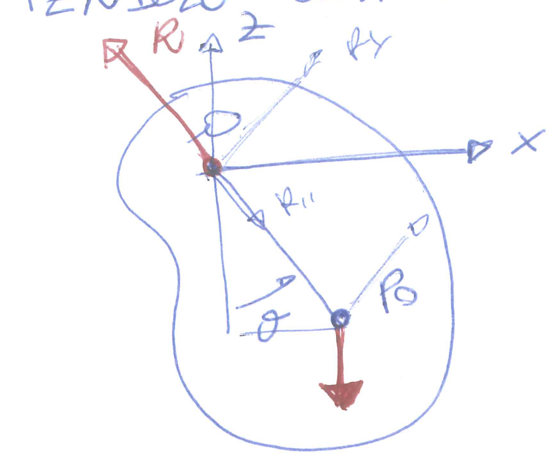
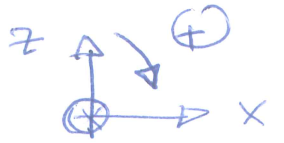
PENDOLO COMPOSTO





Asse y sia asse principale

I: $m\vec{a}_{P_0} = \vec{R}^{ext}$

$m\vec{a}_{P_0} = -mg\hat{k} + \vec{R}$

II: polo O

$\sigma_{yy}(O)\,\dot{\omega}_y = M_y^{ext}(O)$

$\omega_y = -\dot{\theta}$ $\qquad \dot{\omega}_y = -\ddot{\theta}$

$\sigma_{yy}(O) \equiv I$

$M_y^{ext}(O) = mg\,\overbrace{|P_0 - O|}^{d}\,\text{sen}\,\theta$

$-\ddot{\theta} I = mg\,d\,\text{sen}\,\theta \; : \; \underbrace{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\,\text{sen}\,\theta = 0}_{\text{equazione chiusa}}$

Trovo le reazioni vincolari

$$(P_0 - O) = -d\cos\theta\,\hat{k} + d\sin\theta\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_{P_0} = \dot{\theta} d\left[\sin\theta\,\hat{k} + \cos\theta\,\hat{i}\right]$$

$$\vec{a}_{P_0} = d\ddot{\theta}\left[\sin\theta\,\hat{k} + \cos\theta\,\hat{i}\right] +$$

$$+ \quad \dot{\theta}^2 d\left[+\cos\theta\,\hat{k} - \sin\theta\,\hat{i}\right]$$

$$= d\ddot{\theta}\,\vec{v}_{P_0} - \underbrace{d\dot{\theta}^2\vec{r}}_{\text{a. centripeta}} \qquad r = (P-O)$$

Posso sostituire $\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I}\sin\theta$

per $\dot{\theta}^2$ moltiplico $2\dot{\theta}$

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2\dot{\theta}\sin\theta\frac{mgd}{I}$$

$$\frac{d}{dt}\left|\dot{\theta}^2\right| = \frac{mgd2}{I}\frac{d}{dt}\left|\cos\theta\right)$$

Integ. : $\dot{\theta}^2 = 2\frac{mgd}{I}\cos\theta + K \longrightarrow$ da CI

Per sup. $t=0$ pendolo $\theta = \frac{\pi}{2}$

$v_{ang} = 0 \quad \dot{\theta}\big|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow K = 0$

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{mgd}{I}\cos\theta$$

$$\vec{a}_{P_0} = d\,\hat{k}\left[\sin\theta\left(-\frac{mg}{I}d\right)\sin\theta + \cos\theta\,\frac{2mg}{I}d\,\cos\theta\right]$$

