CAPITOLO VIII.

LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DELLA FISICA MATEMATICA

§ 162. Le analogie formali nella fisica matematica.

Si è visto nei capitoli precedenti come avvenga spesso che fenomeni fisicamente diversi siano retti da equazioni della stessa forma, differenti solo per il significato fisico dei simboli. Così, per es., un'equazione della forma

$$\Delta u = 4\pi\varphi(x, y, z) \tag{VIII, 1}$$

si è presentata:

a) nella cinematica dei fluidi incompressibili [(§ 17), $u =$ potenziale delle velocità, $\varphi = 0$],

b) nella teoria dell'attrazione newtoniana [(§ 44), $u =$ potenziale della gravitazione, $\varphi =$ densità di massa],

c) nell'elettrostatica e magnetostatica [(§§ 44, 73), $u =$ potenziale elettrico, $\varphi =$ densità elettrica, oppure $u =$ potenziale magnetico, $\varphi = 0$].

Un'equazione della forma

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\pi\varphi(x, y, z) \tag{VIII, 2}$$

si è presentata:

a) nelle oscillazioni dei corpi elastici [(§§ 114, 115), $u =$ componente di spostamento o potenziale degli spostamenti, $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ oppure $v = \sqrt{\mu/\rho}$, $\varphi = 0$],

b) nell'elettromagnetismo [(§ 134), $u =$ componente del campo elettrico o magnetico, $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\varphi = 0$].

c) nell'elettromagnetismo [(§ 145), $u =$ potenziale scalare o componente del potenziale vettore $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\varphi =$ densità elettrica (divisa per ε) o componente della densità di corrente (moltiplicata per μ/c)].

L'equazione

$$\text{(VIII, 3)} \qquad \Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

si è presentata:

a) nella conduzione del calore [(§ 153), $u =$ temperatura, $D = \varkappa/(c\rho)$],

b) nella diffusione di gas o liquidi [(§ 153), $u =$ concentrazione, $D =$ coefficiente di diffusione].

Questo fatto permette di raggruppare molti fenomeni, fisicamente diversissimi, in pochi tipi di problemi matematici, fondamentali, che conviene dunque studiare dal punto di vista puramente analitico, prescindendo dal significato fisico delle quantità che vi figurano: ed è ciò che ci proponiamo di fare brevemente in questo capitolo.

L'esistenza delle suddette analogie formali ha poi un'altra conseguenza di grande importanza, come dimostra la storia della fisica. Essa difatti fa sì che talvolta un gruppo di fenomeni fisici possa ricevere diverse interpretazioni teoriche, cioè essere «spiegato» con due o più modelli, ognuno dei quali rende egualmente conto dei risultati sperimentali nell'ambito di quel gruppo di fenomeni. Ampliando, però, progressivamente il gruppo di fenomeni osservati [o studiandoli con maggior precisione] si giunge spesso a scoprire dei fatti che sono incompatibili con una, o più, delle teorie, le quali quindi devono essere escluse come rappresentazione della realtà fisica, pur conservando valore pratico e didattico come sintesi di una parte dei risultati sperimentali.

Un esempio di questo fatto ci è offerto dalle teorie della luce. Come abbiamo visto, quella che meglio rappresenta il complesso dei fenomeni di *propagazione* della luce, e che rende conto del valore numerico della velocità e spiega le analogie con le onde hertziane, etc, è la teoria elettromagnetica, i cui fondamenti abbiamo esposto nel Capitolo VI. Ma buona parte dei risultati di questa teoria li abbiamo dedotti dall'equazione (VI, 120), la quale è della forma (VIII, 2), identica, cioè, a quella della propagazione delle onde elastiche, sia di condensazione [§ 114] che di distorsione [§ 115] [salvo il valore del coefficiente v]: valgono dunque, anche per le onde elastiche, la formula di Kirchhoff [§ 146] e, per λ sufficientemente piccolo, la nozione di raggio, il principio di Fermat, le leggi della riflessione e rifrazione, etc. Ciò spiega perchè molti fenomeni ottici si possano spiegare non solo con la teoria elettromagnetica ma anche con la *teoria elastica della luce*, secondo la quale la luce consiste in vibrazioni trasversali [o, meglio, onde di distorsione, (§ 115)] di un mezzo elastico, detto «*etere*», riempiente tutto lo spazio compresi gli interstizi fra gli atomi, ed avente modulo di rigidità μ [§ 105, nota 1] e densità ρ tali che la velocità di propagazione delle onde trasversali, $\sqrt{\mu/\rho}$, risulti numericamente eguale a c.

