## Grado di libertà

- Un punto = 3 coordinate che servono per individuarlo

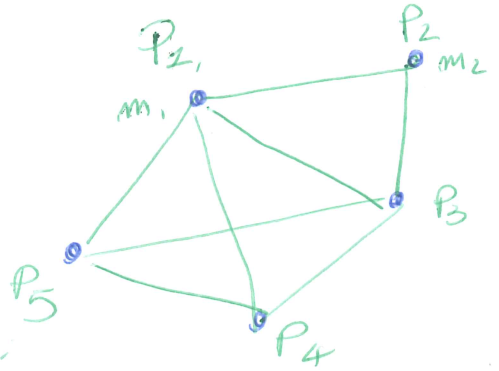
- Più in generale x un sistema meccanico qualunque il n. di gradi di libertà è il n. di parametri che è necessario specificare per individuare una generica configurazione

## Rigido x Solido

↳ Sistema materiale di massa $m$ i cui punti mantengono invariata la loro distanza reciproca.

Per semplicità consideriamo strutture di tipo reticolare di punti materiali in cui è concentrata la massa uniti da aste inestensibili di massa trascurabile

Rigido:



massa totale $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

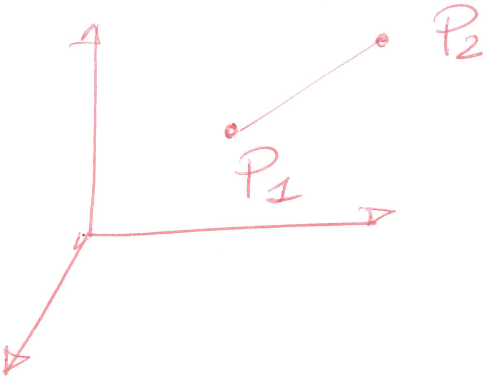
Condizione di rigidità

$$|P_i - P_j| = \text{costante} \quad \forall\, i,j = 1 \dots n$$

Calcolo dei g.d.l. di un rigido

- 1 pt. ⇒ 3 coord ⇒ 3 g.d.l.

- 2 pt




aggiungo 3 coord. ma devo imporre il vincolo

$$\boxed{|P_1 - P_2| = d_{12}}$$

vincolo

assegnato ⇒ $P_2$ sta sulla sup. di una sfera di centro $P_1$ raggio $d_{12}$

Bastano 2 coord. addizionali (ex 2 angoli)

Conteggio g.d.l. ⇒ $\boxed{\underbrace{3}_{P_1} + \underbrace{3}_{P_2} - \underbrace{1}_{\text{vincolo}} = 5}$

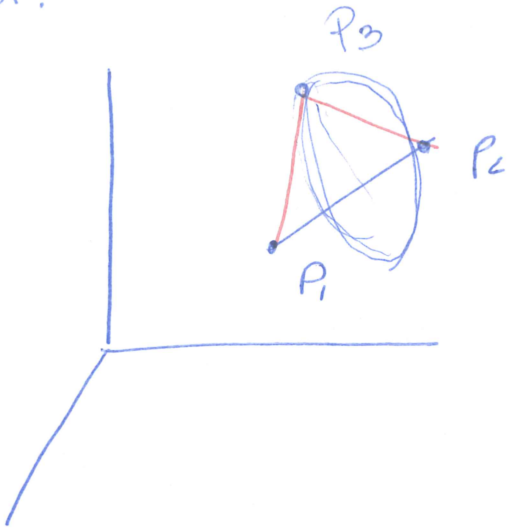
Il vincolo impone 1 cond. da risp. ⇒ toglie 1 grado di libertà

Da 1 pdv vista matematico

$$f(x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2}) = 0 \xRightarrow{\text{t. f. impl.}} \text{posso esprimere (esplicitare)}$$

ex $\underbrace{z_{P_2}}_{\text{dip.}} = h(\underbrace{x_{P_2}, y_{P_2}}_{\text{indipend.}})$

3 pt.

