L'APPROSSIMAZIONE DI STRATO LIMITE (G. FROSALI 2016)

Quando un fluido in moto uniforme incontra un corpo, si può individuare una zona intorno al corpo nella quale il fluido viene decelerato per attrito, fino a raggiungere velocità nulla sul bordo del corpo. Questa regione in genere risulta sottile e limitata ed è caratterizzata dal bilanciamento dei termini convettivo e diffusivo.

La presenza e le caratteristiche di questa regione dipendono dalla viscosità del fluido. In prossimità di un ostacolo gli attriti sono molto elevati e dobbiamo tenere conto della forte viscosità.

La viscosità è caratterizzata dal numero di Reynolds Re, pari all'inverso di ν, in forma adimensionale

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{VL}{\nu}$$

dove L è una lunghezza caratteristica e V è una velocità caratteristica

Nell'equazione di Navier-Stokes, il termine viscoso è dato da $\frac{1}{Re}\Delta \underline{v}$. Quando la turbolenza è alta (Re grande) ci si può domandare se sia lecito trascurare il termine $\frac{1}{Re}\Delta \underline{v}$, ed avere quindi l'equazione di Eulero. Nella zona viscosa intorno ad un ostacolo non è possibile trascurare tale termine, lontano dall'ostacolo invece sì.

La regione intorno all'ostacolo viene detta STRATO LIMITE. Se indichiamo con δ lo spessore di tale regione, δ diminuisce al crescere di Re, fino ad annullarsi per $Re \to \infty$, ecco perché si chiama strato limite.

Con la scelta delle grandezze caratteristiche da noi fatta, si può vedere che

il termine convettivo è di ordine $\frac{\rho V^2}{L}$

il termine diffusivo è di ordine $\eta \frac{V}{\delta^2}$

e per il loro bilanciamento deve essere

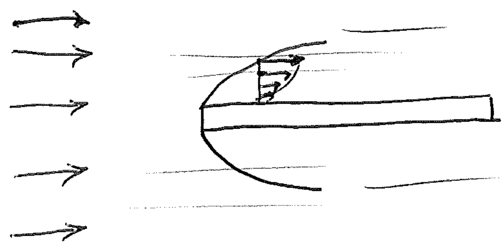
$$\frac{\delta}{L} = Re^{-\frac{1}{2}} \qquad \left(\delta^2 = \frac{L^2}{Re} \to 0 \text{ per } Re \to +\infty\right).$$

Riscriviamo l'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{v}$$

Questo problema per $Re \to \infty$ è un problema di PERTURBAZIONE SINGOLARE. Il termine $\frac{1}{Re} \Delta v$ è il termine di perturbazione che contiene le derivate seconde (di ordine massimo)

Supponiamo che l'ostacolo sia una lastra piana posta nella direzione parallela alla corrente.



Non è in genere nota la soluzione del problema completo. Mentre è possibile ottenere una soluzione APPROSSIMATA, utilizzando la natura singolare della perturbazione.

La procedura viene introdotta in un esempio campione per dare un'idea di come si approccino i problemi caratterizzati da equazioni singolari, dove le derivate massime hanno davanti coefficienti piccoli. Questo tipo di analisi va naturalmente fatta sulle equazioni in forma ADIMENSIONALE.

ESEMPIO

Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2 v}{dx^2} + (1+2\varepsilon)\dfrac{dv}{dx} + 2v = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(1) = 1 \end{cases} \qquad (0)$$

Innanzitutto osserviamo che per $\varepsilon \to 0$ l'equazione si riduce a

$$\frac{dv}{dx} + 2v = 0$$

che ha la soluzione, che soddisfa $v(1) = 1$,

$$v(x) = e^{-2(x-1)} \qquad (1)$$

Questa soluzione soddisfa la condizione per $x = 1$, ma non soddisfa la condizione $v(0) = 0$, perché $v(0) = e^2$.
Questa soluzione è tuttavia utile, perché per x lontani da $x = 0$, gli effetti della condizione al contorno $v(0) = 0$ si faranno sentire sempre meno e questa soluzione può essere una buona approssimazione della vera soluzione, almeno lontano da $x = 0$.

La soluzione (1) è detta SOLUZIONE ESTERNA (outer solution).

Ora cerchiamo una seconda soluzione che sia una buona approssimazione, invece, vicino a $x = 0$. Queste due soluzioni messe insieme opportunamente potrebbero essere una buona approssimazione della soluzione esatta. Si noti che con questa procedura non si ottiene la soluzione esatta, che in questo esempio è possibile calcolare precisamente, ma che in genere non è facilmente calcolabile.

La tecnica per trovare una soluzione vicina allo zero consiste nel dilatare l'intorno dello zero, con una mova variabile.

