MECCANICA RAZIONALE

Disciplina che nasce in ambito matematico che si propone di introdurre metodologie logico-deduttive rigorose proprie della matematica nello studio della dinamica dei corpi.

Un corpo fisico viene modellato con vari gradi di precisione:

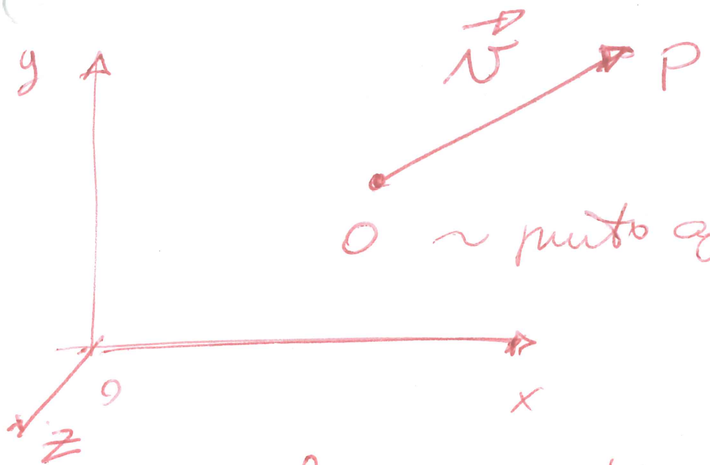
- Punto materiale
- Rigido
- Corpo complesso (Robot): insieme di rigidi fra loro connessi attraverso meccanismi che ne limitano parzialmente il moto (vincoli)

In Meccanica Razionale si pone l'attenzione sul modello matematico che descrive il corpo o l'insieme di corpi in movimento

Vettori: freccia orientata

Notazioni

LIBERI o APPLICATI?
+ secondo che sia il p. applicaz.
ma mi interessa lo posso "spostare dove voglio" parallelamente a se stesso



O ~ punto applicazione

Punti ~~del piano~~ indiv. da coordinate

$$P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix}$$

testa

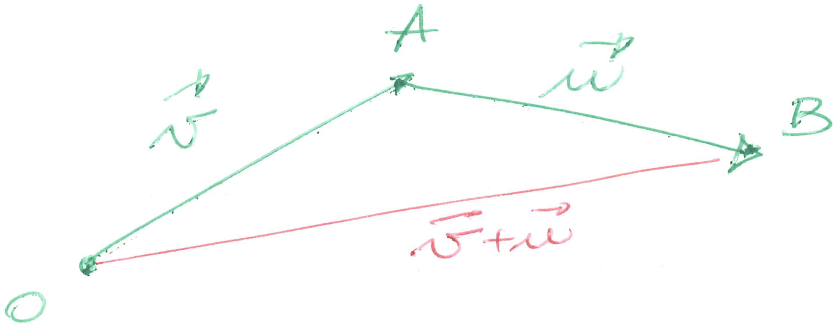
più in generale x_i $i = 1 \ldots n$

↳ i-esima coordinata

→ pt applic.

vettori $\vec{v} \equiv (P - O)$

Utilità della notazione



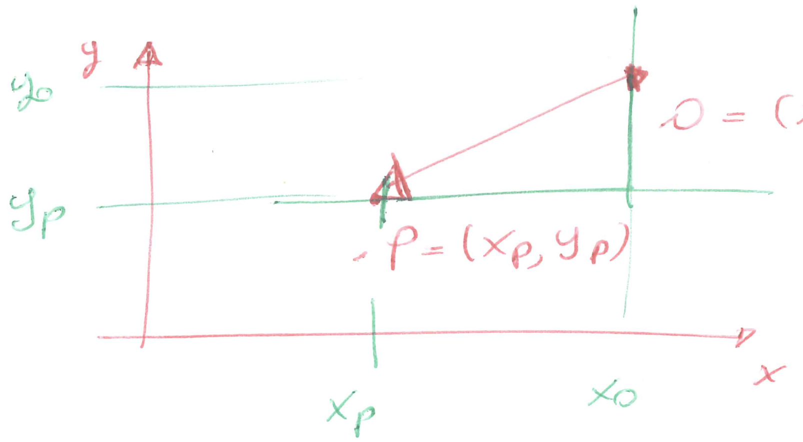
$\vec{v} = A - O \qquad \vec{u} = B - A$