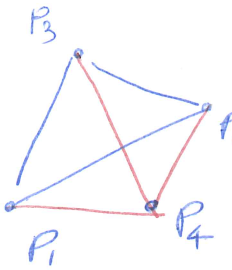



aggiungo 3 gdl + impongo 2 vincoli $|P_3-P_2|$ e $|P_3-P_1|$

Fissato $P_1$ $P_2$, $P_3$ può solo ruotare attorno all'asse $P_1P_2$

$$\text{gdl} = \underbrace{5}_{2pt} + 3 - 2 = 6 \text{ gdl}$$

4 ... n pt ⇒



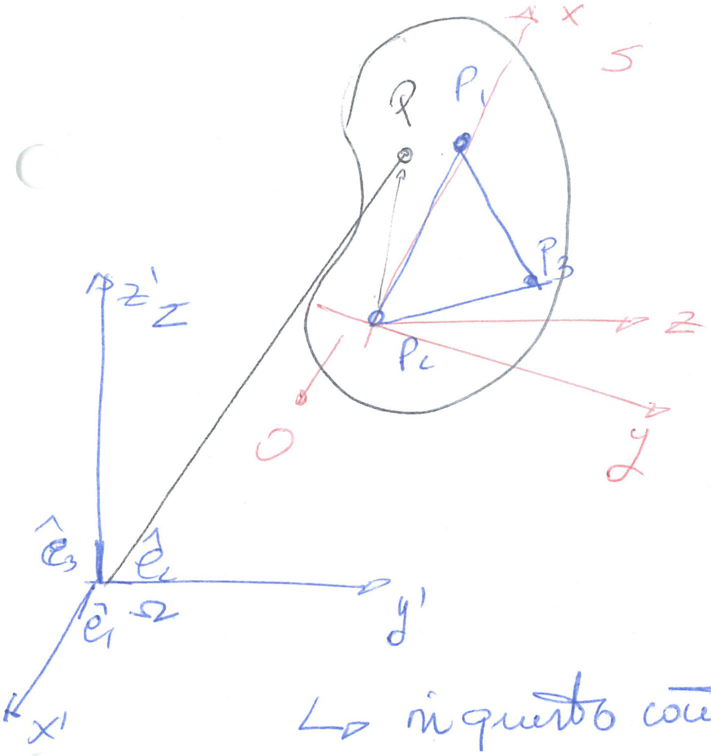

3 nuovi gdl + 3 vincoli

⇒ gdl rimangono invariati a 6

# Osservatore solidale

Nel suo complesso un rigido è quindi indiv. da 6 parametri che ne fissano le coordinate, in pratica è suff. seguire 3 pt. rappresent. del rigido x conoscere le coord. di tutti gli altri. 3 punti individuano anche una terna

Tale terna "attaccata" a $P_1, P_2, P_3$ vede tutti i pt. del rigido immobili: Terna Solidale




↳ in questo contesto questa è la "Terna fissa"

Richiamo la formula x il cambio di sist. di rif.

$$v(P)\Big|_{\Sigma} = v(O)\Big|_{\Sigma} + v(P)\Big|_{S} + \vec{\omega} \wedge (P-O)$$

