Le eq. cardinali

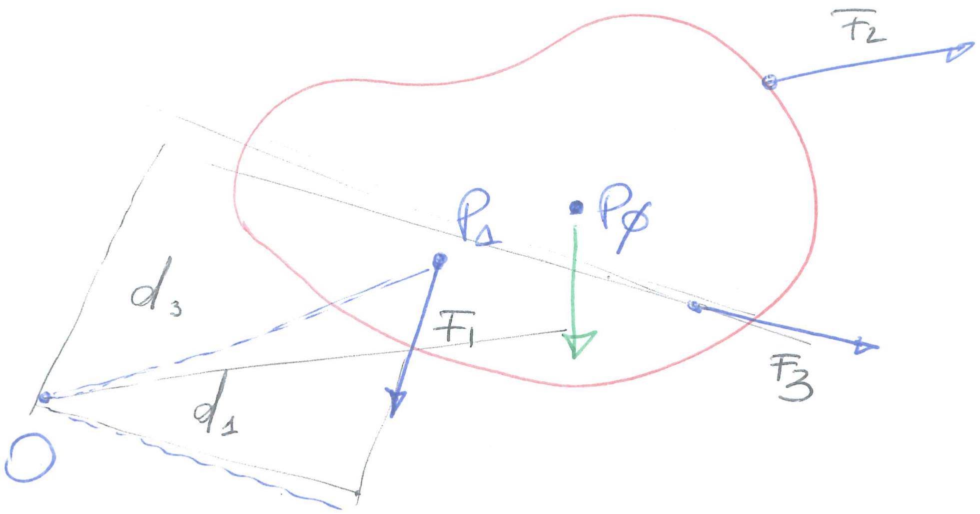
$$m \vec{a}_{P_G} = \vec{F}^{(ext)}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\dot{\vec{\omega}} + \omega \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(O) \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}^{ext}(O)$$

con $O \equiv P_G$ oppure $\vec{v}_O = 0$

Richiedono la conoscenza della forze esterne e del momento risultante da esse prodotto rispetto al polo O

# Forze Esterne




Risultante: somma vettoriale delle forze applicate $\vec{F}^{(ext)} = \sum_i \vec{F}_i$

Momento $\vec{M}^{ext} = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$

↳ somma vettoriale dei momenti di ciascuna delle forze applicate

## FORZE ESTERNE "TIPICHE"

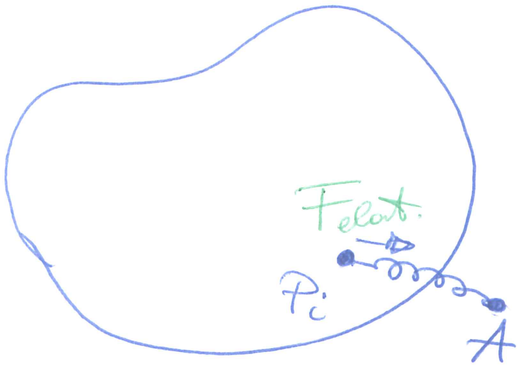
Forza peso: $F_{peso} = -mg\hat{k}$

↳ Direzione verticale risp. suolo terrestre

$g \cong 9{,}8\ m/s^2$

Si applica sul baricentro del rigido

# Forze elastiche :




Estremi $P_i$ ed $A$, $P_i \in$ Rigido e $A$ punto fisso esterno

La molla esercita una forza elastica applicata ad $P_i$ e diretta come $(A - P_i)$ ("diretta verso il punto fisso $A$") di intensità proporzionale alla distanza $|P_i - A|$ (molla con lunghezza a riposo nulla)

