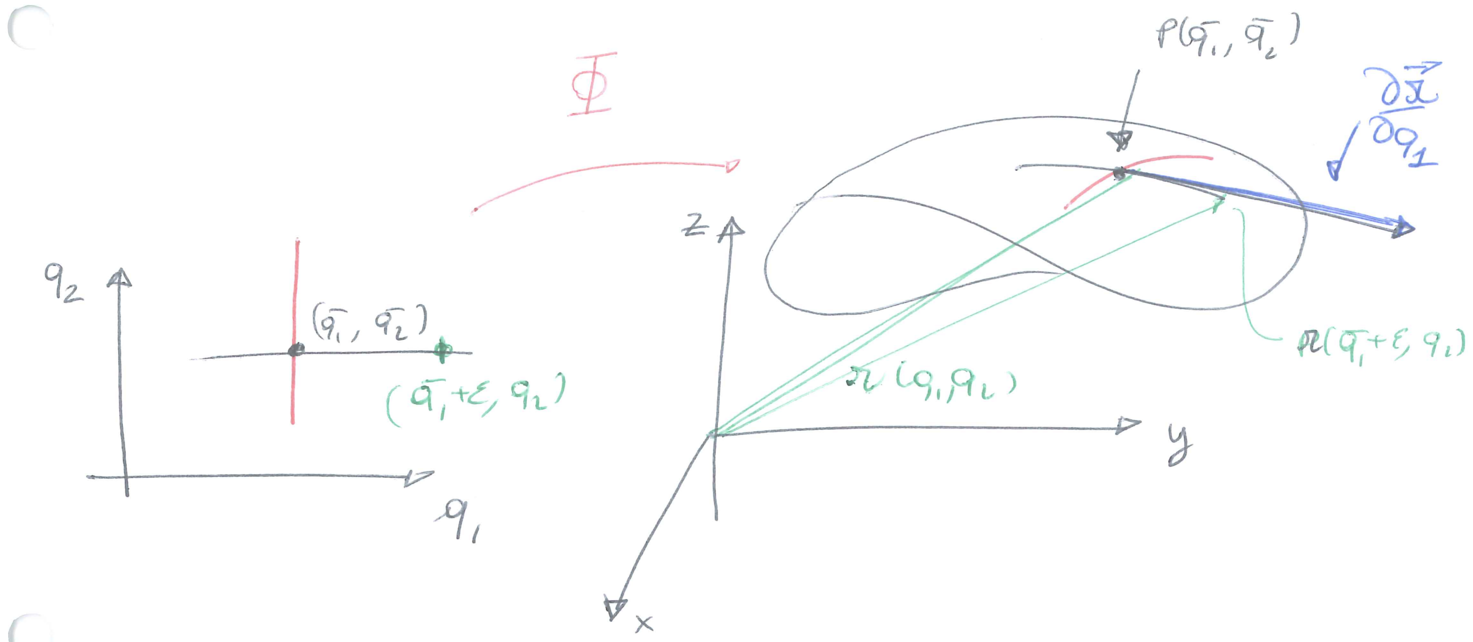
~~[illegible]~~ CURVE e VETTORI COORDINATI



Derivo la posizione rispetto alla prima coordinata

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{r}(\bar{q}_1+\varepsilon, \bar{q}_2) - \vec{r}(\bar{q}_1, \bar{q}_2)}{\varepsilon}$$

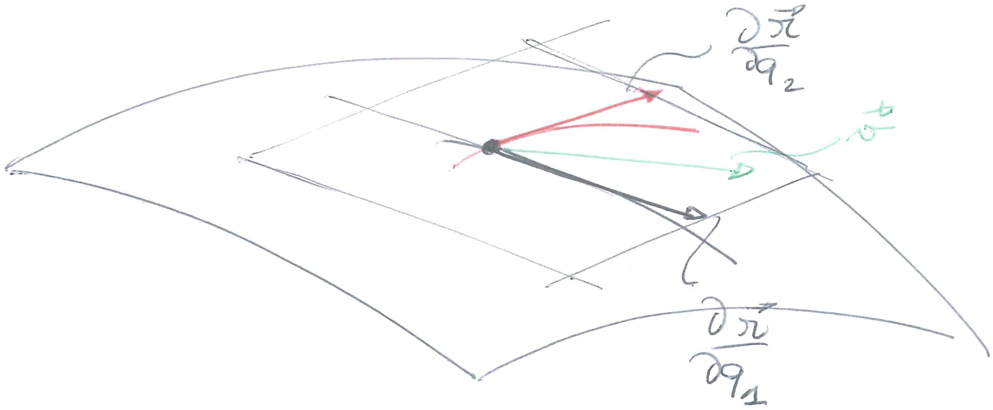
↳ vettore tangente alla superficie
(è la tg ad una curva sulla superficie)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(q_1, q_2) \\ y(q_1, q_2) \\ z(q_1, q_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} \end{pmatrix}.$$