applichiamola per P generico punto del rigido

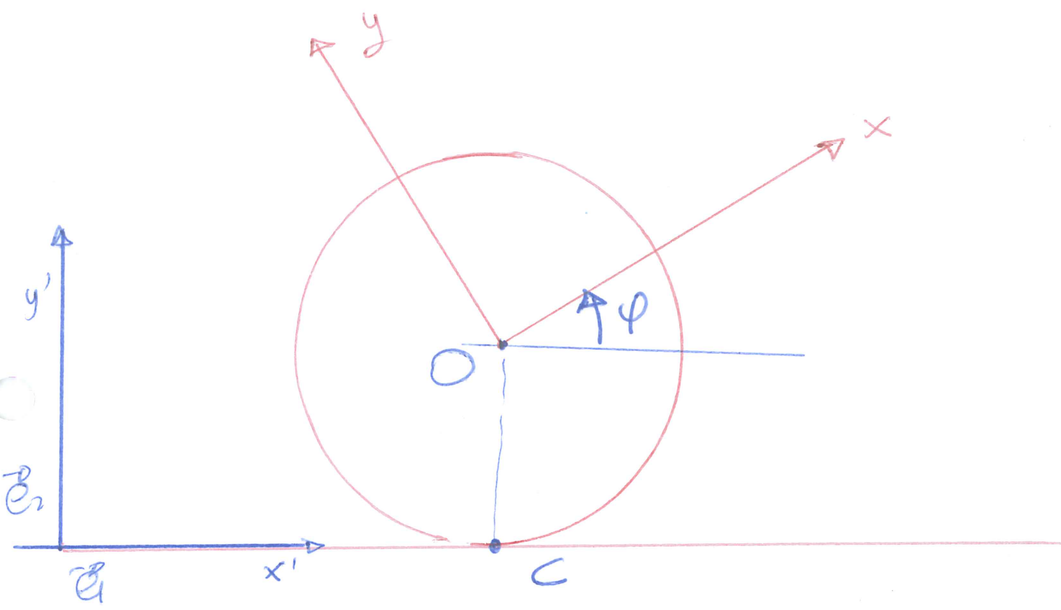
$v_P\Big|_{S} = 0$ per def. di solidale

$$\boxed{v_P = v_O + \omega \wedge (P-O)}$$

Formula fondamentale del moto dei rigidi

Caso di studio: disco che striscia su piano orizzontale

Rotolamento puro




So che $v_C = 0$

$v_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$

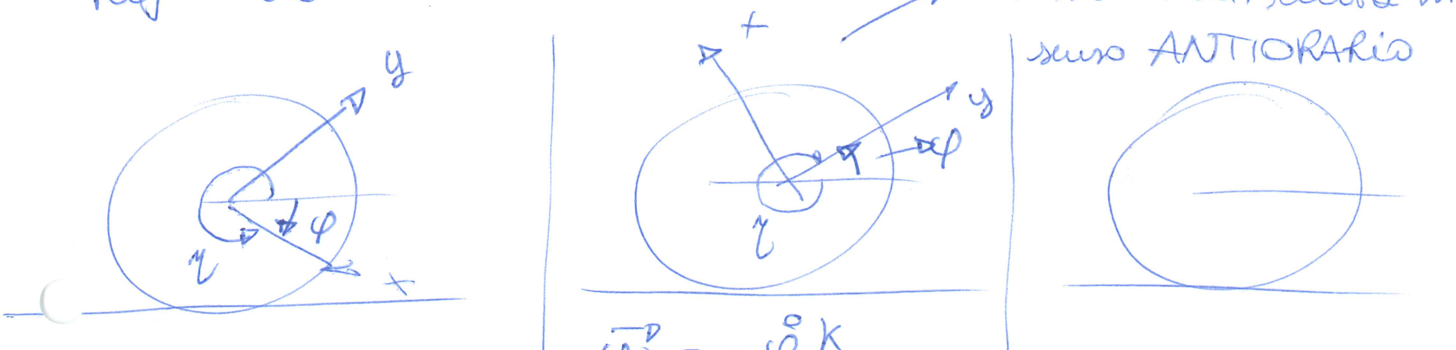
Trovo $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$ ricorda $\omega_z = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$

$\downarrow$

segno


Riflettere

qui, quando $\varphi$ CRESCE il sist. solid. ruota in senso ANTIORARIO




$\vec{\omega} = +\dot{\eta}\,k$

$= -\dot{\varphi}\,\hat{k}$

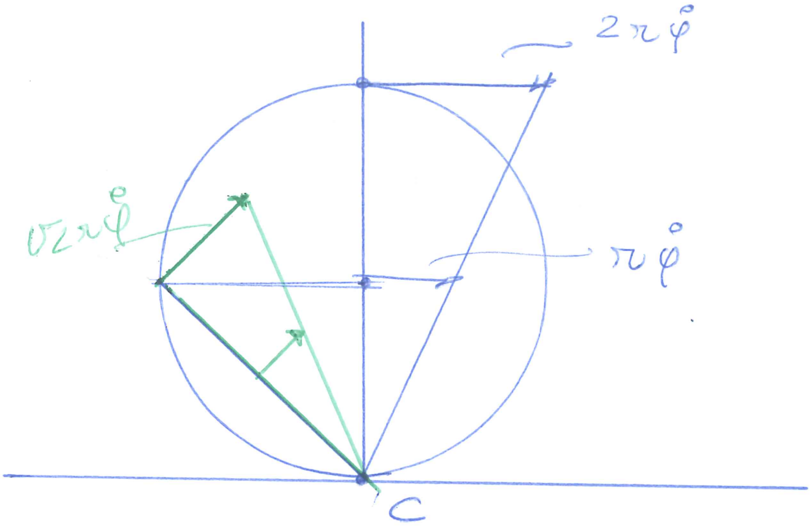
$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,k$