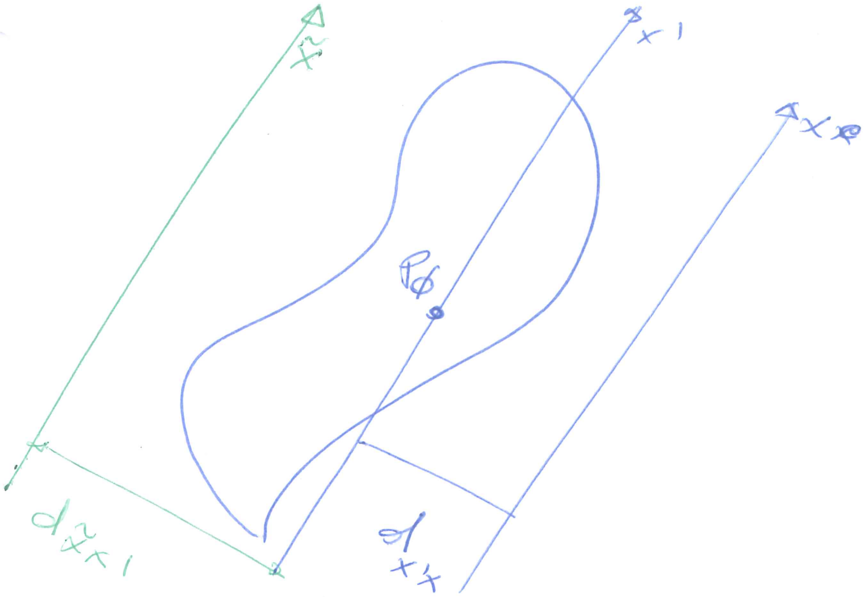
$$+\,d\,\hat{i}\left[\cos\theta\left(-\frac{mg\,d}{I}\right)\sin\theta - \hat{i}\sin\theta\,\frac{2mg\,d}{I}\cos\theta\right]$$

$$\cancel{=d\,\hat{k}\,\theta}\,[$$

$$= \frac{d^2 mg}{I}\left[+\hat{k}\left(\cancel{\cos^2\theta} - \sin^2\theta + 2\cos^2\theta\right) + -\hat{i}\left(\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{d^2 mg}{I}\left[\hat{k}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - 3\hat{i}\sin\theta\cos\theta\right]$$

TEOREMA di HUYGENS



$$I_{xx} = I_{x'x'} + m d_{x'x}^2$$

↳ momento di inerzia baricentrico asse x' parallelo a x

Se conosco il mom. d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse passante per il baricentro, posso facilmente determinare il mom d'inerzia rispetto ad un qualsiasi altro asse parallelo a quello ~~dato~~.

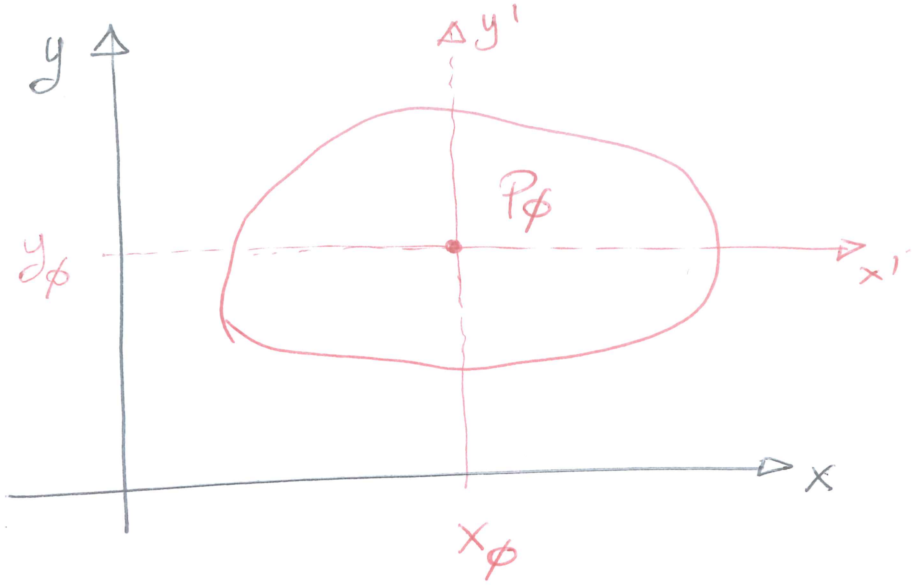
Trasformo il momento di inerzia fra 2 assi non baricentrici