$$\Rightarrow \vec{v} + \vec{u} = (\cancel{A} - O) + (B - \cancel{A}) = B - O$$

Somma secondo la regola del parallelogramma

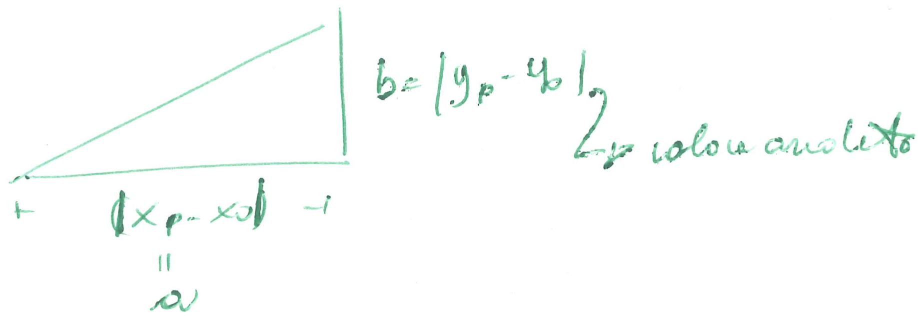
Modulo di un vettore

$|\vec{v}| \equiv |P-O|$ lunghezza del segmento $\overline{P-O}$

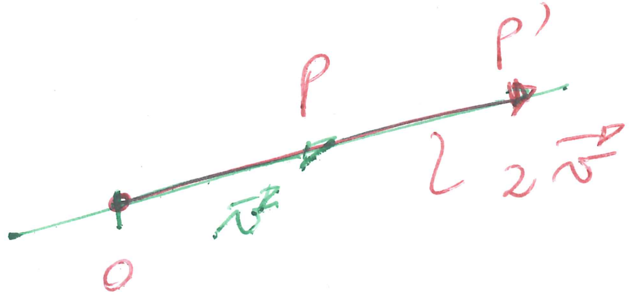


$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_p-x_o)^2+(y_p-y_o)^2} \longrightarrow$$ in generale $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{i,p}-x_{i,o})^2}$

$+(z_p-z_o)^2$ in $\mathbb{R}^3$



Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha\cdot\vec{v}$ è un vettore allineato a $\vec{v}$ con modulo $\alpha|\vec{v}|$



Versore: vettore con modulo unitario

$\hat{v}$: $|\hat{v}| = 1$ rispetto a prefissate unità di misura

$\vec{v} \to \hat{v}$? $\Rightarrow$ $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|v|}$

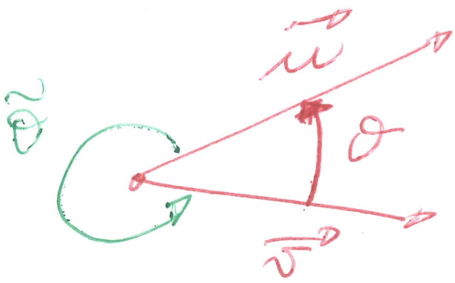
$v = 3{,}5\,\hat{v}$

metri, cm, Kg, N, ...

La Forza = ~~...~~ 9 8 m/s²
                         |||
                         N

Operazioni fondam. fra vettori

Prodotto scalare : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta_{u,v}$



~~NOTA ...~~
NOTA $0 \leq \theta < \pi$
se prendo $\tilde{\theta}$
$\cos(\tilde{\theta}) = \cos(2\pi - \theta)$
$= \cos(\theta)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

per componenti

$u \cdot v = x_u x_v + y_u y_v$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_{i,u}\, x_{i,v}$

Vettori e spazi vettoriali

$\vec{v}$ oggetto fondam. in M.R. : Agricoltura posizione di 1 pt nello spazio

V spa. v. $\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

In uno spazio a dim. finita

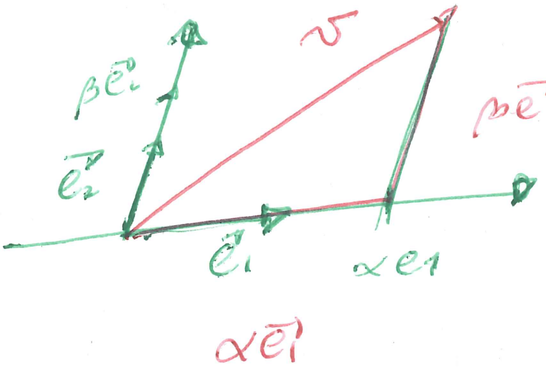
$\vec{v} = \Sigma\, v_i\, \vec{e}_i$ $\rightarrow$ n v. lin. indip.

