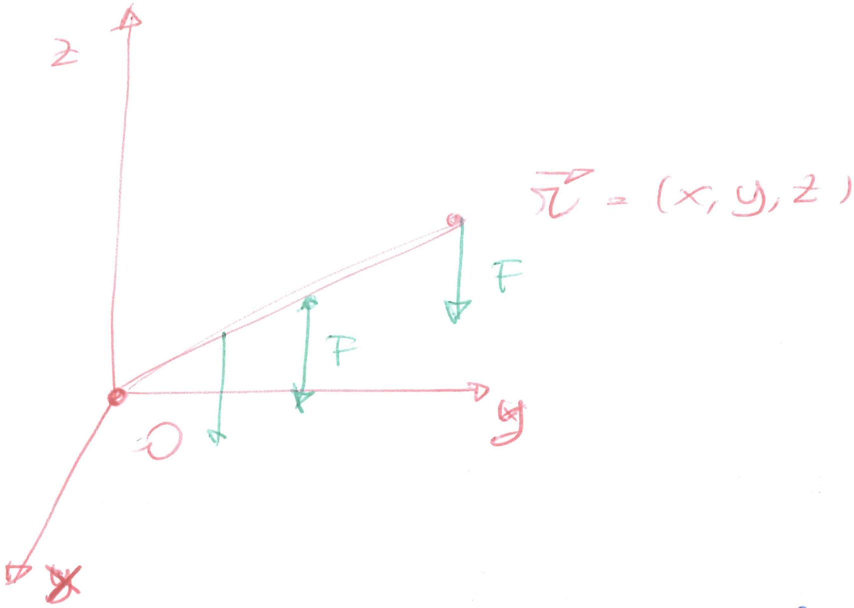
Esempi

Forza gravitazionale $\quad \vec{F} = -mg\hat{k}$



per conoscere il potenziale in $\vec{r}$ fisso $U_0 = 0$

prendo una curva che congiunge O con $\vec{r}$:

segmento $\qquad \vec{\gamma}(t) = t \cdot \vec{r} = t\,(x, y, z)$

$$= \hat{i}\,tx + \hat{j}\,ty + \hat{k}\,tz$$

$$\dot{\gamma}(t) = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$$

$$U(\gamma(1)) = U(\vec{r}) = -\int_0^1 \vec{F} \cdot \dot{\gamma}\, dt =$$

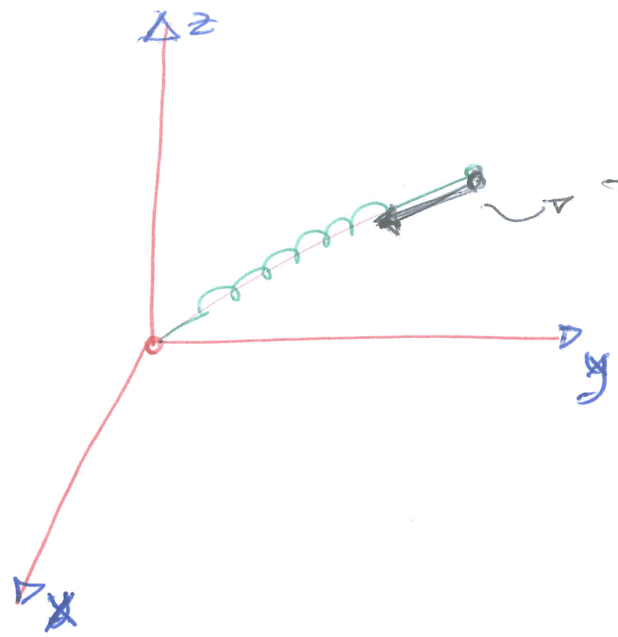
$$= +\int_0^1 (mg\hat{k}) \cdot (\hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z)\, dt =$$

$$\int_0^1 mgz\, dt = mgz \int_0^1 dt = mgz$$

$U(x) = mgz$

$\nabla U = mg\hat{k} = -F$

Forze elastiche



$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{F} = -c\,\vec{r}$ $\qquad F(x,y,z) = -c(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

$\gamma(t) = tx\,\hat{i} + ty\,\hat{j} + tz\,\hat{k}$

$\vec{F}(\gamma(t)) = -c\,(xt\,\hat{i} + yt\,\hat{j} + zt\,\hat{k})$

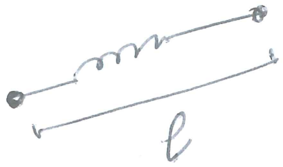
$\dot{\gamma} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$U(x,y,z) = c\int_0^1 (xt\,\hat{i} + yt\,\hat{j} + zt\,\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\,dt$

$= c\int_0^1 x^2t + y^2t + z^2t = c\,x^2\int_0^1 t\,dt + y^2 + z^2\left(\int_0^1 t\,dt\right)$

$$U(x,y,z) = c\,\underbrace{\frac{(x^2+y^2+z^2)}{2}}$$

lughezza delle molle al quadrato



$$U_{molle}(\ell) = c\,\frac{\ell^2}{2}$$

COORDINATE Lagrangiane

Set di n parametri che individuano in maniera univoca la configurazione di un sistema meccanico.

n è il numero dei gradi di libertà del sistema calcolato come $m - v$

m ↓ numero totale dei g.d.l. dei corpi che compongono il sistema

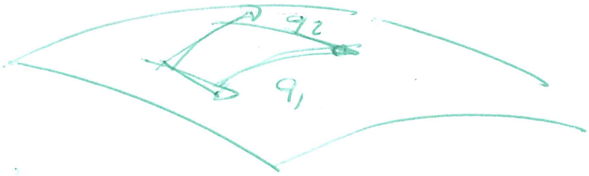
v ↳ numero dei vincoli imposti

Ricorda = $m = \begin{cases} 6 & \text{rigido in 3D} \\ 3 & \text{rigido in 2D} \\ 3 & \text{punto in 3D} \\ 2 & \text{pt. in 2D} \end{cases}$

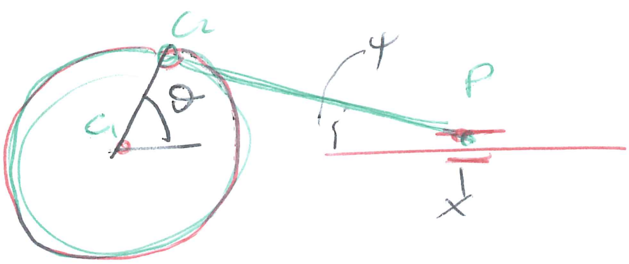
Esempi

pt su una superficie

coordinate curvilinee



Sistema meccanico ~~biella-manovella~~



Possibili coord. Lag.

θ, φ oppure x

2 Rigidi in R^2 = 6 gdl.

Vincoli = 2 cerniere (C_1, C_2) × 2 gl.

1 pattino × 1 gl.

$n = 6 - 2 \times 2 - 1 = 1$ gdl. ⇒ 1 coord. Lagrang.

Equazione di E-L per sistemi meccanici

Abbiamo ricavato le eq. E-L. per un singolo punto materiale (vincolato o libero) in presenza di forze conservative.

Le eq. richiedono la conoscenza dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del punto.

Le eq. E-L si estendono immediatamente ai sistemi meccanici contenenti distribuzione continua di massa (sbarre, dischi ecc.)