Hp noto $I_{\tilde{x}\tilde{x}}$ calcolo I_{xx}

$$I_{x'x'} = I_{\tilde{x}\tilde{x}} - m d_{\tilde{x}x'}^2 \qquad \boxed{\neq d_{x\tilde{x}}^2}$$

$$I_{xx} = I_{x'x'} + m d_{xx'}^2 = I_{\tilde{x}\tilde{x}} + m \underbrace{(d_{xx'}^2 - d_{\tilde{x}x'}^2)}$$

$\mathbb{R}^2$



$$I_{xx} = I_{x'x'} + y_\phi^2 m$$

$$I_{xx} = I_{y'y'} + m x_\phi^2$$

Mom. centrifughi $\quad I_{xy} = I_{x'y'} - m x_\phi y_\phi$

Vincoli semplici

Consideriamo un punto vincolato a muoversi lungo una superficie

Siano $(x(t), y(t), z(t))$ le coord. del punto.

L'esistenza del vincolo si esprime matematicamente tramite un'equazione

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Es. pt su una sup. sferica $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = R^2$

- Le coordinate devono soddisfare un'unica equazione $\Rightarrow$ vincolo semplice

- L'equazione contiene <u>SOLO</u> le coordinate e non le derivate (velocità) $\Rightarrow$ vincolo olonomo

- Vincolo del tipo $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ sono detti anolonomi

- g.d.l.: 3 coordinate + 1 vincolo = 2 g.d.l.

Un punto $\in \mathbb{R}^3$ ha 2 g.d.l. significa che è possibile esprimere le sue coordinate utilizzando 2 soli parametri. In generale si hanno 2 soluzioni

1. Esprimo 1 coordinata in funzione delle altre 2

2. Trovo una trasformazione del tipo

$$(P-O) = x(q_1, q_2)\hat{\imath} + y(q_1, q_2)\hat{\jmath} + z(q_1, q_2)\hat{k}$$

in cui le 3 coordinate sono espresse tramite 2 nuovi parametri "liberi": Trasformazione di coordinate da $\underset{(q_1, q_2)}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underset{(x, y, z)}{\mathbb{R}^3}$

ESEMPI

Punto su sup. sferica

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Approccio (1)

Posso facilmente esprimere z in funzione di

$\underbrace{x \text{ e } y}_{\text{variabili libere}}$ $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ con $x^2+y^2 \leq R^2$

z ↓ variabile dipendente

$\sqrt{\ }$ ↓ scelgo segno +

In generale, quando posso farlo!

Detto il vincolo $f(x,y,z)=0$

con $f \in C^1$, condizione suff. affinché si possa esprimere (localmente) una coordinata in funzione delle altre è la seguente

$\nabla f(P) \neq 0$ con $f(P)=0$

↳ P è un pt. del vincolo

TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (DEL DINI) caso della sfera

$$f = x^2+y^2+z^2-R^2$$

$$\vec{\nabla} f = 2(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}) \neq 0 \quad \text{se } P\neq O$$

ma l'origine non sta nella sup. sfera

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

→ questa cond. garantisce in generale che si possa esprimere una coord. attraverso le altre

L'equazione $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ la posso esprimere come una trasformazione

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (q_1,q_2) \to (x(q_1,q_2), y(q_1,q_2), z(q_1,q_2))$$

$$\begin{cases} x = q_1 \\ y = q_2 \\ z = \sqrt{R^2-q_1^2-q_2^2} \end{cases} \qquad q_1^2+q_2^2 \leq R^2$$

Approccio 2

Posso descrivere la superficie sferica in maniera più conveniente attraverso le coord. sferiche

Mappa $R^2 \xrightarrow{\phi} R^3$

$$\phi: \begin{cases} x = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases}$$

mi riporto al formalismo generale con $q_1 = \theta$

$q_2 = \varphi$

Interpret. geometrica