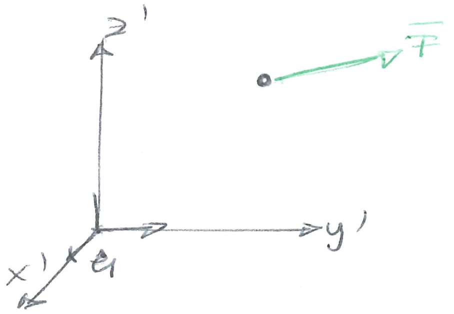
Richiami: II e III legge di Newton

II LEX SECUNDA

Un qualunque punto materiale sottoposto all'azione di una o più forze subisce un'accelerazione proporzionale alla risultante di tali forze

- Forze: concetto elementari, definito dalla procedura sperimentale che ne misura il valore

- Massa: costante di prop. fra acceleraz. e forza che la produce



$$\vec{F}_P = m\,\vec{a}_P \Big|_{\Sigma}$$

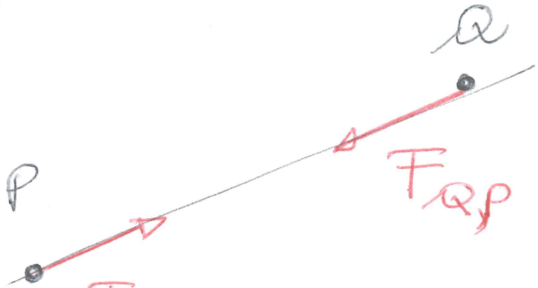
Nota: questa formulazione matematica vale SOLO se l'acceleraz. è misurata da un osservatore INERZIALE (Fermo o in moto rett. uniforme rispetto alle stelle)

$$\vec{a} = \hat{e}_1 \ddot{x}' + \hat{e}_2 \ddot{y}' + \hat{e}_3 \ddot{z}'$$

$$\vec{F} = F_{x'} \hat{e}_1 + F_{y'} \hat{e}_2 + F_{z'} \hat{e}_3$$

III LEX TERTIA

Ad ogni forza esercitata da un punto P su un punto Q diverso da P, corrisponde una forza esercitata da Q su P. Tali forze sono dirette lungo la retta congiungente i 2 punti, hanno uguale intensità e verso opposto.



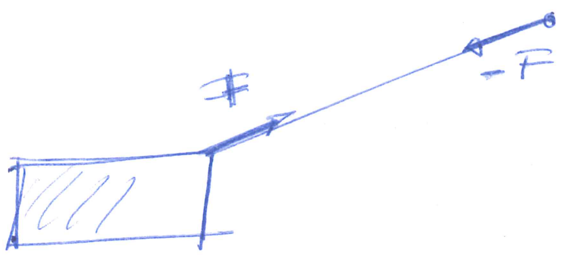
Coppie di forze a braccio nullo

$$F_{P,Q} = -F_{Q,P}$$

$\Downarrow$

esercitata su P da Q

Es



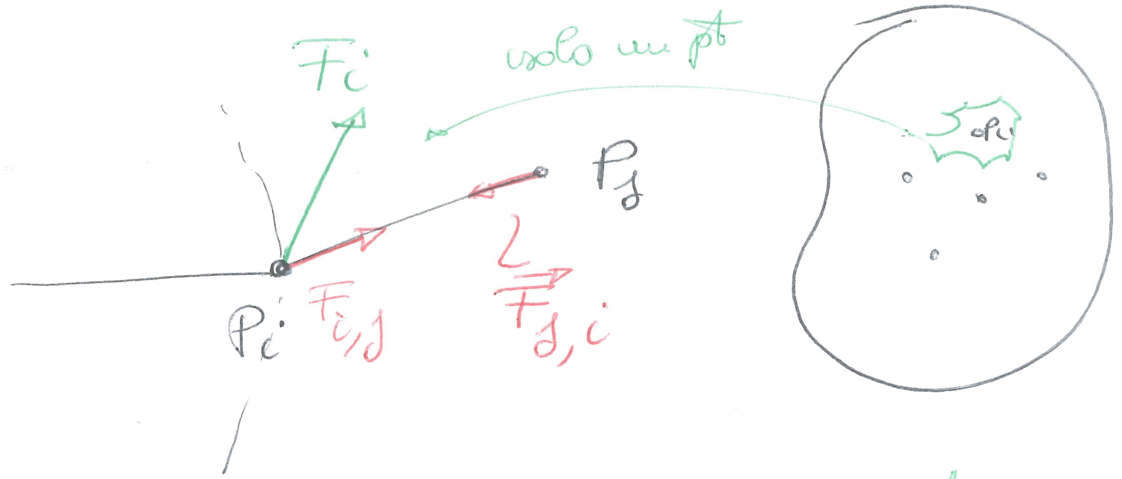
Se sposto un corpo pesante, l'azione della mano è trasmessa dalla corda: la massa esercita una forza F, la mano una forza di Resistenza -F