Se poi escludiamo dal gruppo dei fenomeni ottici considerati tutti quelli connessi con la polarizzazione, possiamo interpretare i rimanenti non soltanto mediante le onde eteree trasversali, ma anche con onde eteree longitudinali [o, meglio, di condensazione (§ 114)], analoghe a quelle che nell'aria costituiscono il suono. Difatti, anche queste onde obbediscono ad un'equazione della forma (VIII, 2): bisogna però allora attribuire all'etere costanti elastiche tali che $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = c$ [in particolare si può supporlo fluido, $\mu = 0$, ciò che non è lecito nella teoria delle onde trasversali]. Infine, se ignoriamo i fenomeni di diffrazione ed interferenza e ci restringiamo a quelli dell'ottica geometrica [come è lecito per lunghezze d'onda assai piccole] troviamo, come si è visto [§ 151], che l'equazione delle onde [tanto elettromagnetiche che elastiche] conduce alle leggi della propagazione dei raggi riassumibili nel principio di Fermat, leggi che sono analoghe a quelle della meccanica di un punto materiale [v. § 151, nota 6]. Tali fenomeni, dunque, rientrano non solo nella teoria elettromagnetica, in quella delle onde elastiche trasversali ed in quella delle onde elastiche longitudinali, ma anche in una teoria *corpuscolare*, che, cioè, concepisca la luce come costituita di minutissime particelle materiali, lanciate con grande velocità dalle sorgenti luminose e soggette alle ordinarie leggi meccaniche. Le quattro teorie sono [al limite per lunghezza d'onda tendente a zero] perfettamente equivalenti.

Queste quattro teorie sono state effettivamente adottate dai fisici, in ordine cronologico presso a poco inverso di quello in cui le abbiamo nominate. Difatti Descartes nel 1637 mostrò che con una teoria corpuscolare si rendeva conto bene delle leggi ottiche allora note, che erano quelle dell'ottica geometrica; siffatta teoria fu, più tardi (1704), ripresa, ampliata e sostenuta da Newton. Nel frattempo, però, sorgeva, per opera principalmente del P. Grimaldi e di Huygens, la teoria elastica di tipo longitudinale, la quale nel campo dell'ottica geometrica serviva egualmente bene. Ma nello stesso tempo si erano scoperti i fenomeni di diffrazione ed alcuni fenomeni di interferenza [anelli di Newton] e poichè numerosi tentativi di Newton e dei suoi successori per spiegarli con la teoria corpuscolare ebbero scarso successo, i fisici si vennero gradatamente accostando sempre di più alla teoria elastica. Nel 1810 Malus scoprì le leggi della polarizzazione, fenomeno inesplicabile finchè si ammette che le onde siano longitudinali: ben presto quindi si riconobbe la necessità di abbandonare l'idea delle onde longitudinali e sostituirla con quella delle onde trasversali [Fresnel (1816-1821)], benchè essa obbligasse ad attribuire all'etere le proprietà elastiche di un solido, cioè $\mu \neq 0$ [v. § 118], anzichè quelle di un fluido, che fino allora era sembrato ovvio attribuirgli. Si riconobbe poi [Stokes, 1845] che tale difficoltà non era insormontabile, essendovi sostanze, come la pece, che si comportano come solidi nella trasmissione delle vibrazioni e come fluidi viscosi nei movimenti lenti: l'etere fu allora concepito sul modello di tali sostanze, ma i numerosi tentativi, durati circa un quarantennio, di precisare questa ipotesi con opportuni valori delle costanti e trarne le leggi ottiche sperimentalmente osservate, non ebbero successo. Ma nel 1865 Maxwell creò la teoria elettromagnetica, che spiegava, oltre al resto, anche la coincidenza numerica della velocità della luce, nel vuoto, col coefficiente c caratteristico dei fenomeni elettromagnetici: nel 1887 furono scoperte le onde hertziane ed in seguito si scoprirono successivamente tanti altri legami tra fenomeni ottici e fenomeni elettromagnetici che la teoria di Maxwell finì per imporsi. Essa usava, però, ancora un linguaggio tolto alla teoria della elasticità, e ciò era suggerito a Maxwell principalmente dalla analogia formale che sussiste [§ 142] fra le formule delle forze ponderomotrici elettromagnetiche e quelle della teoria dell'elasticità. Tuttavia, la teoria di Maxwell, nella sua struttura logica, era sostanzialmente indipendente da ogni modello elastico: il concetto di «etere» interveniva in modo essenziale soltanto nei problemi di elettrodinamica dei corpi in movimento, dove il suo ufficio si riduceva a fornire un sistema di riferimento privilegiato [detto «sistema assoluto» (v. § 176)]. Questa indipendenza logica non fu riconosciuta che lentamente e soltanto in seguito all'esperienza di Michelson [di cui parleremo al § 176] ed alle altre consimili che dimostrarono l'inesistenza di un sistema di riferimento privilegiato e diedero origine alla teoria della relatività (1905). Si riconobbe, così, gradatamente, che era assai più semplice inquadrare in uno schema logico i fenomeni elettromagnetici, ed in particolare quelli ottici, fondandosi esclusivamente sui concetti di campo elettrico e campo magnetico [come si è fatto in questo libro] e sulle equazioni che li legano anzichè ricercarne una rappresentazione intuitiva in un «etere», che aveva ormai perduto, per adattarsi ai risultati dell'esperienza, ogni analogia colla materia ordinaria.

