Invarianti di moto

Teorema generalizzato della conservazione dell'energia di un sistema meccanico.

Iniziamo con un lemma introduttivo

Sia $L(q_i, \dot{q}_i)$ la Lagrangiana di un sistema meccanico. Vale la seguente relazione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

↳ Energia cinetica

Dimo. (caso di una singola massa)

Sappiamo che $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

quindi è sufficiente dimostrare $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$

avevamo visto che T può essere scritto come

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(q_i) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

↓

tensore di Riemann che dipende da q_i

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(q) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_j \dot{q}_k)}_{= \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}}_{=\delta_{j,i}} \dot{q}_k + \dot{q}_j \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}}_{=\delta_{ki}}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \left(\delta_{ij} \dot{q}_k + \delta_{k,i} \dot{q}_j \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k}_{\sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} g_{jk} \delta_{ij}}_{= g_{ik}} \Big) \dot{q}_k} + \underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \delta_{k,i} \dot{q}_j}_{\sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} g_{jk} \delta_{k,i}}_{= g_{ji}} \Big) \dot{q}_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} g_{ji} \dot{q}_j$$

nella prima sommatoria chiamo $k \to j$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\,\dot{q}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(g_{ij} + g_{ji}\right)}\dot{q}_j = 2\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,\dot{q}_j$$

g è per costruzione una matrice simmetrica $g_{ij} = g_{ji}$

In conclusione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i = 2\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = 2T$$

Teorema della conservazione dell'energia nella forma Lagrangiana

Definiamo $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$

dove L è la Lagr. di un sistema meccanico con n gradi di libertà. Si ha

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Dimo.

Si ha

$$\frac{d}{dt} E = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} L$$

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]}_{\substack{= 0 \\ \text{eq. E-L.}}} \dot{q}_i = 0$$

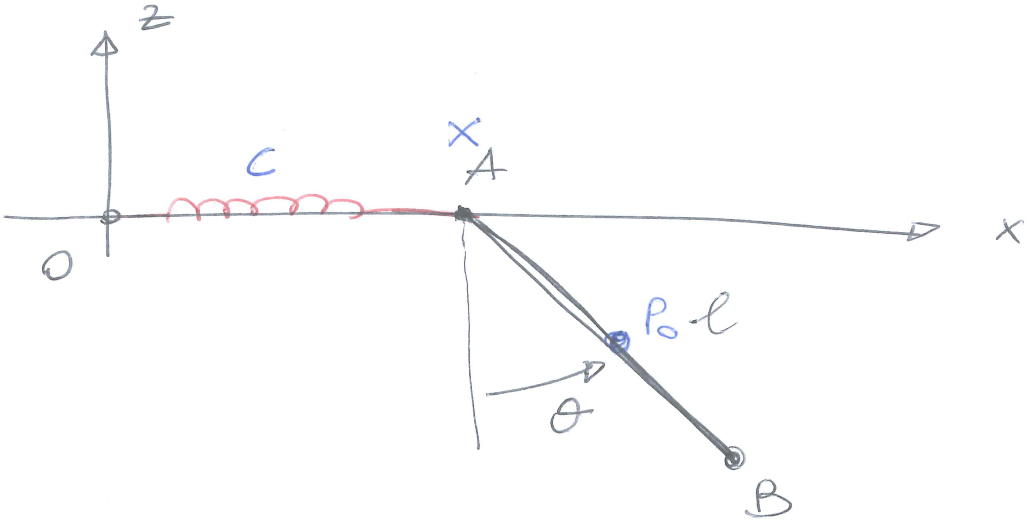
Il risultato è coerente con la forma di conservazione dell'energia più utilizzata in meccanica. Utilizzando il lemma precedente si ha ($L = T - U$

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U$$

$$= 2T - T + U = T + U = \text{Energia}$$

totale del sistema

Asta con molla



Sistema con 2 g.d.l. : coord. lag (x, θ)

$$(P_0 - O) = x\hat{\imath} + \hat{\imath}\,\frac{\ell}{2}\sin\theta - \hat{k}\,\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

$$v_{P_0} = \hat{\imath}\left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right) + \hat{k}\,\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}\,m(v_{P_0})^2 = \left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 =$$

$$\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{x}\,\ell\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}\dot{\theta}\,\ell\cos\theta$$

$$T_{ASTA} = \frac{1}{2} m v_{P_0}^2 + \frac{1}{2} I_{P_0}^{yy} \dot{\vartheta}^2$$

$$I_{P_0}^{yy} = \frac{1}{12} m \ell^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\vartheta}^2 + \dot{x} \dot{\vartheta} \ell \cos\vartheta + \frac{1}{12} \ell^2 \dot{\vartheta}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \ell \dot{x} \dot{\vartheta} \cos\vartheta \right)$$

$$U = - m g \frac{\ell}{2} \cos\vartheta + \frac{x^2}{2} c$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \ell \dot{x} \dot{\vartheta} \cos\vartheta \right) + m g \frac{\ell}{2} \cos\vartheta - \frac{x^2 c}{2}$$

Eq. Lagr.

$$\boxed{\vartheta \Rightarrow} \quad \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} \ell^2 \dot{\vartheta} + \ell \dot{x} \cos\vartheta \right) = - \cancel{m} g \frac{\ell}{\cancel{2}} \sin\vartheta - \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} \ell \dot{x} \dot{\vartheta} \sin\vartheta$$

$$\frac{2}{3} \ell^{\cancel{2}} \ddot{\vartheta} + \cancel{\ell} \ddot{x} \cos\vartheta - \cancel{\ell} \dot{x} \sin\vartheta \dot{\vartheta} = - g \cancel{\ell} \sin\vartheta - \cancel{\ell \dot{x} \dot{\vartheta} \sin\vartheta}$$

$$\boxed{\frac{2}{3} \ell \ddot{\vartheta} + \ddot{x} \cos\vartheta = - g \sin\vartheta}$$

$\boxed{X \Rightarrow}$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + m\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right) = -xc$$

$$\boxed{m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -xc}$$