La Terra "attira" il Sole e ne modifica la posizione

Applicazione ai rigidi

Forze interne di un rigido

Forze trasmesse da un punto all'altro che mantengano i vincoli di rigidità $|P_i - P_j| = K$



$\vec{F_i}$ = risultante delle forze interne applicate ~~ad~~ a P_i

III LEX $\Rightarrow$ $\vec{F}_{i,i} = 0$ $\quad F_{i,j} = -F_{j,i}$

$$\vec{F_i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} \neq 0$$

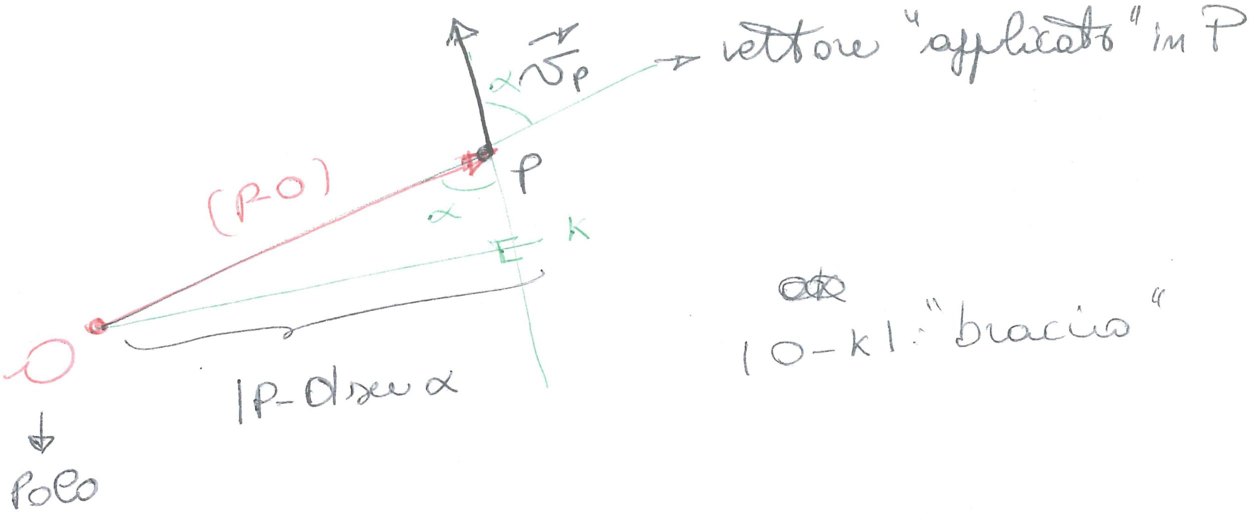
Si ha $\underbrace{\sum \vec{F_i}}_{\text{Risultante di tutte le forze interne}} = \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{*} = 0$

* Sommo gli elementi di una matrice antisimmetrica

$$\begin{array}{c} F_{ij} \\ \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & \dots \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & \dots \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\sum_i F_i^{(int)} = 0}$$