Aggiungeremo, infine, che il processo storico da noi brevemente accennato non si può considerare chiuso, poichè la fisica degli ultimi anni ha indotto a ritenere che le equazioni di Maxwell non siano valide nell'interno e nelle immediate vicinanze delle particelle elementari che costituiscono la materia [elettroni, protoni, etc.]: si deve quindi pensare che esse rappresentino un caso particolare di leggi più generali ancora non conosciute.

§ 163. Proprietà generali delle equazioni della fisica matematica

Le equazioni che abbiamo passato in rassegna all'inizio del § prec., al pari della maggior parte delle equazioni che intervengono in fisica matematica, sono equazioni *alle derivate parziali* del *secondo* ordine, *lineari* rispetto alla funzione incognita ed alle sue derivate (1). Ad esse vanno poi sempre associate, nei singoli problemi, delle *condizioni supplementari* [per es. condizioni iniziali, condizioni al contorno, etc.].

Il fatto che le equazioni della fisica matematica sono a derivate parziali anzichè a derivate ordinarie come quelle della meccanica [dove l'unica variabile indipendente è il tempo] imprime ai procedimenti della fisica matematica una fisionomia completamente diversa da quella della meccanica razionale. Infatti i problemi di meccanica si risolvono, generalmente, cercando l'*integrale generale* delle equazioni differenziali, e poi

(1) Per brevità chiameremo tali equazioni «equazioni della fisica matematica», benchè naturalmente in alcuni problemi di fisica matematica si presentino anche equazioni di altri tipi.

determinando le costanti arbitrarie, che in esso figurano, per mezzo delle condizioni supplementari del problema [per es., posizioni e velocità iniziali], il che conduce a porre delle equazioni algebriche o trascendenti ma sempre con un numero finito di incognite. Invece, quando si tratta di equazioni a derivate parziali, l'integrale generale contiene delle *funzioni* arbitrarie, e quindi, anche se si riesce a trovarlo, per determinare poi queste funzioni per mezzo delle condizioni supplementari si devono risolvere, generalmente, problemi matematici di elevato grado di difficoltà [per es., equazioni integrali]. Si preferisce quindi assai spesso tener conto fin dall'inizio delle condizioni supplementari, o di una parte di esse, in modo da ricercare non l'integrale generale dell'equazione differenziale, ma solo un integrale di un grado limitato di generalità [per es., contenente alcune costanti arbitrarie]. Un esempio di questo procedimento si è visto in elasticità [§§ 109, 110].

La *linearità* delle equazioni differenziali della fisica matematica [e generalmente anche delle condizioni supplementari] ha pure delle conseguenze assai importanti. Se le dette equazioni sono anche *omogenee* [come, per es., l'equazione di Laplace, o le equazioni dell'elasticità in assenza di forze, o quelle dell'elettromagnetismo in assenza di cariche e di correnti, o quella della propagazione del calore] si ha la proprietà fondamentale che: «ogni combinazione lineare [a coefficienti costanti] di più soluzioni è ancora una soluzione» (²). Questa proprietà permette, quando si è trovato un certo numero [eventualmente infinito] di integrali particolari indipendenti, di costruire un integrale, più generale, contenente altrettante costanti arbitrarie [come si è fatto, per es., al § 84]. Inoltre, se si è trovato un integrale, per es. $u(x, y, z, t, k)$, dipendente da una costante k, non additiva nè moltiplicativa, si può ricavare un integrale $U(x, y, z, t)$ di maggiore generalità prendendo una funzione arbitraria [salvo restrizioni qualitative] $f(k)$ e ponendo

$$U(x, y, z, t) = \int_a^b f(k)\, u(x, y, z, t, k)\, dk\,,$$

[a e b essendo limiti costanti]: questo procedimento non è che una generalizzazione del precedente, potendosi considerare u come l'insieme di infiniti integrali particolari corrispondenti agli infiniti valori di k, ed U, quindi, come una loro combinazione lineare. Alcuni esempi di applicazione di questo procedimento si sono visti nei §§ 158, 161. Ed inoltre

(²) Una conseguenza fisica di questo fatto analitico è che, per es., due fasci di luce possono incrociarsi senza perturbarsi reciprocamente: e così per il suono dall'integrale $u(x, y, z, t, k)$ si possono ricavare altri integrali particolari derivando una o più volte rispetto a k.