$\exists$ un'unica rapp. di v su cui UNICA ennupla di vettori $\vec{e}_i$

$\downarrow$

coeff. di sviluppo (coord. di $\vec{v}$ su base $\vec{e}_i$

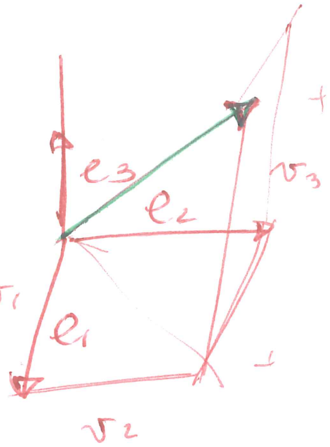
Es. $\vec{v} = \alpha\, \vec{e}_1 + \beta\, \vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$



Somma con regola del parallelogramma

caso speciale: base di versori ortonormale

$$\vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \ldots$$

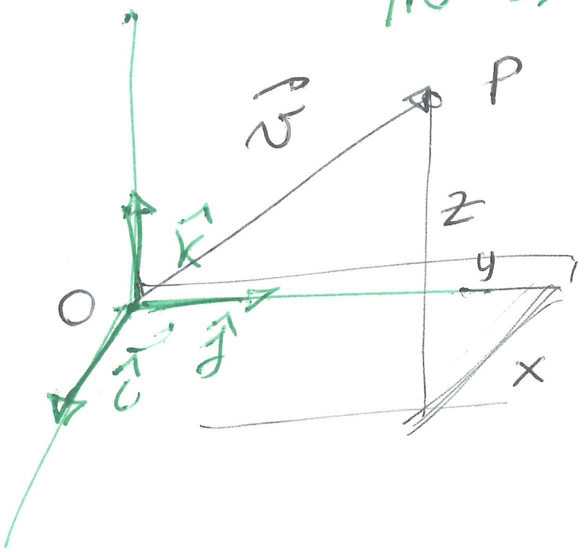


~~eccc~~ $|\hat{e}_i| = 1$

$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \quad i \neq j$

caso tipico $\vec{v}$ ($P-O$) rappresenta la coordinata del punto materiale P letta in un sistema di rif. cartesiano prefissato

$\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ base è una terna di mano destra



$$(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ e_3) \equiv (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$$

$$(P-O) = \vec{v} = \underbrace{v_1}_{=x} \hat{e}_1 + \underbrace{v_2}_{=y} \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

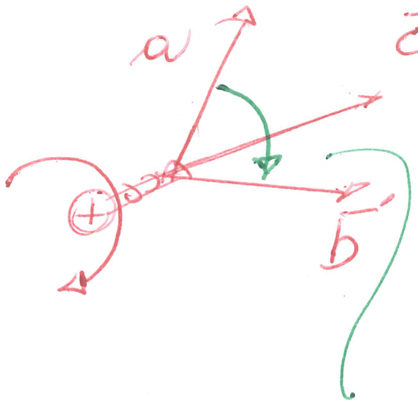
Prodotto vettoriale ($\mathbb{R}^3$) dato $a, b \in \mathbb{R}^3$

associo $\bar c \in \mathbb{R}^3$

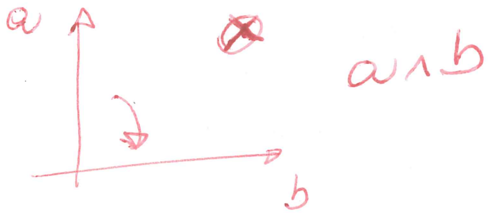
$$\bar a \wedge \bar b = \bar c$$

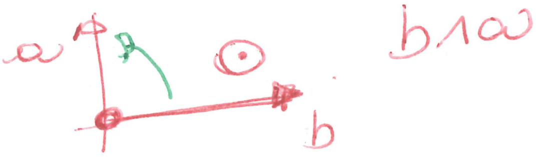
t.c. $|\vec c| = |\vec a||b| \sin\theta_{ab}$