$$F_{elast.}(P_i) = -(P_i - A) \cdot c$$

$c \downarrow$ costante elastica

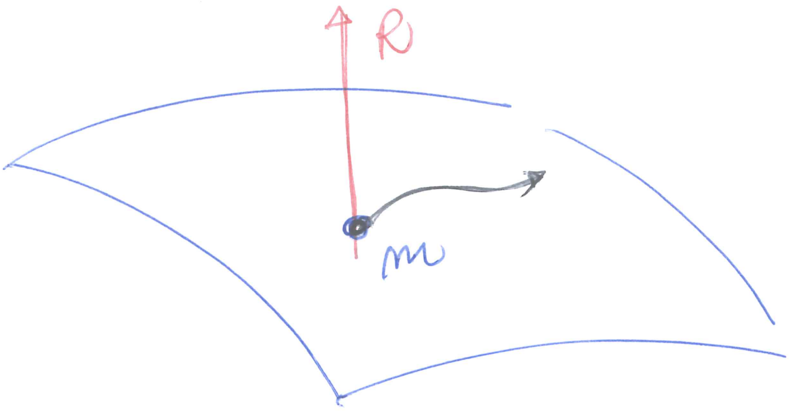
# Reazioni vincolari

In ingegneria tipicamente si limita il moto di sistemi meccanici impedendo specifici movimenti ai componenti di una macchina (moti di traslazione e/o rotazione).
Allo scopo si utilizzano specifici dispositivi detti vincoli

VINCOLO: dispositivo capace di impedire alcuni moti di rotazione o traslazione di un rigido e permetterne altri. Per farlo, il vincolo genera forze o momenti, detti reazioni vincolari, agenti sul rigido.
In generale le reazioni vincolari non sono note a priori ma dipendono dalla configurazione e dal moto globale del sistema meccanico.
In un problema di moto le reaz. vincolari sono incognite da determinare.

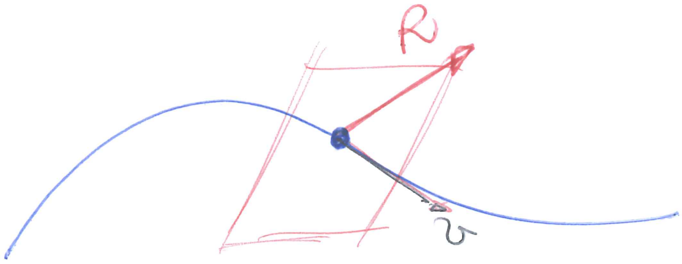
# Principali vincoli e moti vincolati

- Punto vincolato a muoversi lungo una superficie



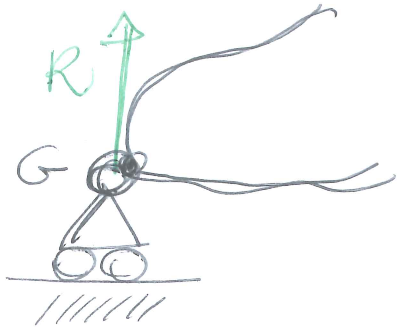

La superficie genera una forza $\perp$ alla sup. stessa

- Punto lungo una curva



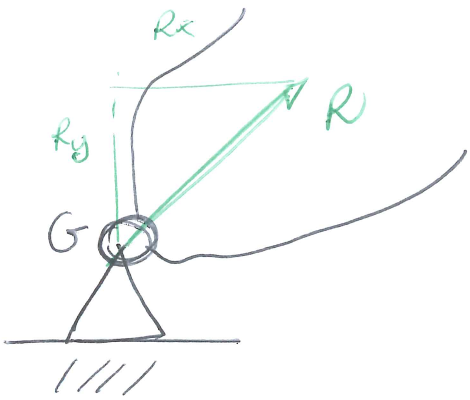

La reazione vincolare appartiene al piano ortogonale alla curva

# Moti piani

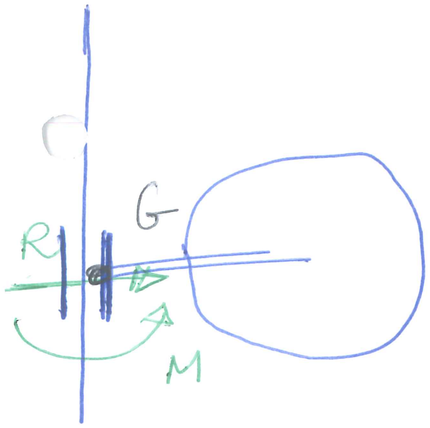



**Appoggio con carrello**: impedisce solo il moto verticale di G rispetto al piano d'appoggio
permette rotazioni attorno a G e traslazioni parallele al piano d'appoggio
Reazione: $\vec{R}$ forza $\perp$ a piano d'appoggio