$= +\dot{\eta}\,\hat{k}$

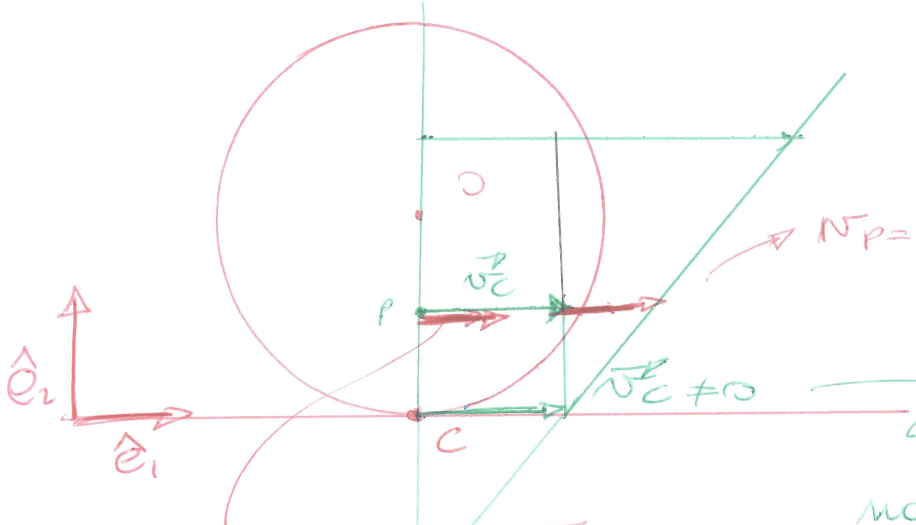
$$\vec{v}_P = \dot{\varphi}\ \hat{k} \wedge (P-C)$$

$|\vec{v}_P| = \dot{\varphi}\ |P-C|$ la velocità cresce LINEARMENTE con la distanza da C

$\vec{v}_P$ è $\perp$ alla congiungente $(P-C)$



Caso con slittamento




$v_P = v_C + \underbrace{\dot\varphi |P-C| \hat e_1}_{\omega \wedge (P-C)}$

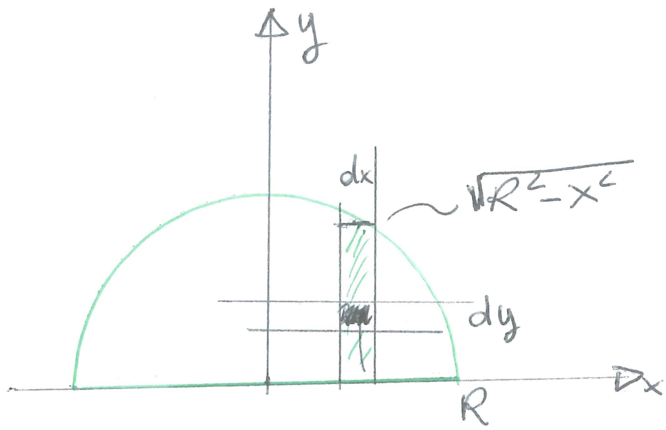
$\boxed{\hat\omega \wedge (P-C) = \dot\varphi |P-C| \hat e_1}$