considero anche $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \partial y / \partial q_2 \\ \partial z / \partial q_2 \end{pmatrix}$

Assumiamo che $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$ siano linearm. indip.

ed individuiamo il piano tg alla superficie in un pt.

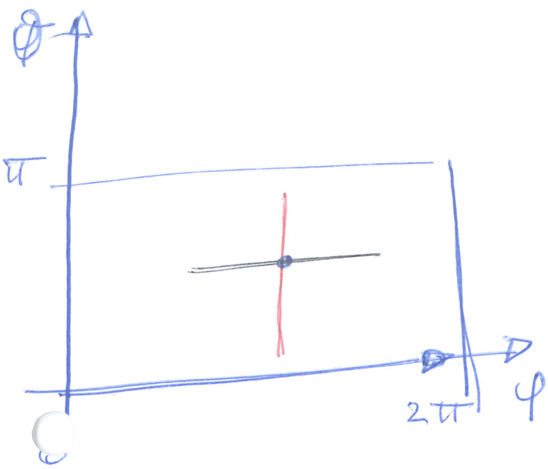


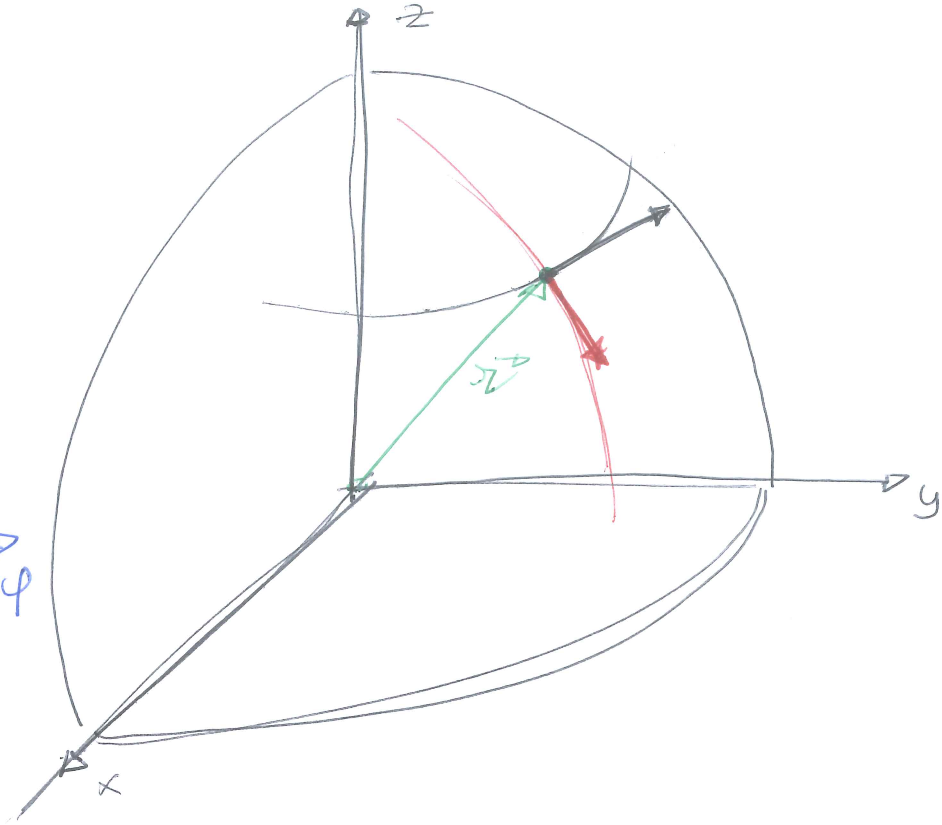
Un vettore nel piano tg ha la forma

$$\vec{v} = \alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + \beta \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} =$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$ l. ind $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{pmatrix}$: Rango = 2