Def: Momento di un vettore rispetto ad un polo



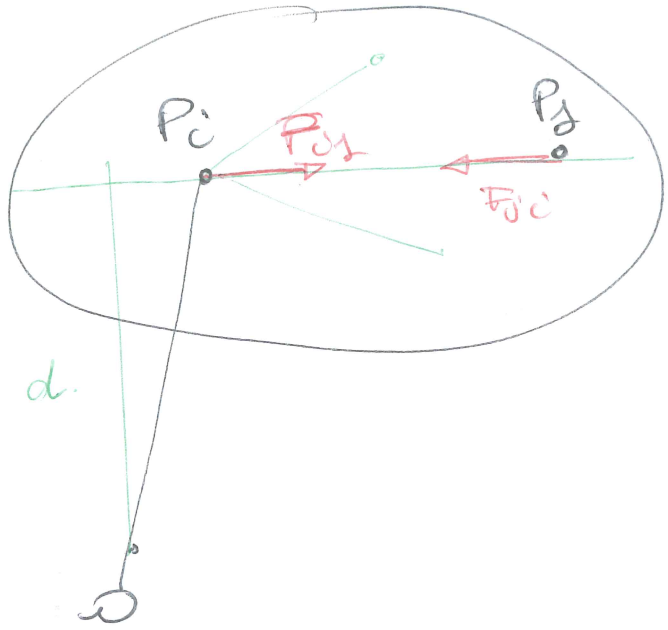
$$\vec{M}(O) \doteq (P-O) \wedge \vec{v}_P$$

è un vettore

$$|\vec{M}(O)| = |P-O|\,|\vec{v}_P|\,\text{sen}\,\alpha$$

α : angolo fra $\vec{v}$ e $(P-O)$

Proprietà del momento risultante delle forze interne di un rigido rispetto ad un polo O



calcolo la quantità

$$\underbrace{(P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(int)}} = (P_i - O) \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{(int)} \neq 0$$

momento prodotto dalla risultante delle forze interne su P_i con polo O

considero la somma di questo momento

$$\sum_i (P_i - O) \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{(int)} = \sum_{i,j \, : \, i \neq j} (P_i - O) \wedge \vec{F}_{i,j}^{(int)}$$

sono a due a due termini del tipo

$$(P_i - O) \wedge \vec{F}_{i,j}^{int} + (P_j - O) \wedge \vec{F}_{j,i}^{(int)} = 0$$

tutte coppie a braccio nullo

$$\sum_i (P_i - O) \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{\,int} = 0$$

Quantità di moto

punto: $\vec{Q}_i \doteq m_i \vec{v}_i$

sistema materiale $\vec{Q} \doteq \sum_i m_i \vec{v}_i$

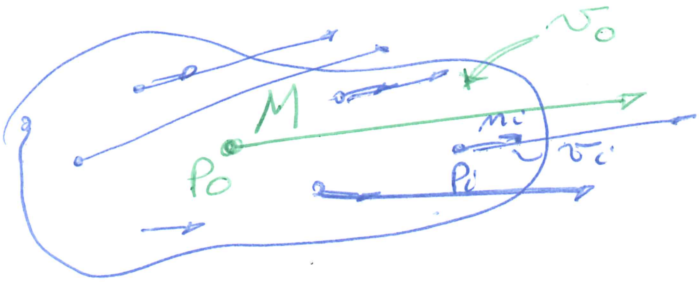
Riprendo la definizione di c.d.m.

$$M(P_0 - O) = \sum_i m_i (P_i - O)$$

Derivo risp. al tempo

$$M \underset{\frac{d}{dt}(P_0-O)}{\underset{\parallel}{\vec{v}_{P_0}}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{Q} \qquad (1)$$

Per il calcolo della quantità di moto di un sistema, posso sostituire l'insieme di punti materiali con 1 unico punto con massa M che si muove come il centro di massa del sistema



Derivo la (1)

$$M \vec{a}_{P_0} = \dot{Q}$$

II. Newt

$$M \vec{a}_{P_0} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i F_i^{(ext)} + \underbrace{\overset{\overset{0}{\parallel}}{F_i^{(int)}}}_{\substack{\text{esercitate} \\ \text{dai pt.} \\ \text{del rigido}}}$$

