Integrali primi e leggi di conservazione

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Immaginiamo L non dipende da un certo q_i

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

Ho integrato

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \xrightarrow{\text{Ho integrato}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = K$$

Momento coniugato della variabile q_i

questo è costante nel tempo

È la quantità che meglio estende il concetto $\vec{K} = m\vec{v}$ a caso di sistemi complessi

Ex particella in $\mathbb{R}^3$ sotto potenz. $V(x,y)$

$q_1 = x \quad q_2 = y \quad q_3 = z$ Rapp. banale del moto della particella

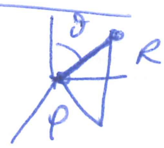
$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x,y)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m \ddot x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{eq. N.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot z} = K = m \dot z$$

conserv. della comp. momento della q. di moto lungo z (nessuna forza agisce lungo z)

Ricordiamo il pendolo sferico



$$L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\varphi^2) - mg R \cos\theta$$

non dip. da φ

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}}_{\text{mom. coniug. di } \varphi} = m R^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi$$

Dinamica Lagrangiana 1 caso banale

Punto materiale pesante libero di muoversi in $\mathbb{R}^3$

coord. Lagrangiane (x, y, z)

$$U = mgz$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Eq. E-L.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \qquad q = x, y, z$$

$$q = x \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

consew. del momento

$m\dot{x} = K$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \boxed{m\ddot{x} = 0}$$

$$q = z \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg$$

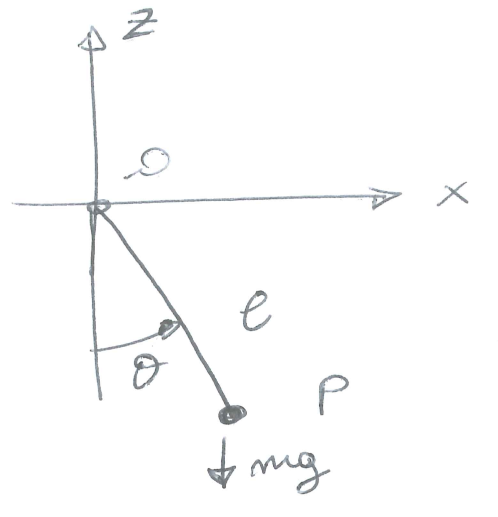
$$\frac{d\, m\dot{z}}{dt} = -mg \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -g}$$

Ritrovo la II Eq. Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

$F = -mg \qquad \vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

Pendolo matematico con descrizione di Lagrange

1)



$$(P-O) = \hat{\imath}\,\ell \sin\theta - \hat{k}\,\ell\cos\theta$$

$$v_P = \ell\left(\hat{\imath}\cos\theta\,\dot{\theta} + \hat{k}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2$$

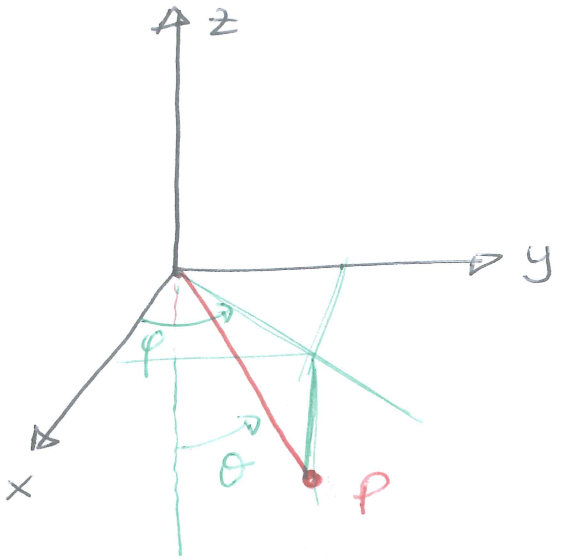
$$U = -mg\cos\theta\,\ell \qquad U = mgz$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\,\ell\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\cancel{m}\,\ell^{\cancel{2}}\dot{\theta}\right) = -\cancel{m}\,g\,\cancel{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

