CONFIGURAZIONE di Equilibrio di un sistema meccanico: Descrizione Lagrangiana

Considero un sistema meccanico con n g.d.l. descritto dalle variabili Lagrangiane q_i.

Il punto (la configurazione) $\vec{q}^e = (q_1^e, q_2^e \dots q_n^e)$ si dice di equilibrio se la soluzione

$$\begin{pmatrix} q_1(t) = q_1^e \\ q_2(t) = q_2^e \\ \vdots \\ q_n(t) = q_n^e \end{pmatrix} \quad \text{con CI} \quad \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t_0) = 0 \\ \dot{q}_2(t_0) = 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t_0) = 0 \end{pmatrix}$$

è soluz. delle eq di E-L.

In pratica, stiamo cercando una soluzione stazionaria dell'eq. E-L

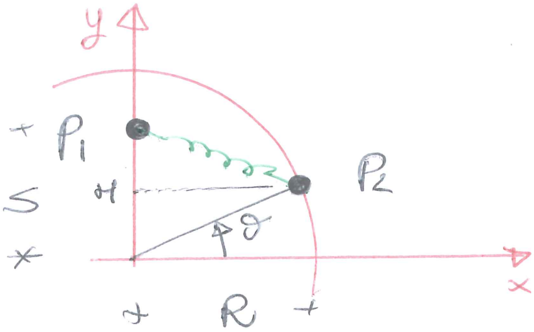
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\substack{\| \\ 0}} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad i=1 \dots n$$

da termini proporz. a $\ddot{q}, \dot{q}$

Questo mostra che per determinare i pt. di equilibrio dobbiamo cercare le configurazioni che annullano il gradiente dell'E. potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}(q^e) = 0 \qquad i=1 \dots n$$

Es. equilibrio



2 pt. materiali collegati da una molla

Var. Lag. (s, θ)

Energia potenziale

$$U = m_2 g R \sin\theta + m_1 g s + \frac{K}{2} |P_1 - P_2|^2$$

$$|P_1 - P_2|^2 = |P_1 - H|^2 + (P_2 - H)^2 =$$

$$= (s - R\sin\theta)^2 + R^2\cos^2\theta = s^2 + R^2\sin^2\theta - 2Rs\sin\theta + R^2\cos^2\theta$$

$$= s^2 + R^2 - 2Rs\sin\theta$$

$$U = m_2 g R \sin\theta + m_1 g s + \frac{K}{2}(R^2 + s^2 - 2Rs\sin\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = m_1 g + Ks - RK\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = m_2 g R\cos\theta - KRs\cos\theta =$$

$$(m_2 g - Ks) R\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \quad \text{oppure} \quad m_2 g - KS = 0$$

(1) (2)

(1) $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} ; \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi$

sostituisco in $\frac{\partial U}{\partial S} = 0$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m_1 g + KS - RK = 0$$

$$S_1 = \frac{\cancel{R}K}{\cancel{K}} - \frac{m_1 g}{R}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow m_1 g + KS + RK = 0$$

$$S_2 = -R - \frac{m_1 g}{R}$$

ho trovato 2 possibili soluz. di eq.

$$(\theta, S) = \left(\frac{\pi}{2}, R - \frac{m_1 g}{R}\right) ; \left(\frac{3}{2}\pi, -R - \frac{m_1 g}{R}\right)$$

(2) $\Rightarrow S = \frac{m_2 g}{K}$

sostituisco in $\frac{\partial \theta}{\partial S} = 0$

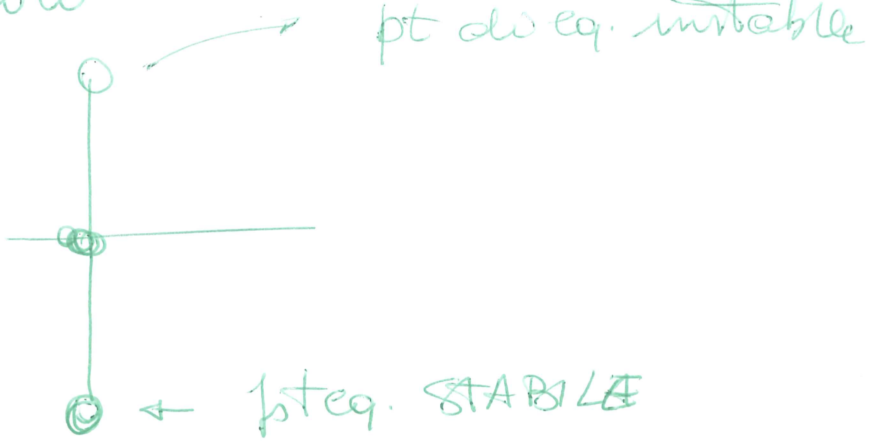
$$m_1 g + m_2 g - K R \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = \frac{(m_1 + m_2) g}{RK}$$

si ha $(\theta, S) = \left(\arcsin \frac{(m_1 + m_2) g}{RK}, \frac{m_2 g}{K} \right)$

Studio della stabilità dell'equilibrio

Es pendolo



STABILE: se perturbo la posizione, il sistema evolve ma la sua configurazione rimane confinata in un intorno del punto di equilibrio

INSTABILE: se applico una perturbazione infinitesima al punto di equilibrio il sistema compie uno spostamento "macroscopico" (di ordine ∅ rispetto alla perturbazione)