---



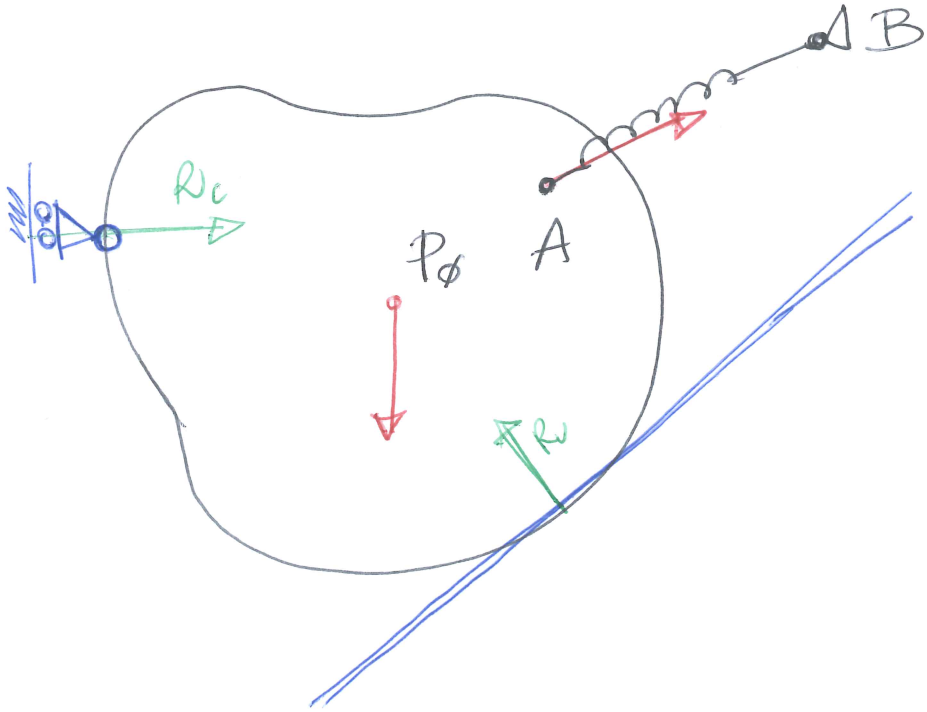

**Cerniera**: Impedisce il moto del punto G
consente rotazioni attorno a G
Reazione: $\vec{R}$ forza con direzione generica



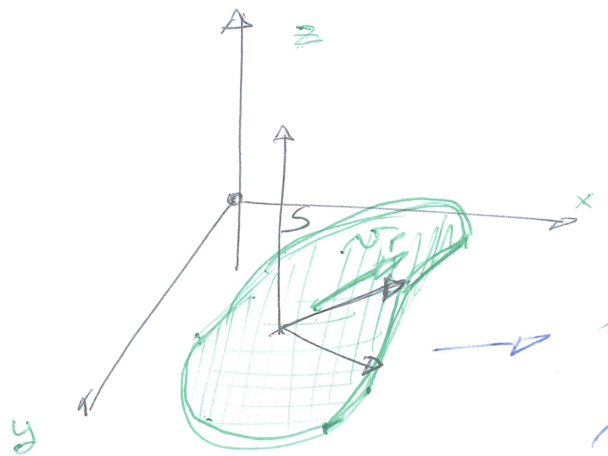

Pattino: Impedisce il moto di G ortogonale all'asse e le rotazioni attorno a G. Consente il moto di G lungo l'asse del pattino

Reazioni: $\vec{R}$ Forza ⊥ all'asse del pattino
$\vec{M}(G)$ Momento applicato in G

Esempio



Consideriamo il moto di solidi piani che si muovono sul piano




lamina con spessore trascurabile

$\vec{v}_z(P_i) = 0 \quad \forall P_i$

I punti giacciono sempre nel piano $z = 0$

Semplificazioni

(1) Matrice d'inerzia

- $I_{zx} = I_{zy} = 0$

dalla definizione

$$I_{xz} = \int x \underset{0}{\underset{\parallel}{z}} \rho \, dV$$

- $\boxed{I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}}$

Infatti

$$I_{zz} \overset{def}{=} \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \rho \, dV$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \rho \, dV$$

$\xrightarrow{z=0}$ $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$

La matrice d'inerzia assume la forma

semplificata $\underline{\underline{\sigma}}(O) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (I_{xx}+I_{yy}) \end{pmatrix}$