II Eq. Cardinale della dinamica

$$\boxed{\dot{Q} = \sum_i F_i^{(ext)}}$$

$$\boxed{M \vec{a}_{P_0} = F^{ext}}$$

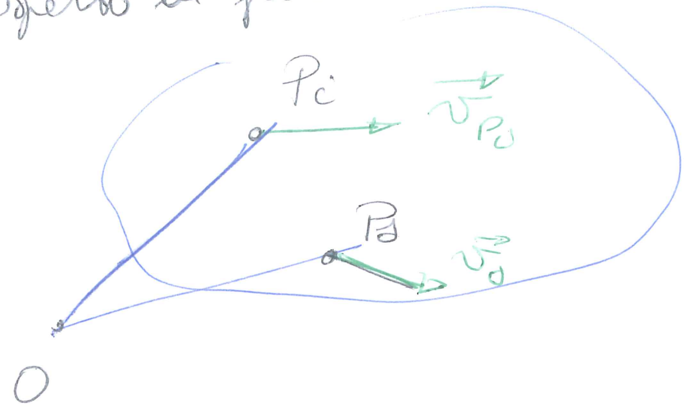
Equazione di moto del centro di massa di un sistema

Il centro di massa si muove come un punto materiale di massa M a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

II Eq. cardinale della dinamica

Def: Momento angolare della quantità di moto

di P_i rispetto al polo O



$$\vec{K}_i(O) = (P_i - O) \wedge \underbrace{m_i \vec{v}_{P_i}}_{Q_i}$$

$$\vec{K}(O) = \sum_i K_i(O) = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_{P_i}$$

calcoliamo la deriv. risp. al tempo

$$\dot{\vec{K}}(O) = \sum_i (\vec{v}_{P_i} - \vec{v}_O) \wedge \underbrace{m_i \vec{v}_{P_i}}_{Q_i} +$$

$$\sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_{P_i}$$

$\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = 0$; $m_i \vec{a}_{P_i} = F_i^{(ext)} + F_i^{(int)}$

$$\dot{\vec{K}}(O) = -\sum_i \vec{v}_O \wedge \vec{Q}_i +$$

$$\sum_i (P_i - O) \wedge F_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_i (P_i - O) \wedge F_i^{(int)}}_{=0}$$

$$\mathring{\vec{K}}(O) = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \underbrace{\sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(ext)}}$$

Momento risultante delle forze esterne $\equiv \vec{M}^{(ext)}(O)$

ottengo

$$\boxed{\mathring{\vec{K}}(O) + \vec{v}_O \wedge \underset{\substack{\downarrow \\ M\vec{v}_{P_0}}}{\vec{Q}} = \vec{M}^{(ext)}(O)}$$

II Eq. cardinale della dinamica

Casi particolari

1. punto O fisso $\Rightarrow \vec{v}_O = 0$
2. punto O coincide con c.d.m $\Rightarrow \vec{v}_O \wedge \vec{Q} =$
$\vec{v}_{P_0} \wedge M\vec{v}_{P_0} = 0$
3. $\vec{v}_O \parallel \vec{Q} \Rightarrow \vec{v}_O \wedge \vec{Q} = 0$

