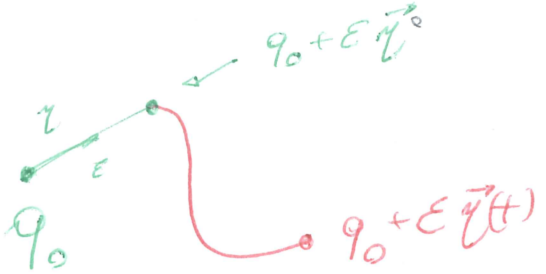
LINEARIZZAZIONE delle Equazioni di moto

Sistema con n g.d.l. $\{q_i(t)\}$

Sia $\vec{q}_0 = (q_1^0, q_2^0 \dots q_n^0)$ coordinate della configurazione di equilibrio

considero uno spostamento infinitesimo $\varepsilon \vec{\eta}$



e considero la traiettoria $q(t) = q_0 + \varepsilon \vec{\eta}(t)$ ottenuta risolv. le eq. di E-L. ~~a partire~~ con C. I

$q_0 + \varepsilon \vec{\eta}_0(t_0)$

Poiché $q_0 + \varepsilon \eta_0$ non è un punto di equilibrio, l'evoluz. di $q(t)$ non è banale. Ci limitiamo a studiare il moto in un intorno dell' punto di equilibrio q_0. Nell' ipotesi che ε sia un parametro piccolo $(\varepsilon \ll 1)$, utilizzo ε come parametro infinitesimo per effettuare lo sviluppo di Taylor della soluzione del moto

Scrivo la Lagrangiana del sistema attorno al punto q_0:

Energia cinetica

Ricordo la formula $T = \sum_{i,j} g_{ij}(\bar{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_j$

abbiamo $\bar{q}(t) = \bar{q}^0 + \varepsilon \eta(t)$

per componenti $q_i(t) = q_i^0 + \varepsilon \eta_i(t)$

derivando $\dot{q}_i(t) = \varepsilon \dot{\eta}_i(t)$

$$g_{ij}(q(t)) = g_{ij}(q_0 + \varepsilon \eta(t)) = g_{ij}(q_0) + O(\varepsilon)$$

Quindi, al secondo ordine in ε l'energia cinetica risulta

$$T = \sum_{ij} g_{ij}(\bar{q}^0)\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Energia Potenziale

Espandendo con Taylor

$$U(q(t)) = U(\bar{q}^0 + \varepsilon \bar{\eta}(t)) =$$

$$U(\bar{q}_0) + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}\Big|_{q=q^0}}_{=0} \eta_i(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i \partial q_j} \eta_i(t)\eta_j(t) + o(\varepsilon)$$

q^0 punto di equilibrio locale

Definendo $H_{ij} = \frac{\partial U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_0}$ si ottiene

$\downarrow$

Hessiano del potenziale

$$U(q(t)) = U(q^0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j} H_{ij} \eta_i \eta_j + o(\varepsilon^2)$$

Lagrangiana linearizzata attorno a q^0

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_{ij} g_{ij}(q^0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \varepsilon^2 - U(q^0)$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{ij} H_{ij} \eta_i \eta_j + o(\varepsilon^2)$$

Nella sostituzione

$\bar{q}(t) = q^\circ + \varepsilon \bar{\eta}(t)$ è implicato che adesso

utilizziamo $\bar{\eta}(t)$ come nuove variabili Lagrangiane

del sistema. Calcoliamo le equaz. di E-L.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i} \sum_{r,k} g_{rk}(q^\circ)\, \dot{\eta}_r \dot{\eta}_k =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{r,k} g_{rk}(q^\circ) \left(\delta_{ir} \dot{\eta}_k + \delta_{ik} \dot{\eta}_r \right)$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(q^\circ)\, \dot{\eta}_k + \sum_{r=1}^{n} g_{ri} \dot{\eta}_r \varepsilon^2 = \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

$$= \varepsilon^2 2 \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \dot{\eta}_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = \varepsilon^2 2 \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(q^\circ)\, \ddot{\eta}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \sum_{r,k} H_{r,k}(q^\circ)\, \eta_r \eta_k$$

$$= -\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} H_{i,k}(q^\circ)\, \eta_k$$

Equazione di evoluzione per piccoli spostamenti

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2 g_{ik} \ddot{\eta}_k + H_{ik} \eta_k \right) = 0$$

Sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, omogeneo e a coeff. costanti.

Scriviamo l'eq. precedente in forma matriciale

def $G_{ij} = 2 g_{ij}$ e considero $\vec{\eta}$ come un vettore colonna $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{G}} \, \ddot{\vec{\eta}} + \underline{\underline{H}} \, \vec{\eta} = 0$$

Dalla teoria generale dei sistemi lineari, sappiamo che le soluz. dell'eq. precedente hanno la forma

$\vec{\eta}(t) = \tilde{\eta} \, e^{\lambda t}$ con λ da determinare

↳ vettore costante

$$\left(\lambda^2 \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{H}} \right) \tilde{\eta} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + \underline{\underline{G}}^{-1}\underline{\underline{H}}\right)\tilde{\eta} = 0$$

Si ha una soluzione non banale se λ^2 è un autovalore della matrice $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{G}}^{-1}\underline{\underline{H}}$

consideriamo il problema agli autovalori

$$\det(-\omega I + M) = 0 \quad \text{dove } \omega = -\lambda^2$$

Sia ω_i ~~uno stesso~~ un autovalore (ce ne sono n)

$\Rightarrow$ questo si associa ad una soluzione

$$\eta(t) = \tilde{\eta}\, e^{\sqrt{-\omega_i}\, t}$$

~~xxxxxxx~~ in generale ω_i è complesso

Semplificando, consideriamo ω_i reali

① $\omega_i > 0 \Rightarrow \sqrt{-\omega_i} = \pm i\sqrt{|\omega_i|}$

Soluzioni oscillate

② $\omega_i < 0 \Rightarrow \sqrt{-\omega_i} = \pm\sqrt{|\omega_i|}$

Avrò almeno 1 soluzione che cresce esponenzialmente nel tempo

Conclusione: Se tutti gli autovalori di $G^{-1}M$ sono positivi $\Rightarrow$ punt. eq. STABILE

se esiste almeno 1 autovalore negativo $\Rightarrow$ punto eq. instabile

Si dimostra (la dimostr. è lunga e tecnica) che il segno degli autovalori di $M=G^{-1}H$ coincide col segno degli autovalori di H (Hessiana del potenziale). Troviamo così un criterio più utile per determinare la stabilità di un sistema.

Se la matrice Hessiana del potenziale calcolata in un pt. di equilibrio ha tutti gli autovalori positivi $\Rightarrow$ pt. equilibrio stabile.

Se l'Hessiana ha uno o più autovalori negativi $\Rightarrow$ pt eq. instabile