Caso 3D : Pendolo sferico



coordinate di P

$$\begin{cases} x = l \sin\theta \cos\varphi \\ y = l \sin\theta \sin\varphi \\ z = -l \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = l \Big(\hat{i} \underbrace{(\cos\theta \cos\varphi \dot{\theta} - \sin\theta \sin\varphi \dot{\varphi})}_{\dot{x}} +$$

$$\hat{j} \underbrace{(\cos\theta \sin\varphi \dot{\theta} + \sin\theta \cos\varphi \dot{\varphi})}_{\dot{y}} +$$

$$\hat{k} \underbrace{(\sin\theta \dot{\theta})}_{\dot{z}} \Big)$$

$$T = \frac{1}{2} m |v|^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

$$U = -mgl \cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta \right) + mg\ell\cos\theta$$

(1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left| m\ell^2 \dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta \right| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ell^2 \dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta = K}$$

esprime la conservazione del momento angolare

(2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m\ell^2\dot\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2\dot\varphi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mg\ell \operatorname{sen}\theta$$

$$\cancel{m}\,\ell^{\cancel{2}}\,\ddot\theta = \cancel{m}\,\ell^{\cancel{2}}\,\dot\varphi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cancel{m}g\cancel{\ell} \operatorname{sen}\theta$$

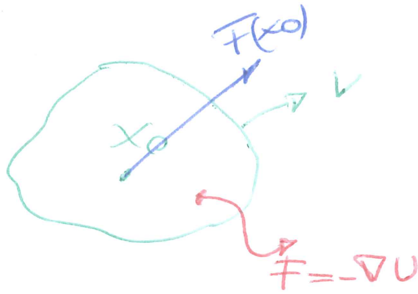
$$\boxed{\ddot\theta = \dot\varphi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - g/\ell \operatorname{sen}\theta}$$

Forze conservative

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ U scalare : Energia potenziale

spesso $\vec{F}$ è nota e ci si pone il problema di trovare

una funzione U t.c. $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$



Th

Sia F t.c. $\nabla \wedge F(x_0) = 0$

$\Rightarrow \exists\, U$ t.c. $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ $\forall\, x \in V$

con V intorno di xo

$\Rightarrow$ Se il rotore di F è nullo allora F

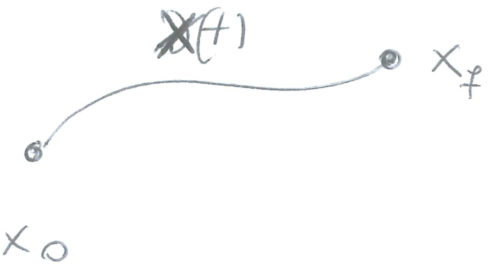
si può esprimere <u>localmente</u> come il gradiente

di un energia potenziale

NOTA $\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$

$$\hat{i}\left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) + \hat{j}\left(\partial_z F_x - \partial_x F_z\right) + \hat{k}\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right)$$

Come calcolare U partendo da $\vec{F}$?



$X(0) = x_0$

$X(t_f) = x_f$

Scelgo una curva che connette 2 punti

fisso arbitrariamente $U(x_0) = U_0$

$\Uparrow$

potenziale è definito a meno di una costante additiva

considero $U(X(t))$ il potenziale valutato lungo la curva

$$\frac{d}{dt} U(X(t)) = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{X}} \qquad *$$

Integro fra 0 e t_f

$$\int_0^{t_f} \frac{dU(X(t))}{dt} dt = U(X(t_f)) - U(X(0)) =$$

$$U(x_f) - U_0$$

Il membro di destra di * dà

$$\int_0^{t_f} \underbrace{\nabla U}_{= -\vec{F} \text{ per ipotesi}} \cdot \dot{\vec{x}} \, dt$$

ottengo

$$\boxed{U(x) = U_0 - \int_0^{t} \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} \, dt}$$