se la ruota non si stacca dal terreno $\vec v_C$ è orizzontale

includendo un "punto di rotolamento puro" con $\vec v = 0$

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

Integro in coordinate cartesiane



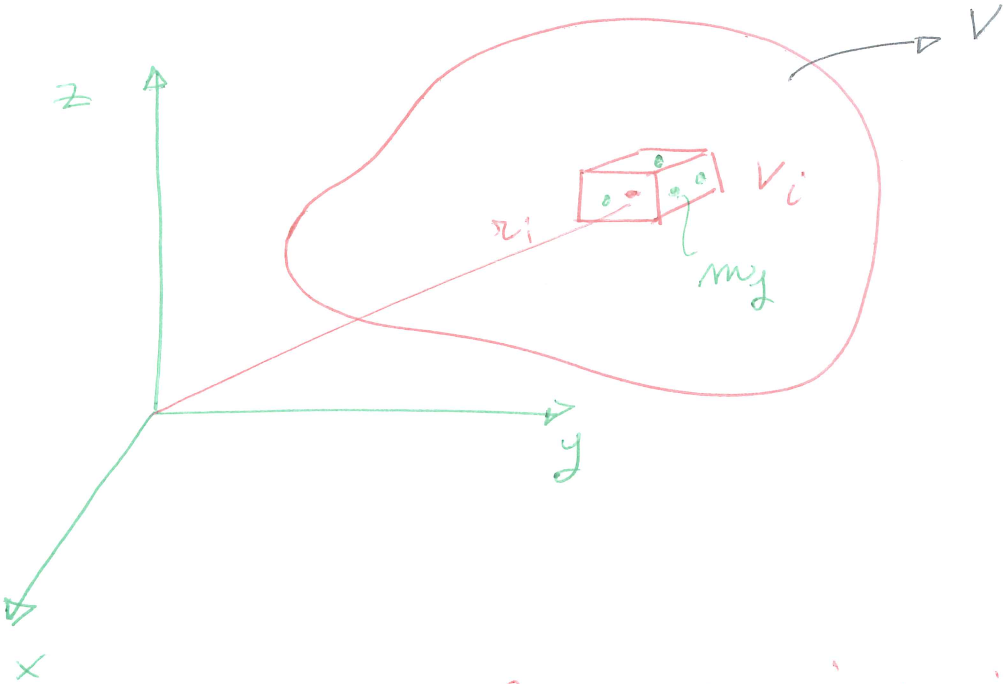

$$y_0 = \frac{\rho}{M}\int_C y\, \underset{\substack{\parallel \\ dx\,dy}}{dA} = \frac{\rho}{M}\underbrace{\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\, dx\, dy}$$

Integro strisce verticali

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} dx\, \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(R^2\cdot 2R - \underbrace{\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}}_{-\frac{2}{3}R^3}\right) = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

Limite al continuo di un rigido, definizione di densità di massa




solido $V_i$ con volume $\Delta_i$ in posizione $R_i$

$\Delta M_i$ = porzione di massa contenuta in $V_i$

$$M = \sum_i \Delta M_i = \sum_i \sum_{j: r_j \in V_i} m_j \frac{\Delta_i}{\Delta_i}$$

massa totale

$$= \sum_i \Delta_i \underbrace{\sum_{j: r_j \in V_i} \frac{m_j}{\Delta_i}}$$

$\Delta_i \to 0$

volume della cellette $\to 0$

$\rho(r_i)$ è funzione continua

$$\overset{\Delta_i \ll 1}{\simeq} \sum_i \Delta_i \rho(r_i) \xrightarrow{\Delta_i \to 0} \int_V \underbrace{\rho(r)\, dr}_{dm}$$

massettina attorno a $r$

Densità uniforme

$$M = \int_V \rho(r)\,dr = \rho \int_V dr = \rho V$$

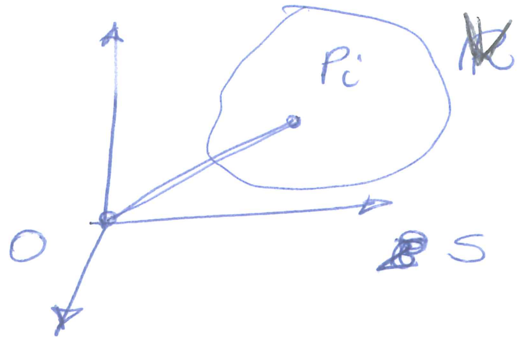
$$\Rightarrow \rho = \frac{M}{V}$$

NOTA : $V$ in 3D volume

2D superficie

1D curva

CENTRO DI Massa di un Sistema (Rigido)




$$\vec{r}_i = P_i - O$$

$$\overbrace{P_0 - O}^{\vec{r}_0} = \frac{\Sigma\, m_i (P_i - O)}{\Sigma\, m_i} =$$

↓

$P_0$ coord c.d.m.