Introduciamo la nuova variabile

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \quad ,$$

quando $\varepsilon \to 0$, $\xi \to \infty$. Chiamiamo u la funzione incognita della nuova variabile

$$v(x) = v(\varepsilon\xi) = u(\xi),$$

per cui

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(\xi) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2u}{d\xi^2},$$

$$\frac{d}{dx} v(x) = \frac{du(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}.$$

Sostituendo in (0)

$$\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1+2\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi} + 2u = 0 \, ,$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1+2\varepsilon)\frac{du}{d\xi} + 2\varepsilon u = 0 \, .$$

Se $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} = 0$$

alla quale aggiungiamo la condizione al contorno in $x=0$

$u(0)=0$, corrispondente a $v(0)=0$.

Integrando troviamo la soluzione INTERNA (inner solution):

$$u(\xi) = A(1-e^{-\xi})$$

Per trovare la soluzione esterna abbiamo preso $\varepsilon \sim 0$, quindi $\xi \to +\infty$. Prendiamo dunque la soluzione INTERNA e facciamone il limite per $\xi \to \infty$ ponendolo uguale al limite per $x \to 0$ della soluzione ESTERNA. In questo modo si riallacciano le due soluzioni, cioè

$$\lim_{x\to 0} v(x) = e^2 = \lim_{\xi\to\infty} u(\xi)$$

ricavando che $A = e^2$.

Quindi la soluzione INTERNA diventa

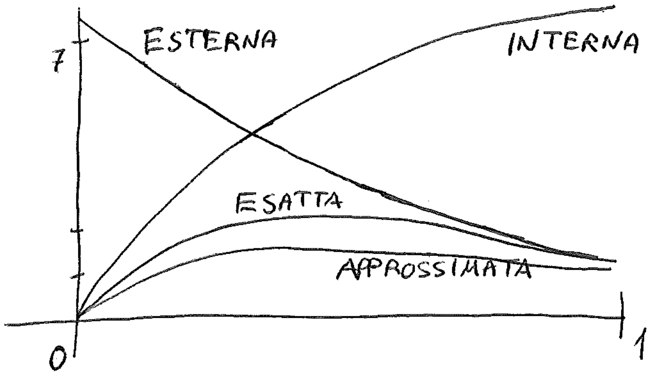
$$u(\xi) = e^2(1-e^{-\xi}).$$

Ora combiniamo le due soluzioni, e poiché la somma tende a e^2 per $x \to 0$, alla combinazione togliamo e^2

$$v(x) = e^{-2(x-1)} + e^2\left(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) - e^2.$$

Questa è la soluzione approssimata, che si avvicina a quella esatta.

In figura si vede l'andamento delle soluzioni interna ed esterna, delle soluzioni approssimata e esatta.



In questo problema l'equazione può risolvere esattamente, anche se in genere ciò non è possibile. La soluzione esatta è

$$v(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-2} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

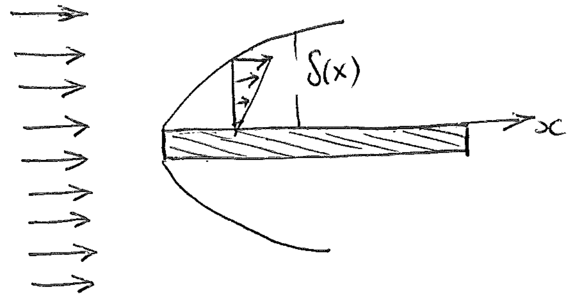
Si osserva che la famiglia delle soluzioni esatte converge uniformemente alla soluzione del problema esterno escludendo $x=0$, mentre converge uniformemente alla soluzione del problema interno nell'intorno di $x=0$.

EQUAZIONE DELLO STRATO LIMITE.

Quando non siamo in grado di risolvere le equazioni di Navier-Stokes in un mezzo in cui sia presente un ostacolo, allora è conveniente ricavare una soluzione semplificata vicino all'ostacolo.

Il metodo si base sul dilatare le coordinate nell'intorno dell'ostacolo e trovare l'equazione del campo delle velocità nei pressi dell'ostacolo, ovvero trovare l'equazione dello STRATO LIMITE.

Si consideri un flusso bidimensionale in regime turbolento ($Re \gg 1$) in un mezzo in cui sia immerso una lastra piana di lunghezza L



Se lo strato limite è alto $\delta(x)$ al variare dell'ascissa x (vedi figura) la lunghezza della lastra deve essere $L \gg \delta(x)$.

Indichiamo con

$$\underline{u} = (u(x,y), v(x,y))$$

il campo di velocità (bidimensionale).

L'equazione di moto in regime stazionario e trascurando le forze di massa è

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta u.$$

che in coordinate (x,y) ha la forma

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\cdot)$$

dove ν è il coefficiente di viscosità.