Se, poi, una delle variabili, per es. la x, non figura nei coefficienti dell'equazione [in particolare, se questa è a coefficienti costanti] da un integrale particolare $u(x, ...)$ si ottengono, sempre in virtù della linearità, altri integrali particolari derivando una o più volte rispetto ad x [v., per es., § 161].

Quando poi le equazioni sono lineari ma non omogenee [per es., l'equazione di Poisson (§ 44)] è utile ricordare che da qualsiasi loro integrale particolare si può ottenere quello generale aggiungendovi l'integrale generale della corrispondente equazione omogenea.

§ 164. Problema di Cauchy (in due variabili).

Studieremo ora alcune proprietà delle equazioni differenziali lineari a derivate parziali del 2° ordine, limitandoci per ora al caso di due sole variabili indipendenti x, y, che interpreteremo come coordinate cartesiane in un piano [prescindendo dal significato fisico che possono avere nei singoli problemi: per es., nel problema della corda vibrante la y si deve identificare col tempo]. Le equazioni che studiamo sono dunque, nel caso più generale, della forma

$$\text{(VIII, 4)} \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0\,,$$

dove i coefficienti A, B, ... sono reali e dipendono eventualmente da x e da y e almeno uno dei primi tre non è identicamente nullo.

Si chiama «*problema di Cauchy*» il seguente: «*dato nel piano* (x, y) *un arco di curva* γ [su cui indicheremo con s l'ascissa curvilinea, e supporremo fissato il verso positivo della normale n] *e date due funzioni* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *dei punti di* γ, *trovare un integrale della* (VIII, 4) *che sia analitico in una regione del piano contenente* γ, *e che, su* γ, *soddisfi le condizioni* (1)

$$\text{(VIII, 5)} \qquad u = \varphi\,,$$

$$\text{(VIII, 6)} \qquad \frac{du}{dn} = \psi \text{ »}.$$

(2) Tutte le considerazioni relative all'integrale della (VIII, 4) possono essere anche enunciate in forma geometrica riferendosi ad uno spazio a *tre* dimensioni in cui si considerano come coordinate cartesiane ortogonali x, y, u. In tale rappresentazione ogni funzione $u = u(x, y)$ può di regola essere interpretata mediante una superficie, e gli integrali della (VIII, 4) costituiscono, dunque, una infinità di superfici [*superfici integrali* della (VIII, 4)]. La (VIII, 5) impone alla superficie integrale richiesta di passare per una data curva nello spazio [di cui y è la proiezione sul piano (x, y)] e la (VIII, 6) assegna inoltre il piano tangente alla superficie integrale in ogni punto di detta curva.

Osserviamo subito che dare su γ la u e la sua derivata normale equivale a dare ivi la u e le sue due derivate prime. Infatti, detti α, β i coseni direttori della tangente a γ, e quindi β, $-\alpha$ quelli della normale [supposta orientata in un certo verso: altrimenti sarebbero $-\beta$, α, ma si potrebbe ragionare in modo analogo] si ha

$$\text{(VIII, 7)} \qquad \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta\,, \qquad \frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\alpha\,,$$

e quindi, dalle (VIII, 5) e (VIII, 6),

$$\frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta = \varphi'(s)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\alpha = \psi(s)\,,$$

da cui si possono sempre ricavare $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, poichè il determinante dei coefficienti non è nullo [essendo uguale a -1]. Si potrebbe dunque enunciare il problema di Cauchy sostituendo alla (VIII, 6) due condizioni del tipo

$$\text{(VIII, 6')} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \psi_1(s)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi_2(s)\,,$$

[si noti, però, che le funzioni φ, ψ_1 e ψ_2 non si potrebbero assegnare ad arbitrio, dovendo soddisfare la condizione $\varphi'(s) = \psi_1\alpha + \psi_2\beta$].

Dimostreremo ora che in generale il problema di Cauchy non può ammettere più di una soluzione, a meno che la curva γ soddisfi certe condizioni che preciseremo.