$$\vec{r}_0 = \frac{\Sigma\, m_i \vec{r}_i}{M}$$

integrale di vettori

continuo

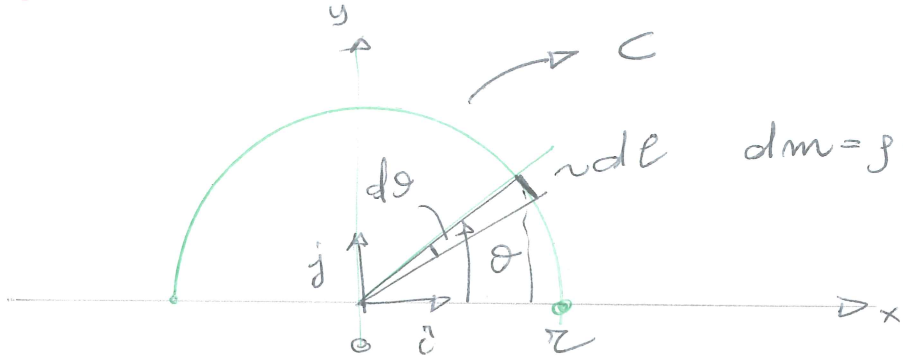
$$\vec{r}_0 = \frac{\boxed{\int_V \vec{r}\, \rho(r)\, dV}}{\int \rho(r)\, dV} = \vec{r}_0 = \frac{\int_V \vec{r}\, \rho\, dV}{M}$$

Int. singolo, doppio, triplo

compon.

$$x_0 = \frac{\int x\, \rho\, dV}{M} \quad \ldots$$

Centro di massa di un ~~[illegible]~~ segmento circolare a densità uniforme




$dm = \rho\, dl$

$$M = \int_C dm = \int_C \rho\, dl \qquad dl = r\, d\theta$$

$$M = \rho \int_0^{\pi} r\, d\theta = r \rho \pi \Rightarrow \rho = \frac{M}{r\pi}$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}$$

c d m

$$\vec{r}_0 = \int_C \rho\, \vec{r}\, dl$$

$\hat{i}\cdot$ $\qquad x_0 = \int_C \rho\, x\, dl$

$\hat{j}\cdot$ $\qquad y_0 = \int_C \rho\, y\, dl$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

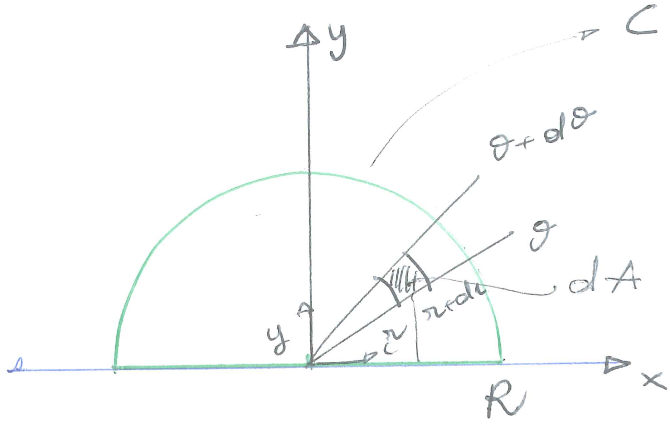
$$x_0 = \frac{\rho}{M} \int_0^{\pi} \underset{\underset{r\cos\theta}{\parallel}}{x(\theta)}\, r\, d\theta = \frac{\rho r^2}{M} \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta =$$

$$\frac{\rho r^2}{M} (+) \sin\theta \Big|_0^{\pi} = 0$$

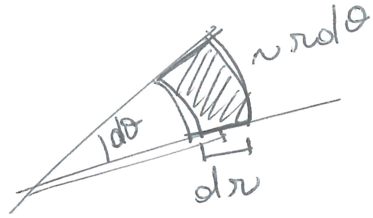
$$y_0 = \frac{\rho}{M} \int_0^{\pi} \underset{\underset{r\sin\theta}{\parallel}}{y(\theta)}\, r\, d\theta = \frac{\rho}{M} r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho r^2}{M} (-)\cos\theta \Big|_0^{\pi} = 2\rho r^2 = \frac{2}{\pi} r$$