CASO COORD. SFERICHE





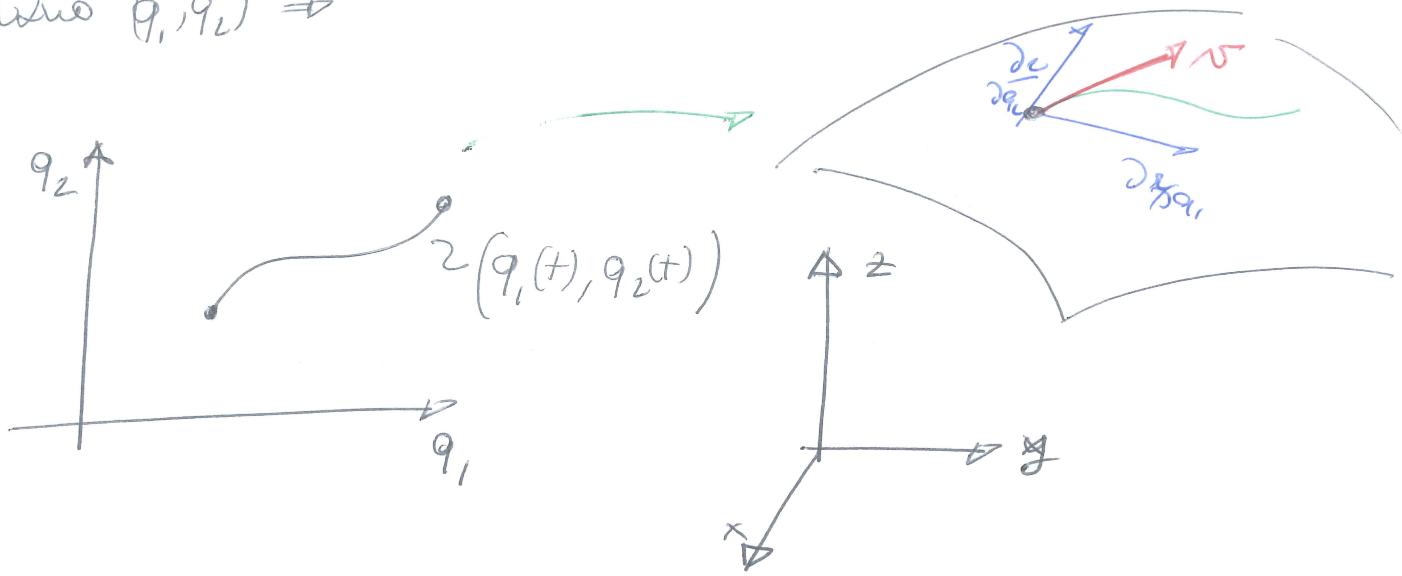
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = R \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = R \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = R \cos\vartheta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi & -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi \\ -R\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$

Un punto vincolato a muoversi lungo una superficie lo descrivo tramite una traiettoria nello spazio (q_1, q_2) $\Rightarrow$



$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = x(q_1(t), q_2(t)) \\ y(t) = y(q_1(t), q_2(t)) \\ z(t) = z(q_1(t), q_2(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 \\ \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 \\ \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{q_1} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \partial y/\partial q_2 \\ \partial z/\partial q_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

Esprimo la velocità di P come combinazione lineare dei vettori tg $\frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2}$ (base del piano tg)

Vediamo adesso più in generale: descriviamo il moto in $\mathbb{R}^3$ di un punto attraverso l'uso di parametri q_i (da 1 a 3) considerati "liberi" ovvero che possano variare a piacimento senza particolari vincoli e l'uno indipendente dall'altro.

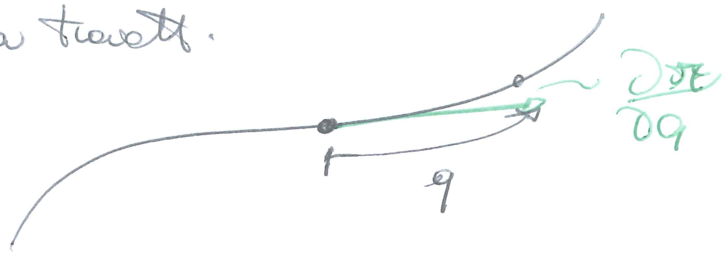
Non mi interessa direttamente alla questione se P sia vincolato o libero, sarà eventualmente la legge che lega q_i con P a descrivere eventuali vincoli di movimento

ESEMPI

1D Punto su 1 curva (1 g.d.l.)