Definizione di stabilità secondo Liapunov

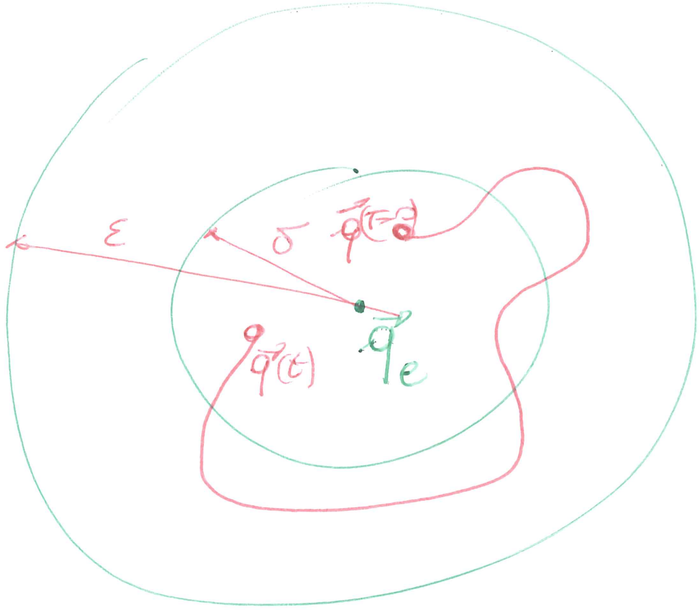
Consideriamo un sistema con n g.d.l. descritto dalle variabili lagrangiane $\vec{q}(t)$. Sia $\vec{q}_e$ un punto di equilibrio.

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se esiste $\delta > 0$ e $\delta < \varepsilon$

t.c. $\quad \| \vec{q}(t=0) - \vec{q}_e \| < \delta \Rightarrow \| \vec{q}(t) - \vec{q}_e \| < \varepsilon$

per ogni $t > 0$

allora si dice che $\vec{q}_e$ è un pto di eq. stabile



Rappresentazione di una traiettoria del sistema corrispondente ad un pt di eq. STABILE

Se la precedente proprietà non vale si dice che il pt di equilibrio è instabile

Studio della stabilità caso 1D

Scrivo le eq. di moto di un sistema 1D. Possiamo sempre scrivere l'energia cinetica come

$$T = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2$$

e otteniamo

$$L = T - U = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

$$a'\dot{q}^2 + a(q)\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{a'}{2}\dot{q}^2 - U'(q)$$

$$a(q)\ddot{q} + \frac{a'}{2}\dot{q}^2 + U'(q) = 0$$

considero il cambio di variabile

$$q(t) = q_e + \varepsilon\eta(t)$$

q_e ↓ punto di equilibrio $\Rightarrow$ $U'(q_e) = 0$

$$\dot{q} = \varepsilon\dot{\eta}$$

$$\ddot{q} = \varepsilon\ddot{\eta}$$

Scrivo le equazioni nella variabile η

$$\varepsilon\ddot{\eta}\, a(q_e + \varepsilon\eta(t)) + \frac{a'}{2}(q_e + \varepsilon\eta(t))\,\varepsilon^2\dot{\eta} + U'(q_e + \varepsilon\eta) = 0$$

assumo ε piccolo e sviluppo i termini precedenti in serie di Taylor

$$a(q_e+\varepsilon\eta) = a(q_e) + \varepsilon\, a'(q_e)\eta + o(\varepsilon)$$

$$\varepsilon\ddot{\eta}\, a(q_e+\varepsilon\eta) = \boxed{\varepsilon\ddot{\eta}\, a(q_e)} + \varepsilon^2\ddot{\eta}\eta\, a'(q_e) + o(\varepsilon^2)$$

$$+\frac{1}{2}a'(q_e+\varepsilon\eta)\varepsilon^2\dot{\eta}^2 = +\frac{1}{2}a'(q_e)\varepsilon^2\dot{\eta}^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$U'(q_e+\varepsilon\eta) = \underbrace{U'(q_e)}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{pt. di equil.}}} + \boxed{U''(q_e)\varepsilon\eta} + U'''(q_e)\frac{\varepsilon^2\eta^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

Il termine dominante è quello di ordine ε.
L'eq. di evoluzione al primo ordine in ε diventa

$$\ddot{\eta}\, a(q_e) + U''(q_e)\eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{U''(q_e)}{a(q_e)}\eta \qquad \text{equaz. dell'oscillatore armonico.}$$

Nota: poiché l'energia cinetica è una grandezza definita positiva, da $T = \frac{a}{2}\dot{q}^2$ si ottiene $a > 0$

Distinguiamo 2 casi

(1) $U''(q_e) > 0 \Rightarrow q_e$ è un <u>minimo</u> dell'energia Potenziale

le soluzioni hanno la forma

$$\eta(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{U''(q_e)}{a(q_e)}}\, t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{U''(q_e)}{a(q_e)}}\, t\right)$$

η è limitata e $|\eta| < |A| + |B|$

$\Rightarrow$ stabile secondo Liapunov.

(2) $U''(q_e) < 0 \Rightarrow q_e$ è un <u>massimo</u> dell'energia Potenziale

le soluzioni diventano

$$\eta(t) = \underbrace{A\, e^{\sqrt{-\frac{U''(q_e)}{a(q_e)}}\, t}} + B\, e^{-\sqrt{-\frac{U''(q_e)}{a(q_e)}}\, t}$$

questa componente della soluzione cresce esponenzialmente nel tempo

$\Rightarrow q_e$ è un pt. di eq. INSTABILE