② Velocità angolare

Dalla definizione

$$\vec{\omega} = \omega_x \, \hat{\imath} + \omega_y \, \hat{\jmath} + \omega_z \, \hat{k} = \omega_k \, \hat{k}$$

$$\omega_x = \frac{d\hat{\jmath}}{dt} \cdot \hat{k} = 0 \qquad \omega_y = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{\imath} = 0$$

$\hat{\jmath}$ varia nel piano $\qquad \hat{k}$ è costante

$\Rightarrow \frac{d\hat{\jmath}}{dt} \in$ piano $(x, y)$

---

La seconda eq. cardinale si semplifica

$$\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\vec{\omega}) = \vec{M}^{ext}(O)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(O) \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (I_{xx}+I_{yy}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$= \omega_z \, (I_{xx}+I_{yy}) \, \hat{k}$$

analogamente $\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\mathring{\vec{\omega}} = \mathring{\omega}_z\,(I_{xx}+I_{yy})\,\hat{k}$

$$\vec{\omega} \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\vec{\omega}) = \omega_z\,\hat{k} \wedge (\omega_z (I_{xx}+I_{yy})\,\hat{k}) = 0$$

Si ottiene

$$\mathring{\omega}_z\,(I_{xx}+I_{yy})\,\hat{k} = \vec{M}^{ext}(O)$$

moltiplico scalarmente per $\hat{k}$

$$\boxed{\mathring{\omega}_z\,\underbrace{(I^{O}_{xx}+I^{O}_{yy})}_{I^{O}_{zz}} = M^{ext}_z(O)}$$

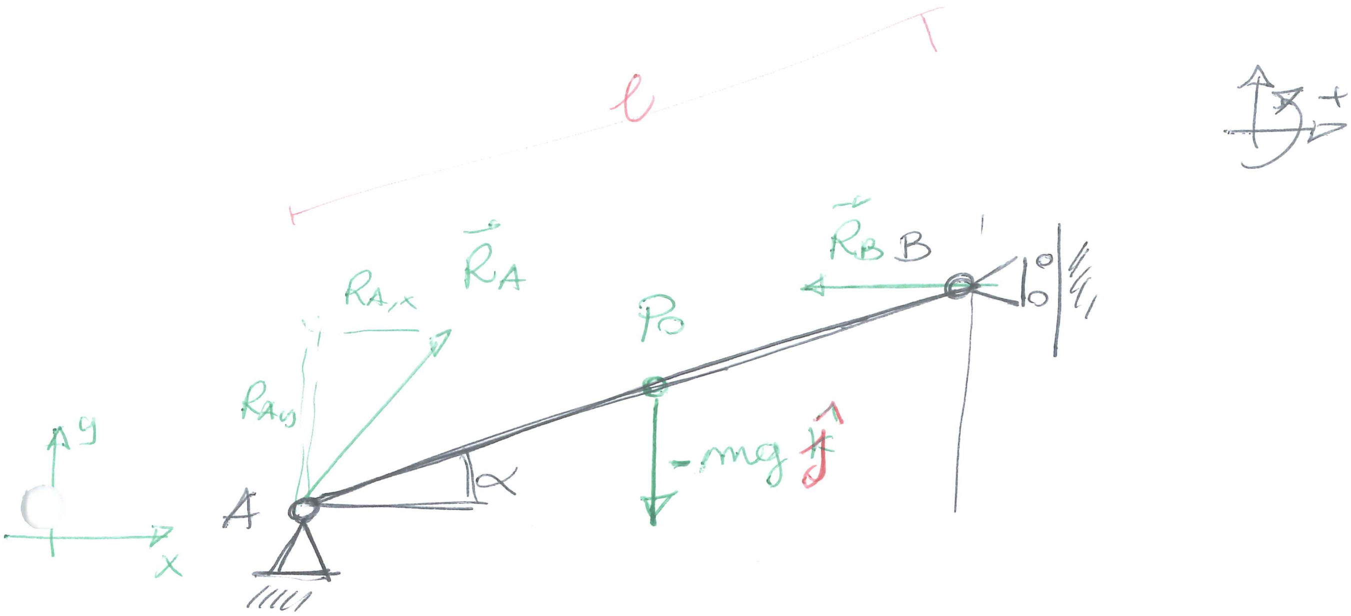
aggiungo il pedice "O" per ricordare che i momenti sono relativi a assi coordinati passanti per O

