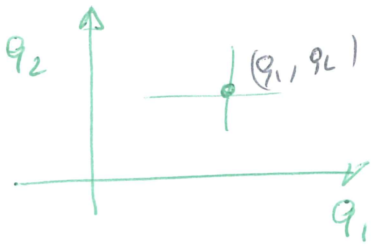
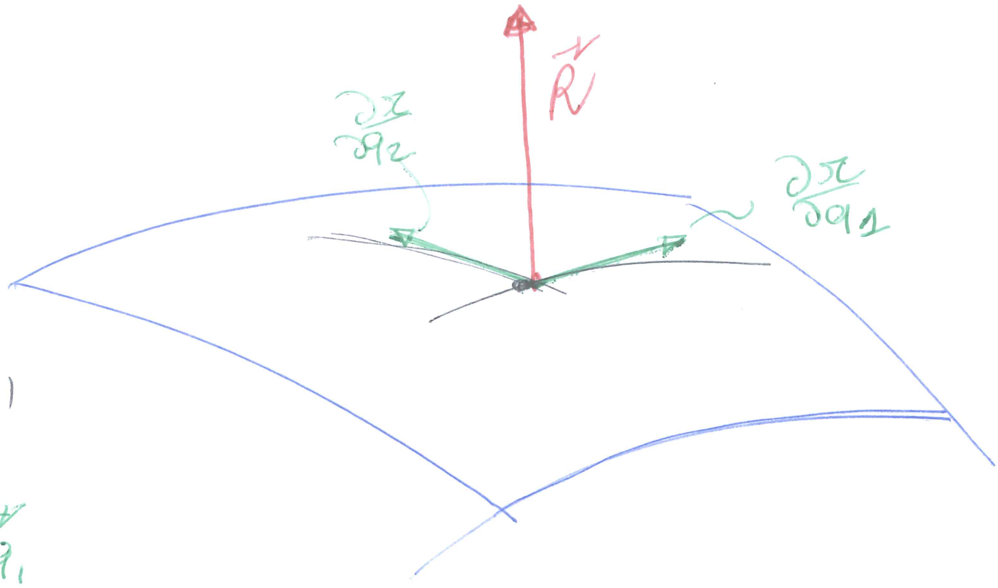
Vantaggi derivanti dall'utilizzo della descrizione parametrica del moto di un punto lungo una superficie





i vettori $\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|_{(q_1,q_2)}$ e $\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right|_{(q_1,q_2)}$ individuano il piano tangente in $\vec{r}\,(q_1, q_2)$.

La reazione vincolare (vincolo liscio) è ortog. al piano tangente al vincolo

II Eq. Newton

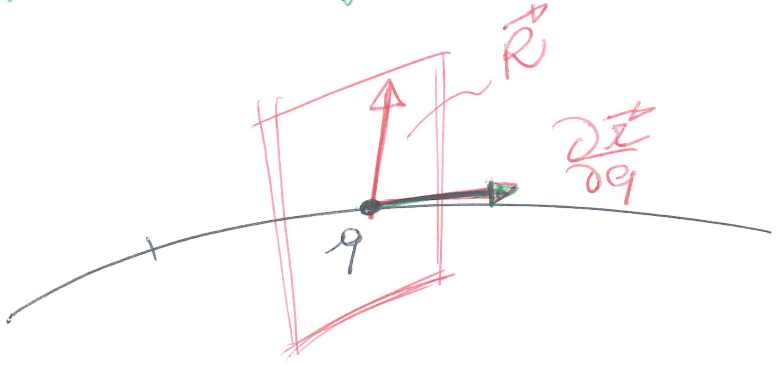
$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{forze esterne al vincolo}} + \overbrace{\vec{R}}^{\text{reaz. vincolare}}$$

moltiplico scalarmente per $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $i = 1, 2$

$$m\, \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \underbrace{\vec{R}\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

Le forze vincolari "scompaiono" dall'equazioni di moto: si riesce a determinare il moto del punto vincolato alla superficie senza dover determinare il valore delle reazioni vincolari.

Analoga situazione per un punto lungo una curva



$\vec{r} = (x(q), y(q), z(q))$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$ è tg alla traiettoria

$\vec{R}$ appartiene al piano $\perp$ alla traiettoria

ancora $m\, \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$

Alcune proprietà matematiche preliminari

(1) Vale $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $\quad i = 1 \dots n$

dove $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Nota $\vec{r} = \vec{r}(q_1 \dots q_n)$ per conoscere la posizione di un punto è sufficiente conoscere il valore delle coordinate generalizzate (q_i)

invece x la velocità $\vec{v} = \vec{v}(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)$

La velocità "fisica" di un punto dipende dal valore delle velocità dei parametri $\{q_i\}$

Dalla regola di deriv. a catena $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j$

quindi $\vec{v}(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n) = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \vec{r}(q_1 \dots q_n)}{\partial q_j} \dot{q}_j$

considero $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_j \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

($\dot{q}_i$ e $\dot{q}_j$ sono indip. per $i \neq j$)

② Vale $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$

Dimo.

In generale si ha che $\frac{d}{dt} f\left(q_1(t), q_2(t) \ldots q_n(t)\right) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

ponendo $f = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_i} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$$

Torno a considerare le II Eq. di New. in coordinate generalizzate.

$$m\,\vec{a}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \qquad i=1\dots n$$

Elaboro il termine $\vec{a}\cdot\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$

$$\vec{a}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \qquad \left(\frac{d}{dt}f\right)h = \frac{d}{dt}(fh) - f\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}_{(1)\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}}\right) - \vec{v}\,\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}_{(2)\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}}$$

$$\vec{a}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

quindi

$$m\vec{a}\,\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{=\,T}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{=\,T}\right)$$

Si ottiene

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}T - \frac{\partial}{\partial q_i}T = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}}$$

Consideriamo Forze esterne conservative, ovvero derivanti da un Potenziale

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$V(x,y,z)$ = Energia potenziale

$\downarrow$

coordinate del punto su cui agisce la forza $\vec{F}$.

Le coordinate sono espresse tramite le coord. generalizz.

$\{q_i\}$

$$V = V(x(q_1 \dots q_n), y(q_1 \dots q_n), z(q_1, \dots q_n))$$

Si ha

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}$$

Dato $\vec{r} = (x,y,z)$

$$\vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_i} =$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Facciamo l'ipotesi che V non dipenda dalla velocità del punto (sempre vero per forze conservative)

ovvero V non dipende da $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Posso mettere l'eq. precedente in una forma più simmetrica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Conviene definire la quantità scalare

$L \doteq T - V$ denominata funzione Lagrangiana

$$L = L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$$

Scriviamo l'equazione di moto in forma compatta

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1 \dots n}$$

Equazione di Eulero-Lagrange

Abbiamo dimostrato

Sia P un ① - punto libero

② - punto vincolato a sup. liscia

③ - punto su linea liscia

la cui posizione ~~r = r(~~

$$r = \begin{cases} r(q_1, q_2, q_3) & ① \\ r(q_1, q_2) & ② \\ r(q_1) & ③ \end{cases}$$

sia rappresentata dalle coord Lagrangiane q_i.

Allora i movimenti $q_i(t)$ sulla carta

corrispondenti alla soluz dell' eq. di Newton

$$m\vec{a} = -\nabla V + R$$

↳ reaz vincol.

↳ forze conserv. esterne

sono soluzione dell' eq. di E.-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n$$

con $L = T - V$ → E. potenziale

↳ E. cinetica

Nota $\underbrace{E_{tot}}_{\text{quello che si conserva}} = T + V$