Diretto come la normale uscente dal piano individ. da $\vec a$ e $\vec b$ | verso positivo secondo vite destrorsa $\Rightarrow$ ruoto il primo vettore verso il secondo



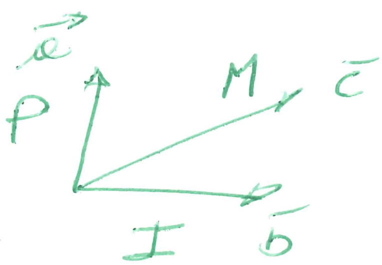
avvito in senso orario





angolo $0 \le \theta < \pi$

(a, b, c) formano anche una terna di mano dx



Prod. vett. è antisimmetrico

$\vec a \wedge \vec b = \vec c$ $\qquad \vec b \wedge \vec a = -\bar c$

$(b \wedge a) = -(a \wedge b)$

* Prop. della Bilinearità vedi dopo

Proprietà generali Bilinearità

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

e simili

in R^2 $\quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1 \vec{e}_1) \wedge (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)$$

$$= u_1 [\vec{e}_1 \wedge (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)]$$

$$= u_1 [v_1 \cancel{(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1)}^{0} + v_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$$

$$= u_1 v_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

Prod. vett.

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \wedge \hat{i}$$

$$\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

Considero 2 vettori generici

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{w} = w_x \hat{i} + w_j \hat{j} + w_z \hat{k}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_x \hat{i} + v_j \hat{j} + v_z \hat{k}) \wedge (w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k})$$

$$= v_x w_x \underbrace{(i \wedge i)}_{0} + \boxed{v_x w_y (i \wedge j)} + v_x w_z \overbrace{(i \wedge k)}^{-\hat{j}}$$

$$+ \boxed{v_j w_x (\hat{j} \wedge \hat{i})} + v_y w_y \underbrace{(\hat{j} \wedge \hat{j})}_{0} + v_y w_z \; \hat{j} \wedge \hat{k} +$$

$$v_z \, w_x \; \hat{k} \wedge \hat{i} + v_z w_y \; \hat{k} \wedge \hat{j} + v_z w_z (\cancel{\hat{k} \wedge \hat{k}}) =$$

$$= (v_x w_y - v_y w_x) \underbrace{(i \wedge j)}_{\hat{k}} +$$

$$(v_x w_z + v_z w_x) \hat{j}$$

$$(v_y w_z - v_z w_y) \hat{i}$$

Regola mnemonica

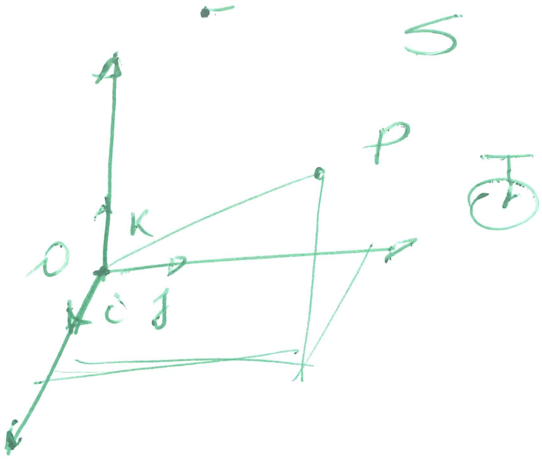
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}\,(v_y u_z - v_z u_y) - \hat{j}\,(v_x u_z - v_z u_x)$$

$$+ \hat{k}\,(v_x u_y - v_y u_x)$$

Abbiamo così definito un "osservatore" S:

(terna euclidea di origine O base ortonormale con cui possiamo associare un sistema cartesiano di coord $\{x, y, z\}$ + uno strumento di misura del tempo



coord. spazio-temporale di P: (x, y, z, t)

leggo al tempo t P ha coord. (x, y, z)