Energia cinetica relativa al centro di massa

$$T_R = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{\sigma}}(P_\phi)\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,\underbrace{(I^{P_\phi}_{xx}+I^{P_\phi}_{yy})}_{I^{P_\phi}_{zz}}$$

Calcolo delle reazioni vincolari

Asta inclinata con cerniera ed appoggio




Equazioni cardinali

Statica: $\vec{v}(P_i) = 0 \qquad \vec{\omega} = 0$

I card. $\quad m\vec{v}(P_0) = \Sigma R_i \Rightarrow \Sigma R_i = 0$

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B - mg\,\hat{j} = 0$$

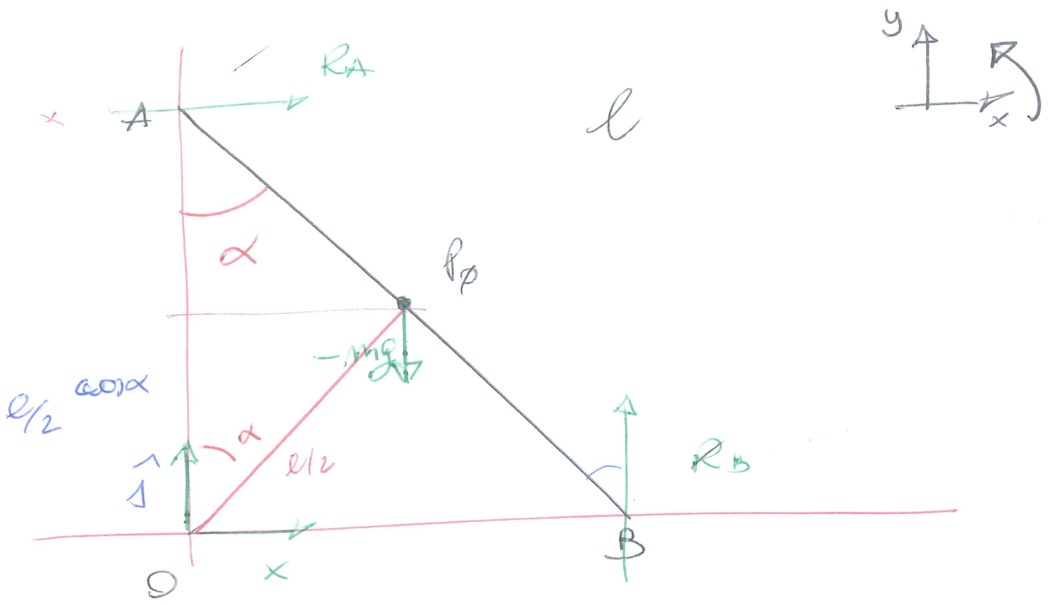
per componenti $\begin{cases} R_{A,x} + R_{B,x} = 0 \\ R_{A,y} - mg = 0 \end{cases}$

II card. rispetto ad A

$$\Sigma \vec{M}_i^{ext}(A) = 0 \Rightarrow -mg\frac{l}{2}\cos\alpha + R_{Bx}\, l \sin\alpha = 0$$

Risolvendo $\quad R_{Bx} = \frac{mg}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = R_{Ax} \qquad R_{A,y} = mg$

# Dinamica: asta appoggiata




Per $t=0$ l'asta è in quiete

I card. $\quad m\,\vec{a}_{P_\phi} = R_A\,\hat{\imath} + R_B\,\hat{j} - mg\,\hat{j}$

$$P_\phi = \frac{\ell}{2}\left(\cos\alpha\,\hat{j} + \sin\alpha\,\hat{\imath}\right)$$

$$\vec{v}_{P_\phi} = \frac{\ell}{2}\,\dot{\alpha}\left(-\sin\alpha\,\hat{j} + \cos\alpha\,\hat{\imath}\right)$$

$$\vec{a}_{P_0} = \frac{\ell}{2}\left[\ddot{\alpha}\left(-\sin\alpha\,\hat{j} + \cos\alpha\,\hat{\imath}\right) + \dot{\alpha}^2\left(-\cos\alpha\,\hat{j} - \sin\alpha\,\hat{\imath}\right)\right]$$

