

**MECCANICA RAZIONALE (9cfu)**  
*C. d. L. in INGEGNERIA MECCANICA - a.a. 2017-18*  
**Prof. Giovanni FROSALI**

**INTRODUZIONE.**

Che cos'è la Meccanica Razionale. I fenomeni fisici ed i loro modelli. Esempi.  $\vec{F} = m\vec{a}$  ed i sistemi dinamici. Analogia fra un fenomeno meccanico ed uno elettrico. Primo esempio: oscillatore forzato e circuito LRC. Cosa si intende per modello matematico. Le grandezze della meccanica: scalari, vettoriali e tensoriali.

**ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE.**

Spazio di punti, spazio di vettori geometrici (spazio vettoriale). Vettori geometrici e rappresentazione di grandezze vettoriali con vettori geometrici. Spazio affine. Vettori liberi e applicati. Cenni riassuntivi di calcolo vettoriale e notazioni. Rappresentazione cartesiana. Prodotto scalare, vettoriale. Prodotto misto e doppio prodotto vettoriale.

**TEORIA dei MOMENTI.**

Momento polare e momento assiale. Sistemi di vettori applicati e coppia di vettori applicati. Momento risultante di un sistema di vettori applicati. Variazione del momento al variare del centro di riduzione. Coppia di vettori. Invariante scalare e vettoriale. Esistenza dell'asse centrale. Soluzione di  $a \wedge x = b$  e discussione. Ricerca analitica dell'asse centrale. Equazione dell'asse centrale. Sistemi equivalenti, sistemi equilibrati. Operazioni elementari. Esempi di riduzione di sistemi di vettori nel piano. Caso  $\vec{M}_p = 0$ . Sistemi di vettori applicati concorrenti, paralleli, complanari. Teorema di Varignon. Vettori paralleli, centro di vettori paralleli. Sistemi di vettori riducibili al solo risultante applicato sull'asse centrale. Rappresentazione del campo vettoriale dei momenti. Esercizi di calcolo di asse centrale. Ricerca dell'asse imponendo il parallelismo fra  $\vec{M}$  ed  $\vec{R}$ . Alcuni esercizi grafici (spostamento di un vettore, decomposizione su tre direzioni, ecc.)

**ELEMENTI DI STATICA DEL CORPO RIGIDO.**

Terminologia. Sistemi rigidi liberi e vincolati. Gradi di libertà. Equazioni cardinali della statica. Sistemi materiali piani. Esempi. Principali tipi di vincolo nel piano. Vincolo semplice, cerniera, incastro. Posizione del problema statico: problema labile, isostatico e iperstatico. Sistemi staticamente determinati. Vincoli efficaci. Alcuni esempi di sistemi piani. Problemi di statica per sistemi formati da un solo corpo rigido. Problemi di statica per sistemi formati da più corpi rigidi. Arco a tre cerniere. Cenni sull'analisi interna delle strutture, diagrammi dello sforzo normale, taglio e momento flettente. Cenni di statica grafica. Metodi di composizione e scomposizione di vettori. Poligono funicolare. Osservazioni sul poligono funicolare. Poligoni condizionati e condizioni grafiche per l'equilibrio. Alcuni esempi di risoluzione grafica: trave orizzontale ed obliqua, trave incastrata, arco a tre cerniere con carichi concentrati e distribuiti. Strutture reticolari, equilibrio ai nodi, metodo di Ritter.

**CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI.**

Definizione di sistema rigido. Gradi di libertà. Sistemi di riferimento fisso e solidale. Configurazione di un sistema rigido. Trasformazioni rigide. Trasformazioni lineari ortogonali. Richiami sulle matrici ortogonali. Trasformazione del piano in sé. Rotazione del piano e matrice di rotazione. Esempi. Gli angoli di Eulero. Ancora sugli angoli di Eulero. Trasformazioni ortogonali e loro rappresentazione con parametri angolari.

Formule di Poisson. Esistenza e unicità di  $\vec{\omega}$ . Espressione di  $\vec{\omega}$  in funzione di una coordinata angolare.

Caratteristiche di un moto rigido. Calcolo di  $\vec{\omega}$  in alcuni casi, regola pratica per i moti piani. Relazione fondamentale tra le velocità simultanee di due punti. Velocità ed accelerazione dei punti di un sistema rigido in moto. Introduzione all'asse istantaneo di moto. Asse istantaneo di moto. Rigata fissa e rigata mobile. Rigate di un moto rigido. Esistenza e ricerca analitica dell'asse istantaneo di moto. Esempio di un disco che rotola senza strisciare. Rotolamento senza e con strisciamento di un disco su una guida rettilinea. Moti rigidi particolari: traslazioni, rotazioni, precessioni. Velocità del centro istantaneo di moto, relativa, assoluta e di trascinamento. Moti rigidi piani. Polari di un moto rigido piano. Centro istantaneo di moto nei moti rigidi piani. Teorema di Chasles. Esempi di moto rigido piano. Moto di una asta rigida con gli estremi su due guide ortogonali. Ricerca del centro istantaneo di moto e delle polari di moto. Esercizi su base e rulletta. Asta su una guida circolare, appoggiata ad un disco. Oscillografo. Ricerca di base e rulletta per un sistema composto da un disco a contatto con un piano inclinato in movimento. Altri esercizi per la ricerca