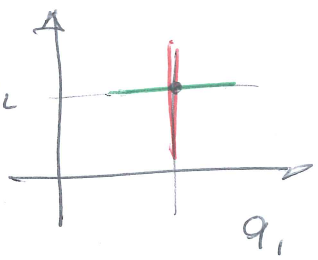
$$r = (P-O) = (x(q), y(q), z(q))$$

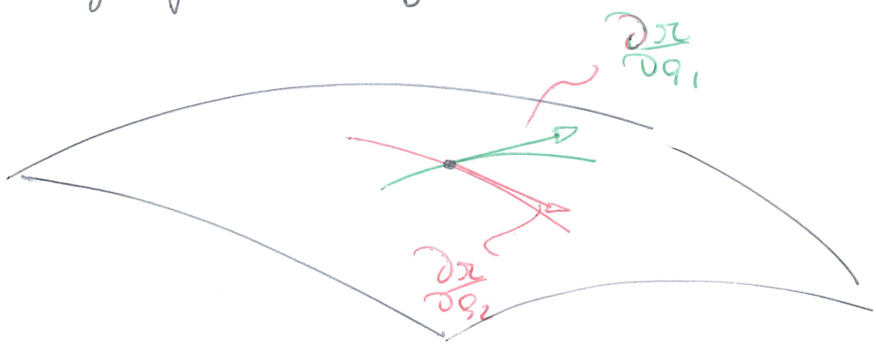
$\frac{\partial r}{\partial q}$ = vett. tg alla traiett.



con q ascissa curvilinea

2D Punto su una superficie (2 g.d.l.)





3D ~~La traietto~~ Le coordinate "fisiche" del punto libero in R^3 vengano espresse tramite una generica trasformazione di coordinate

$$(q_1, q_2, q_3) \to (x, y, z)$$

tipo coord. sferiche

$$(\theta, \varphi, r) \to (x, y, z) = \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Mi riferisco quindi alla generica notazione

$\vec{r} = \vec{r}(q_i)$ con $i = 1 \dots n$ $n = 1, 2, 3$

La formula della velocità si scrive

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i} \quad *$$

ENERGIA CINETICA DI UN PUNTO

$$T = \frac{1}{2} m (\vec{v})^2 = \frac{1}{2} m \, \vec{v} \cdot \vec{v}$$

la esprimo attraverso i $\{q_i\}$

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i v_i \cdot v_i$$

La * espressa per componenti è $v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j,k}^{n} \underbrace{\sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}}_{\parallel} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{m}{2} \sum_{j,k}^{n} g_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

g_{jk} : matrice metrica di Riemann

Definendo $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ e $\underline{\underline{g}}$ la matrice

$n \times n$ con componenti g_{ij}

$$T = \frac{m}{2} \, \dot{\vec{q}}^{\,T} \, \underline{\underline{g}} \, \dot{\vec{q}}$$

Es. ENERGIA CINETICA di un punto vincolato ad una sup. sferica

$q_1 = \theta \quad q_2 = \varphi$

$$\vec{r} = \begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases}$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{cases} \dot{x} = R\left(\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi\right) \\ \dot{y} = R\left(\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi\right) \\ \dot{z} = -R \dot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{R^2 m}{2}\Big[\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\right)^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2\theta\Big] =$$

$$= \frac{R^2 m}{2}\Big[\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi \cancel{- 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} + \dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \cancel{+ 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} + \dot{\theta}^2\sin^2\theta\Big] = \frac{R^2 m}{2}\Big[\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\sin^2\theta\Big]$$

$$T = \frac{R^2 m}{2}\left[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right]$$

Definendo $\vec{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ $\qquad T = \frac{m}{2}\, \dot{\vec{q}}^{+}\, \underline{\underline{g}}\, \vec{q}$

$$T = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix}^{+} \underbrace{\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{g}}} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix}$$