e scrivere la Lagrangiana per il moto relativo nel piano xz.





$$U = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(2\ell\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$$= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + 2k\ell^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = +4k\ell^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + mg\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$= +\mathrm{sen}\,\theta\left(mg\frac{\ell}{2} + 4k\ell^2\cos\theta\right) = 0$$

Configurazioni di EQUILIBRIO

$\mathrm{sen}\,\theta = 0$ $\qquad \theta = 0, \pi$

$\cos\theta = -\dfrac{mg}{8k\ell}$ $\qquad$ se $mg < 8k\ell$ $\qquad \bar{\theta} = \arccos\left(-\frac{mg}{8k\ell}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{mg}{8k\ell}\right)$

se $mg = 8k\ell$ $\qquad \theta = \pi$

Oltre a $\pi - \arccos\left(\frac{mg}{8k\ell}\right)$ c'è la soluzione $\pi + \arccos\left(\frac{mg}{8k\ell}\right)$ SIMMETRICA

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = +\cos\theta\left(mg\frac{\ell}{2} + 4k\ell^2\cos\theta\right) - 4k\ell^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$U''(0) > 0$ STABILE

$U''(\pi) < 0$ INSTABILE $mg > \ldots$ / STABILE $mg < \ldots$

$U''(\bar{\theta}) < 0$ INSTABILE $mg <$ / STABLE $mg >$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(3\ell)^2 + m\frac{\ell^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta - 2k\ell^2\,\mathrm{sen}^2\theta \;\sim\; \mathcal{L}_{p.o} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\frac{\ell}{4}\theta^2 - 2k\ell^2\theta^2$$

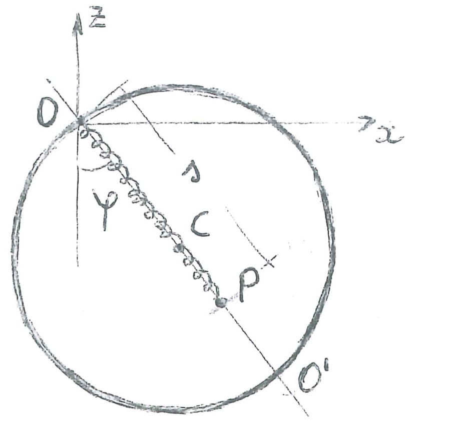
in $\theta = 0$

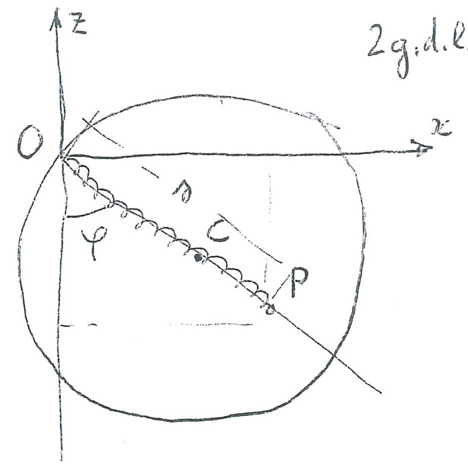
Equ. di Lagrange di II specie

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \left(mg\frac{\ell}{2} + 4k\ell^2\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{2\ell} + \frac{4k}{m}\right)\theta = 0$$

Un anello di centro C, raggio R, massa M è vincolato a muoversi su un piano verticale, vincolato a ruotare intorno ad un suo punto O, fisso. Un punto P di massa m è vincolato a muoversi lungo il diametro OO', sottoposto, oltre al peso, ad una forza elastica di centro O e costante k. Scrivere la Lagrangiana del sistema, scrivere le equazioni di moto. Calcolare la reazione vincolare (interna) relativa al punto P. e la reazione vincolare in O.





2g.d.l.