# LAMINA Semicircolare




Integ. in coord polari




$$M = \int_C \underbrace{\rho\, dA}_{dm} \qquad dA = dr \cdot r\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^\pi r\, dr\, d\theta = \rho \pi \int_0^R r\, dr =$$

$$= \rho \pi \frac{R^2}{2}$$

$$\rho = \frac{M\,2}{\pi R^2}$$

$$M \vec{r}_0 = \int_C \vec{r} \rho\, dA \xrightarrow{\cdot \hat{i}} M x_0 = \int_C \overset{\vec{r}\cdot\hat{i}}{x} \rho\, dA = 0$$

$$\vec{r}_0 \cdot \hat{j} = y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho\, dA = \frac{1}{M} \rho \int_0^R \int_0^\pi r \operatorname{sen}\theta \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta = \frac{\rho}{M} \left( \frac{R^3}{3} \right) \underbrace{\left( -\cos\theta \Big|_0^\pi \right)}_{2} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$

$$z_B = \frac{6}{a^3}\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \; \frac{(a-x-y)^2}{2}$$

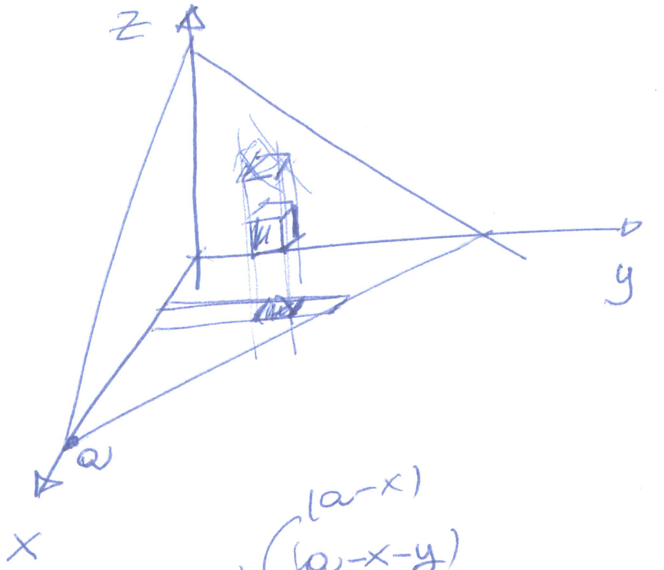
$$y' = y + x - a$$

$$= \frac{6}{a^3}\int_0^a dx \int_{x-a}^0 \frac{y'^2}{2} = \frac{\cancel{6}}{a^3}\int_0^a dx\,(-)\frac{(x-a)^3}{\cancel{6}}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^a (a-x)^3 = \frac{1}{a^3}\int_{-a}^0 (-)\,x^3\,dx =$$

$$x' = x - a$$

$$= \frac{1}{a^3}\,\frac{a^4}{4} = \frac{a}{4}$$




$$x+y+z=a$$

$$M=\rho\int_0^a\int_0^{(a-x)}\int_0^{(a-x-y)} dx\,dy\,dz=\rho\int_0^a dx\int_0^{a-x}(a-x-y)\,dy$$

$$=\rho\int_0^a dx\left(ay-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{a-x}=$$

$$=\rho\int_0^a dx\,\underbrace{\left[a(a-x)-x(a-x)-\frac{(a-x)^2}{2}\right]}_{\frac{(a-x)^2}{2}}$$

$(a-x)(a-x)$

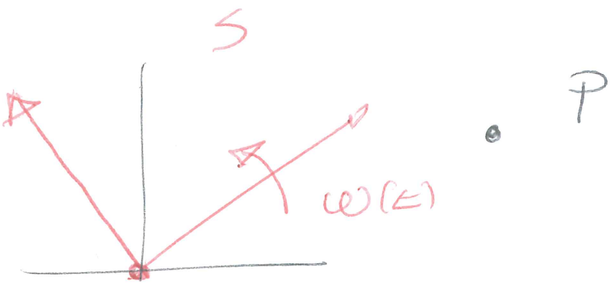
$$=\rho\int_0^a\frac{(a-x)^2}{2}dx=\rho\int_{-a}^0\frac{x'^2}{2}dx=\rho\frac{x^3}{6}\Big|_{-a}^0$$

$x'=x-a$

$$=\rho\frac{a^3}{6}$$

$$\vec{r}_{P0}=\frac{6}{a^3}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{a-x-y}dz\,(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

controesempio: Osservatore che ruota attorno ad un asse ed osserva un pt. fermo (nessuna forza applicata)




$$a_P\big|_S \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_P = R\cos(\omega t) \\ y_P = R\sin(\omega t) \end{cases}$$