di base e rulletta per moti rigidi piani. Coppia di dischi a contatto di cui uno su un piano inclinato. Richiami di cinematica relativa. Moto relativo e moto di trascinamento. Teorema fondamentale della cinematica relativa. Teorema di Coriolis. Derivata assoluta e relativa. Moto uniforme di un punto su una guida ruotante. Esempi per mostrare l'effetto della accelerazione di Coriolis. Composizione di moti rigidi. La composizione di moti rigidi è ancora un moto rigido. Composizione di rotazioni. Coni di Poinot. Composizione di rotazioni. Il differenziale. Esempi di composizioni di moti rigidi: il tecnografo. Moti epicicloidali e ipocicloidali. Esercizio della ruota, con una seconda ruota in moto relativo. Calcolo del centro istantaneo di moto e base e rulletta del moto.

### **TEOREMI GENERALI SUI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI.**

Classificazione delle forze: forze interne ed esterne, forze attive e reazioni vincolari. Equazioni cardinali della dinamica e loro derivazione. Centro di massa e proprietà. Teorema del moto del centro di massa. Commenti sulle equazioni cardinali della dinamica. Equazioni cardinali della statica. Caso dei sistemi rigidi. Sistemi composti da più parti rigide. Questioni energetiche. Sistemi di forze conservative. Ancora sulle equazioni cardinali della dinamica. Sistemi rigidi o sistemi composti da parti rigide. Ancora sulle questioni energetiche. Potenziale di sistemi conservativi di forze interne e di forze esterne. Quantità meccaniche. Energia cinetica e potenziale. Conservazione dell'energia meccanica..

### **GEOMETRIA E CINEMATICA DELLE MASSE.**

Introduzione alla geometria delle masse. Centro di massa e sue proprietà, momenti statici. Esempi di calcolo del centro di massa. Momenti di secondo grado (rispetto ad un punto, ad una retta, ad un piano) e momenti centrifughi. Teorema di Huygens (o del trasporto). Dimostrazione nel caso di momento d'inerzia rispetto ad un punto, una retta ed un piano e di un momento centrifugo. Applicazione diretta e inversa del teorema del trasporto. Determinazione di momenti d'inerzia (asta, lamina rettangolare, quadrato, parallelepipedo). Struttura di inerzia di un sistema. Espressione del momento d'inerzia rispetto ad una retta generica di coseni  $\alpha, \beta, \gamma$ . Matrice di inerzia. Costruzione dell'ellissoide di inerzia. Ellissoide di inerzia. Assi principali di inerzia e forma canonica dell'ellissoide d'inerzia. Richiami sul teorema spettrale per applicazioni lineari simmetriche. Matrice o tensore d'inerzia. Direzioni principali d'inerzia: autovettori e autovalori della matrice d'inerzia. Ricerca del sistema di riferimento principale. Esempi ed esercizi. Ricerca degli assi principali in una lamina rettangolare e di una lamina quadrata. Proprietà geometrico-materiali degli assi principali di inerzia. Determinazione della terna principali per alcuni sistemi piani. Proprietà di stazionarietà degli assi principali. Esempi: sistemi piani, lamina quadrata e rettangolare. Disco e semidisco. Quadrato e mezzo quadrato. Il caso dei sistemi rigidi. Espressione di  $\vec{Q}$ ,  $T$ ,  $\vec{K}$  tramite la matrice d'inerzia. Teorema di König. Dimostrazione. Cinematica delle masse. Quantità di moto e momento della quantità di moto. Moto relativo al centro di massa e teorema del centro di massa. Energia cinetica.

Calcolo di  $\vec{K}$  nel caso di sistemi rigidi.

### **IL FORMALISMO LAGRANGIANO.**

La Lagrangiana. Equazioni di Lagrange in forma conservativa. Applicazioni del formalismo lagrangiano. Caso non conservativo. Il caso del punto libero nello spazio. Commenti sulle equazioni di Lagrange di II specie. Moto piano in coordinate polari. La macchina di Atwood. Integrali primi di moto.

### **MECCANICA DEI SISTEMI RIGIDI.**

Sistemi rigidi liberi. Precessioni. Equazioni di Eulero. Precessioni per inerzia. Integrali primi di moto. Moto alla Poinot. Proprietà dinamiche degli assi principali d'inerzia. Stabilità degli assi permanenti di rotazione. Cenno alla rotazione intorno ad un asse fisso. Analisi del momento delle reazioni.

### **LIBRI di RIFERIMENTO:**

G.Frosali, E.Minguzzi, Meccanica Razionale per l'Ingegneria, Esculapio, Bologna, 2015

G.Frosali, F.Ricci, Esercizi di Meccanica Razionale, Esculapio, Bologna, 2013.

Firenze, 19 settembre 2017

Il titolare del corso

(Prof. Giovanni Frosali)