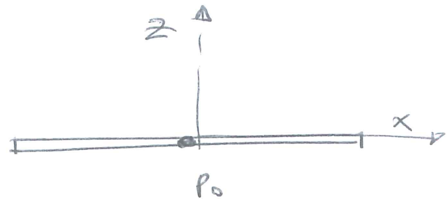
la I card dà

$$\hat{\imath} \Rightarrow \frac{m\ell}{2}\left(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin\alpha\right) = R_A$$

$$\hat{j} \Rightarrow \frac{m\ell}{2}\left(-\ddot{\alpha}\sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cos\alpha\right) = R_B - mg$$

II card. rispetto $P_\emptyset$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\,\hat{k}$$




$$I^{P_0}_{P_0 zz} = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\,dx = \frac{m}{l}\,\frac{l^3}{3}\,\frac{2}{2^3}$$

$$= \frac{m l^2}{12}$$

$$I^{P_0}_{zz}\,\dot{\omega}_z = \vec{M}^{ext}_z(P_\emptyset)$$

$$M_z^{ext}(P_\emptyset) = -R_A\,\frac{l}{2}\cos\alpha + R_B\,\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{m l^{\cancel{2}}}{\underset{6}{\cancel{12}}}\,\ddot{\alpha} = -R_A\,\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\cos\alpha + R_B\,\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{ml}{6}\,\ddot{\alpha} = -\frac{ml}{2}\left(\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - \dot{\alpha}^2\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$+\frac{ml}{2}\left(-\ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}^2\alpha - \dot{\alpha}^2\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}\right) + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$= -\frac{ml}{2}\,\ddot{\alpha} + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{2}{3}\,ml\,\ddot{\alpha} = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \ddot{\alpha} = \frac{g}{l}\,\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Vediamo che è facile integrare 1 volta l'eq. di moto

$$\ddot{\alpha} = \underbrace{\frac{g}{\ell}\frac{3}{2}}_{K} \sin\alpha$$

$$\ddot{\alpha}\,\dot{\alpha} = K\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{\alpha}^2}{2} = K\frac{d}{dt}(-\cos\alpha)$$

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} = -K\cos\alpha + C$$

cond. iniziali $\dot{\alpha}(0)=0$

$\alpha(0)=\alpha_0$

$$0 = -K\cos\alpha_0 + C$$

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} = K(\cos(\alpha_0) - \cos\alpha)$$