In questi casi la II eq. card. si semplifica

$$\mathring{\vec{K}}(O) = \vec{M}^{(ext)}(O)$$

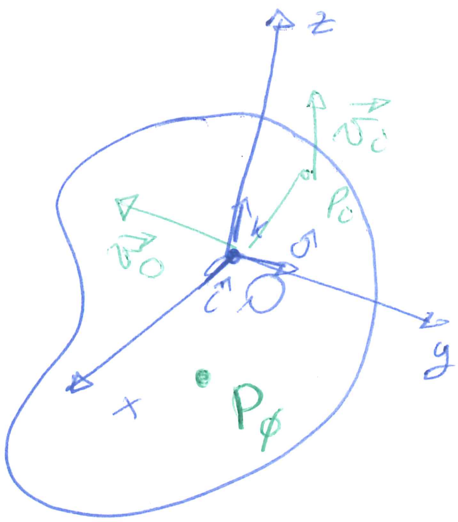
La II Eq. cardinale ~~s~~tabilisce

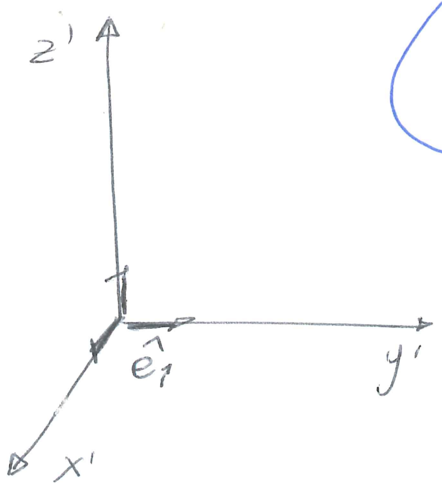
$$\overset{\circ}{\vec{K}}(O) = -\vec{v}_0 \wedge \vec{Q} + \vec{M}^{(ext)}(O)$$

dove $\vec{K}(O) = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$

Come determino $\vec{K}$? CASO DEL RIGIDO

Abbiamo stabilito che un buon metodo per determinare il moto del rigido è seguire la dinamica del sistema solidale S. In particolare, ~~x~~ l'origine O di S partecipa al moto del rigido e fornisce una scelta particolarmente conveniente ~~per~~ come polo per $\vec{K}$.





Ricordiamo la formula fondamentale del moto di rigidi

$$\vec{v}_i\Big|_{\Sigma} = \cancel{\vec{v}_i\Big|_{S}}^{\,0} + \vec{v}_0\Big|_{\Sigma} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

Dalla definizione si ha

$$\vec{K}(O) = \sum_i m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i\Big|_{\Sigma} =$$

$$= \sum_i m_i (P_i - O) \wedge \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right)$$

$$= \boxed{\sum_i m_i (P_i - O)} \wedge \vec{v}_0 + \sum_i m_i (P_i - O) \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right]$$

Dalla def di c.d.m. $m (P_\phi - O) = \boxed{\sum m_i (P_i - O)}$

$$\vec{K}(O) = m (P_\phi - O) \wedge \vec{v}_0 + \sum m_i (P_i - O) \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right]$$

Consideriamo

$$(P_i - O) \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right]$$

$$\vec{a} \wedge \left[\vec{b} \wedge \vec{c} \right] = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

con $\vec{a} = P_i - O = \vec{c}$

$\vec{b} = \vec{\omega}$

$$\vec{K}(O) = m(P_\phi - O) \wedge \vec{v}_O +$$

$$\sum_i m_i \Big[\underbrace{|P_i - O|^2 \vec{\omega}}_{1} - \underbrace{((P_i - O) \cdot \vec{\omega})(P_i - O)}_{2} \Big]$$

Scriviamo l'espressione precedente rispetto al

SISTEMA SOLIDALE

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \doteq \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$(P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \doteq \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

1 $\Rightarrow$ $|P_i - O|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$

$$|P_i - O|^2 \vec{\omega} = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k})$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ \omega_y (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ \omega_z (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \end{pmatrix}$$

$$② \Rightarrow (P_i - O)\cdot\vec{\omega} = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

$$-[(P_i - O)\cdot\vec{\omega}](P_i - O) = \begin{pmatrix} -[(P_i-O)\cdot\vec{\omega}]\, x_i \\ -[(P_i-O)\cdot\vec{\omega}]\, y_i \\ -[(P_i-O)\cdot\vec{\omega}]\, z_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_i^2\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -y_i x_i \omega_x - y_i^2 \omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -z_i x_i \omega_x - y_i z_i \omega_y - z_i^2 \omega_z \end{pmatrix}$$

$$① + ② = \sum_i m_i \begin{pmatrix} \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -y_i x_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -z_i x_i \omega_x - y_i z_i \omega_y \ (x_i^2 + y_i^2)\omega_z \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i z_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Definendo

$$\left.\begin{array}{l} I_{xx} = \sum_i m_i (y_i + z_i^2) \\ I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{array}\right\} \text{MOM. di inerzia assiali}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \\ I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \\ I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i \end{array}\right\} \text{Momento centrifughi}$$