Operiamo ora dei cambiamenti di variabile:

$$u = Uu' \qquad x = Lx'$$
$$v = Vv' \qquad y = \delta y'$$
$$p = \rho U^2 p' \qquad t = \frac{L}{U}t'$$

dove U e V sono le velocità medie di riferimento lungo x e lungo y.

Al fine di cambiare coordinate in $(\cdot)$, calcoliamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{dx'}{dx} = \frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\frac{dx'}{dx} = \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{dy'}{dy} = \frac{U}{\delta}\frac{\partial u'}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dy} = \frac{U}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho U^2\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{dx'}{dx} = \frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p'}{\partial x'}.$$

Sostituiamo in (∘)

$$U u'\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + V v'\frac{U}{\delta}\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\rho U^2}{L} + \nu\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\frac{U}{\delta^2}$$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{VL}{\delta U}v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu}{UL}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L\nu}{U\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}.$$

Scriviamo anche l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta}\frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \qquad (\times)$$

In (×) i coefficienti devono essere comparabili, ovvero

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \quad\Rightarrow\quad V \sim \frac{U\delta}{L}.$$

Tenendo conto di ciò nell'equazione di Navier-Stokes si ottiene

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu}{UL}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L\nu}{U\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}. \qquad (=)$$

Ora che abbiamo scritto l'equazione di Navier-Stokes, è possibile studiare i vari termini e confrontarne i valori.

I termini predominanti nelle equazioni di Navier-Stokes, che sono il termine convettivo $\underline{u}\cdot\nabla\underline{u}$ (che porta via i vortici) e il termine diffusivo Δu (che crea vortici), devono essere dello stesso ordine. Ne segue da (=)

$$\frac{\nu L}{U\delta^2} \sim 1$$

(0)
$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \sqrt{\frac{L^2}{Re}}\ ,\quad \text{ricordando } Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Il termine $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ ha come coefficiente $\frac{\nu}{UL}$ che, anche se parte del termine convettivo, non può essere di ordine 1 perchè L al denominatore è $\gg 1$. Tale termine è molto piccolo e può essere trascurato e non deve rispettare nessuna condizione al bordo.

Inoltre occorre che si verifichi la condizione di non slittamento sulla lastra ($y=0$), la quale modificherà la soluzione nella variazione lungo y in quanto a un certo punto dovrà tendere a zero. Ma lungo x non ho nessuna condizione.

Scriviamo ora l'equazione di Navier-Stokes lungo y. Il termine predominante è $\frac{\partial p'}{\partial y'}$, quindi l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad p' = p'(x').$$

In base a tutte queste considerazioni e tenendo conto di (0) si arriva a

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \qquad (a)$$

con le condizioni
$$u = v = 0 \quad \text{in } y=0$$
$$u = u_0 \quad \text{per } y\to\infty.$$

Limitiamoci al caso non ci siano gradienti di pressione.
Per risolvere l'equazione ⓐ, introduciamo la funzione di corrente (o di Stokes) $\Psi(x,y)$

$$\underline{u}(x,y) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

e l'equazione ⓐ diventa

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \qquad (b)$$

L'equazione (b) sembra più difficile da risolvere, ma si può usare una trasformazione invariante

$$\Psi(x,y) = f(\eta)\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Tale trasformazione riconduce l'equazione differenziale alle derivate parziali ad una equazione alle derivate ordinarie, la cui soluzione però è solo una soluzione particolare del problema.

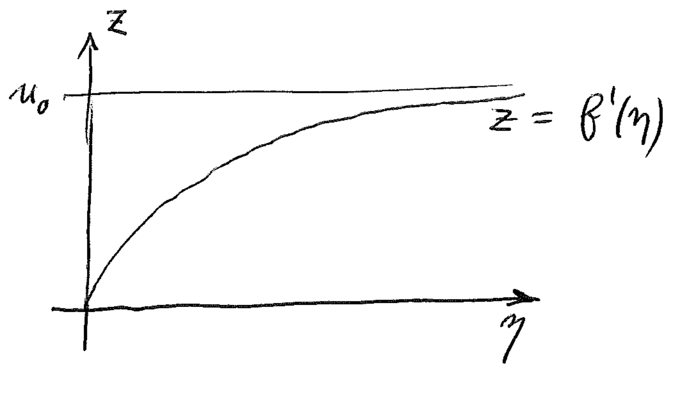
L'equazione (b) prende la forma

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

con le condizioni al bordo

$$f'(0) = 0, \qquad f'(+\infty) = u_0$$

Questa è una equazione differenziale (ordinaria) del 3° ordine conosciuta come l'equazione di BLASIUS per lo strato limite. Essa può essere risolta numericamente e la soluzione ha l'andamento indicato in figura.



$z = f'$ soluzione dell'equ. di BLASIUS.