23.06.10
26.06.13
11.07.18

$$C - O = R \operatorname{sen}\varphi \, \underline{i} - R \cos\varphi \, \underline{k}$$

$$P - O = s \operatorname{sen}\varphi \, \underline{i} - s \cos\varphi \, \underline{k}$$

$$\dot{P} = \dot{s} \operatorname{sen}\varphi \, \underline{i} + s \cos\varphi \, \dot{\varphi} \, \underline{i} - \dot{s} \cos\varphi \, \underline{k} + s \operatorname{sen}\varphi \, \dot{\varphi} \, \underline{k}$$

$$\dot{P}^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2$$

$$I_0 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v^2(P) = \frac{1}{2} 2MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m s^2 \dot{\varphi}^2$$

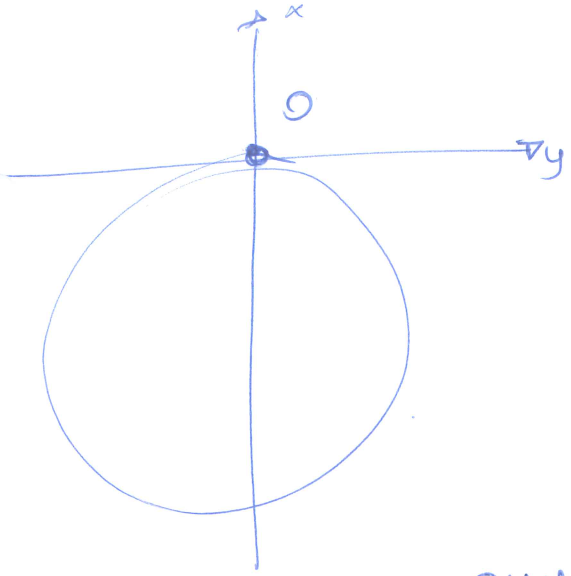
$$U = -MgR\cos\varphi - mgs\cos\varphi + \frac{1}{2} k s^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = mg\cos\varphi - ks + ms\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2MR^2\dot{\varphi} + ms^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2MR^2\ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\dot{\varphi} + ms^2\ddot{\varphi}$$

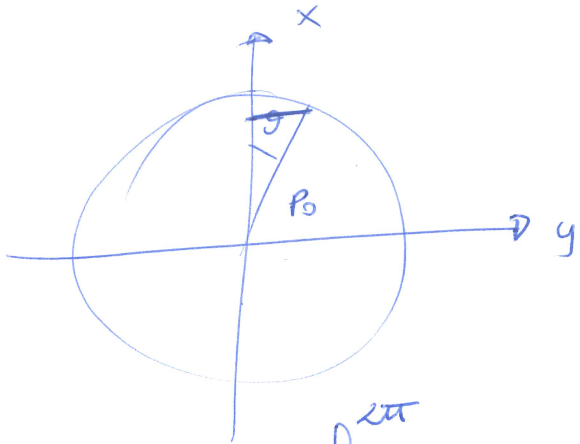
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -MgR \operatorname{sen}\varphi - mgs \operatorname{sen}\varphi$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} - mg\cos\varphi + ks - ms\dot{\varphi}^2 = 0 \\ 2MR^2\ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\dot{\varphi} + ms^2\ddot{\varphi} + MgR \operatorname{sen}\varphi + mgs \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$



I_O^{zz}

Inerzia di un ~~cerchio~~ anello rispetto a 1 pt. sulla circonferenza



$$I_{P_0}^{xx} = \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} (R \sin\theta)^2 R\, d\theta =$$

$$\frac{M R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\int \sin^2\theta \, d\theta = \int (1-\cos^2\theta) d\theta =$$

$$\theta - \int \cos^2\theta \, d\theta = \theta - \int \cos\theta \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{\frac{d}{d\theta}+\sin\theta} =$$

$$\theta - \oint \sin\theta\cos\theta - \int \sin^2\theta \, d\theta$$

$$2\int \sin^2\vartheta = \vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$I_{P_0}^{xx} = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta =$$

$$\frac{MR^2}{2\pi}\,\frac{1}{2}\left(2\pi - \emptyset\right) = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{P_0}^{yy} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{P_0}^{zz} = MR^2$$

Applicando Huygens.

$$I_O^{zz} = I_{P_0}^{zz} + MR^2 = 2MR^2$$