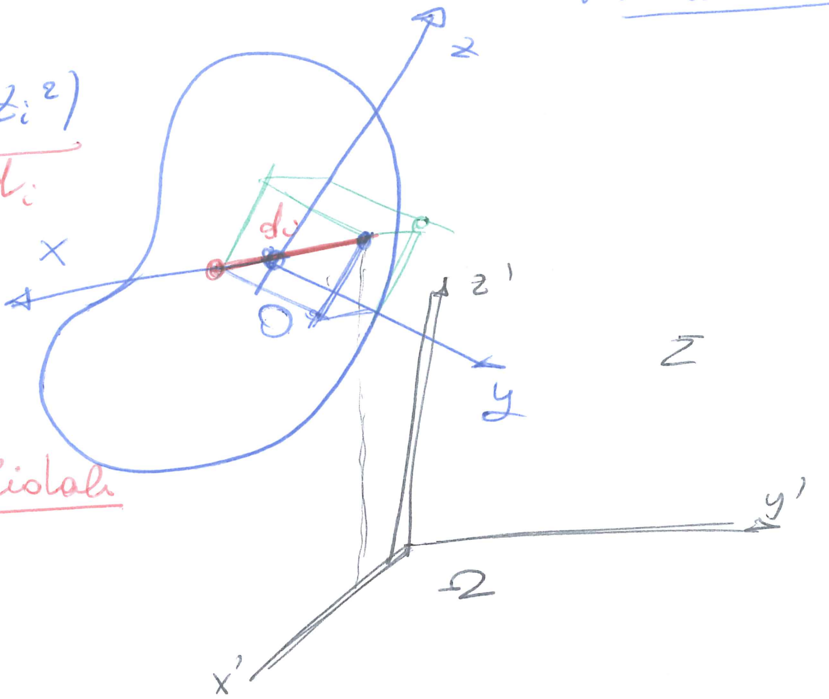
$$① + ② = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice d'inerzia del rigido}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Matrice d'inerzia del rigido $\underline{\underline{\sigma}}(O)\big|_S$

si riferisce al sistema solidale

$$I_{xx} = \sum_i m_i \underbrace{(y_i^2 + z_i^2)}_{d_i}$$

distanza del punto rispetto all'asse x del solidale



In conclusione

$$\vec{K}(O) = m\,(P_\emptyset - O) \wedge \vec{v}_O + \underline{\underline{\sigma}}(O)\big|_S\, \vec{\omega}\big|_S$$

Consideriamo sempre i casi particolari

$$O \equiv P_\emptyset \quad \text{oppure} \quad \vec{v}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K}(O) = \underline{\underline{\sigma}}(O)\big|_S\, \vec{\omega}\big|_S$$

avrà una forma del tipo $\vec{K} = \underbrace{K_x \hat{i} + K_y \hat{j} + K_z \hat{k}}_{\text{rispetto a } S\,!}$

Torno alla II Eq. cardinale per $O \equiv P_\phi$ o $\vec{v}_O = 0$

$$\left.\overset{\circ}{K}\right|_{\Sigma} = M^{ext}(O)$$

la II cardinale è scritta x un osservatore fisso

Ricordo

$$\left.\frac{d\vec{K}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{K}}{dt}\right|_{S} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}(O)$$

$$\left.\frac{d\vec{K}^{O}}{dt}\right|_{S} = \left.\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{\sigma}}(O) \cdot \vec{\omega}\right)\right|_{S} = \underline{\underline{\sigma}}(O)\,\overset{\circ}{\vec{\omega}}$$

↓

la mat. d'inerzia è costante in S

$$\overset{\circ}{\vec{\omega}} = \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{S}$$

si ottiene la II Eq. Cardinale in una forma utile per il calcolo

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(O)\,\overset{\circ}{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \left(\underline{\underline{\sigma}}(O) \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{M}^{ext}(O)}$$

con $\vec{v}_O = 0$ oppure $O \equiv P_\phi$

Eq. diff. per l'incognita $\vec{\omega}$