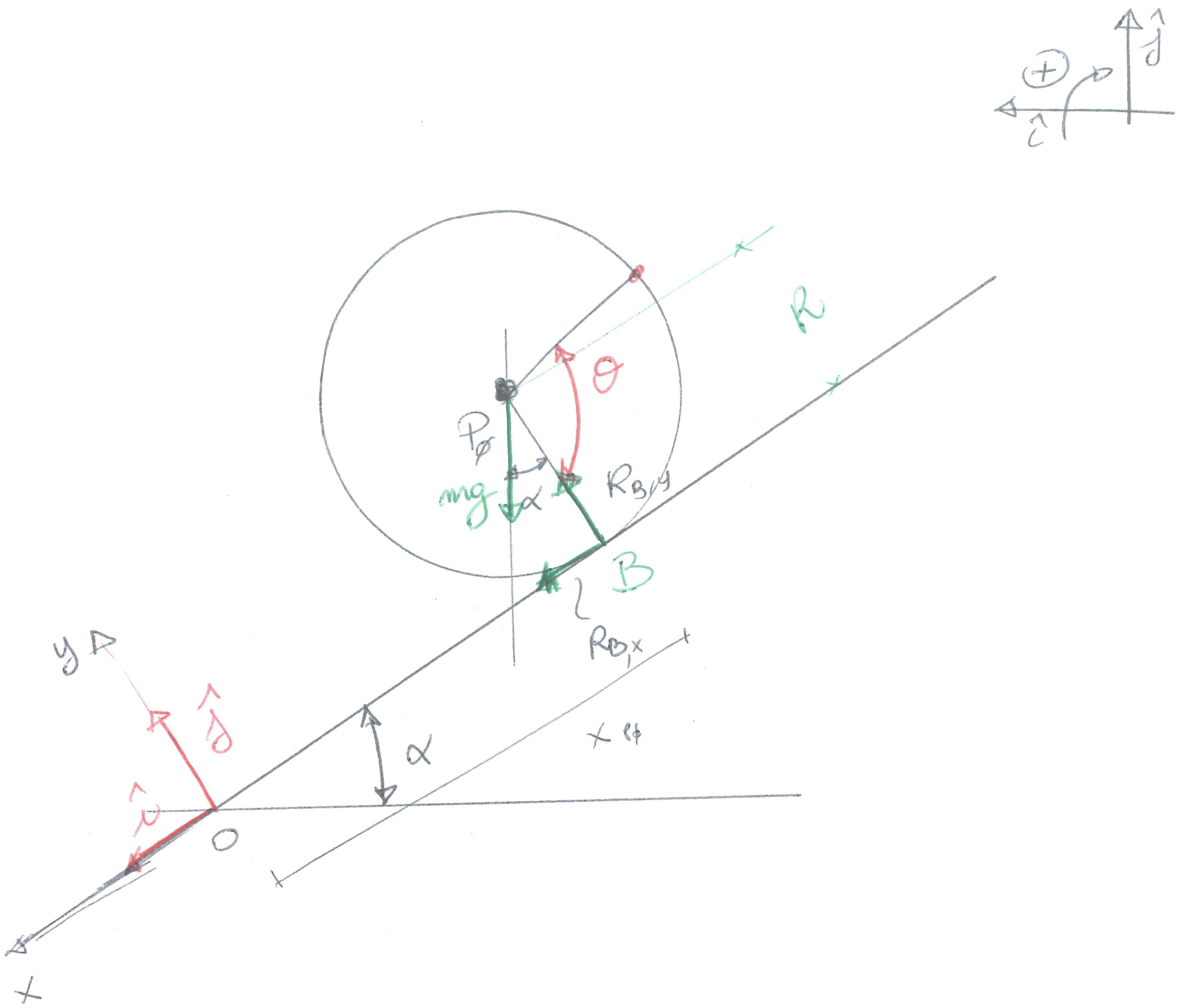
Quando l'asta si stacca dalla parete!

$R_A \geq 0$ vincolo unilatero

$$R_A = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha}\cos\alpha = \dot{\alpha}^2 \sin\alpha$$

$$\cancel{K}\,\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha = 2\cancel{K}(\cos(\alpha_0) - \cos\alpha)\cancel{\sin\alpha}$$

$$3\cos\alpha = 2\cos(\alpha_0) \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3}\cos(\alpha_0)$$




$$P_\phi - O = R\,\hat{j} + x\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_{P_\phi} = \dot{x}\,\hat{i} \qquad \vec{a}_{P_\phi} = \ddot{x}\,\hat{i}$$

PESO $\quad F = mg\left(\hat{i}\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\hat{j}\right)$

Reaz. piano $\quad R_B = R_{Bx}\,\hat{i} + R_{By}\,\hat{j}$

I Eq. card.

$$m\,\vec{a}_{P_0} = \vec{F} + \vec{R}_B$$

$$m\,\ddot{x} = mg\,\text{sen}\,\alpha + R_{B,x}$$

$$0 = -mg\cos\alpha + R_{By}$$

Relazione di non strisciamento

$$x = \theta R + K \quad \text{prendo } K = 0$$

II cardinale

Polo $P_\phi$

$$I_{zz}^{P_\phi} \, \dot{\omega}_z = M_z^{ext}(P_\phi)$$

$$\omega_z = - \dot{\theta}$$

$$M_z^{ext}(P_\phi) = + R_{Bx} R$$

$$I_{zz}^{P_\phi} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r^3 =$$

$$= \frac{2\pi m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{4} R^2$$

Si ottiene

$$- \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \ddot{\theta} = R_{Bx} \cancel{R}$$

$$x = \theta R$$
$$\dot{x} = \dot{\theta} R$$
$$\ddot{x} = \ddot{\theta} R$$

$$\boxed{\ddot{x} = - R_{Bx} \frac{2}{m}}$$

I card. $\quad - 2 R_{Bx} = mg \operatorname{sen}\alpha + R_{Bx}$

$$R_{Bx} = - \frac{mg}{3} \operatorname{sen}\alpha \qquad \boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha}$$