Supponiamo infatti che vi siano due soluzioni, u_1, u_2 del problema di Cauchy: posto

$$w(x, y) = u_1 - u_2\,,$$

la w sarà una funzione analitica in una regione contente γ. Scrivendo poi che u_1 ed u_2 soddisfano le (VIII, 4), (VIII, 5), (VIII, 6), e sottraendo membro a membro, si vede che w soddisfa la

$$\text{(VIII, 4}_1\text{)} \qquad A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D\frac{\partial w}{\partial x} + E\frac{\partial w}{\partial y} + Fw = 0\,,$$

ed inoltre che, su γ,

$$\text{(VIII, 5}_1\text{)} \qquad w = 0\,,$$

$$\text{(VIII, 6}_1\text{)} \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0\,.$$

Da queste discendono, per quanto si è detto sopra, le due condizioni

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_\gamma = 0$, che scriveremo [indicando con W_x, W_y i valori che assumono su γ le derivate prime di w]

(VIII, 8) $$W_x = W_y = 0 .$$

Con ciò [usando una notazione analoga per le derivate seconde di w su γ] la (VIII, 4_1) nei punti di γ ci dà

(VIII, 9) $$AW_{xx} + 2BW_{xy} + CW_{yy} = 0 .$$

Associamo a questa le due relazioni che si ottengono derivando le (VIII, 8) rispetto ad s [cfr. (VIII, 7)], e cioè

(VIII, 10) $$\alpha W_{xx} + \beta W_{xy} \qquad = 0 ,$$

(VIII, 11) $$\alpha W_{xy} + \alpha W_{yy} = 0 .$$

Le (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) costituiscono un sistema di tre equazioni lineari omogenee in W_{xx}, W_{xy}, W_{yy}, di cui il determinante dei coefficienti è

(VIII, 12) $$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 .$$

Dobbiamo ora distinguere due casi, secondo che $\mathcal{D}$ è, o no, identicamente nullo lungo tutta la linea γ [ciò che dipende unicamente dalla scelta della curva γ].

Se è $\mathcal{D} \neq 0$, le tre equazioni (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) non ammettono altra soluzione che

(VIII, 13) $$W_{xx} = W_{xy} = W_{yy} = 0 .$$

Ora, si può far vedere che in tal caso anche tutte le successive derivate parziali di w, di qualsiasi ordine, si annullano su γ. Per mostrare, per es., che si annullano le derivate terze, riprendiamo la (VIII, 4_1) e deriviamola rispetto ad x: otterremo

$$\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + ... + A\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2B\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + ... = 0 .$$

Applicandola ad un punto di γ, e tenendo presenti le (VIII, 8) e (VIII, 13), essa si riduce a

(VIII, 14) $$AW_{xxx} + 2BW_{xxy} + CW_{xyy} = 0 .$$

Prendiamo poi le prime due delle (VIII, 13) e deriviamole rispetto ad s, ottenendo

$$\alpha W_{xxx} + \beta W_{xxy} = 0\,, \tag{VIII, 15}$$

$$\alpha W_{xxy} + \alpha W_{xyy} = 0\,. \tag{VIII, 16}$$

Le (VIII, 14), (VIII, 15), (VIII, 16) costituiscono un sistema identico a (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11), salvo che tutte le W vi figurano con un ulteriore indice x, mentre i coefficienti sono gli stessi: essendosi supposto $\mathcal{D} \neq 0$, se ne conclude che è

$$W_{xxx} = W_{xxy} = W_{xyy} = 0\,.$$

Similmente, utilizzando la terza delle (VIII, 13), si troverebbe che anche $W_{yyy} = 0$.

Ripetendo il procedimento si può dimostrare che sono nulle le derivate quarte, e così via.

Ora, se w e tutte le sue derivate sono nulle su γ, ne segue [essendo w una funzione analitica in una regione contenente γ] che w è identicamente nulla, e quindi che $u_1 = u_2$, in tutta questa regione.

Supponiamo ora, invece, che la curva γ sia tale che su di essa è dappertutto $\mathcal{D} = 0$. In tal caso il sistema (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) può essere soddisfatto con valori non tutti nulli di W_{xx}, W_{xy}, W_{yy} e quindi non si può concludere che sia $w = 0$ in tutta una regione contenente γ. Concludendo:

« *condizione necessaria perchè il problema di Cauchy ammetta due soluzioni analitiche distinte, è che la curva* γ *soddisfi la condizione* $\mathcal{D} = 0$, *ossia*

$$A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0\,, \tag{VIII, 17}$$

che si può scrivere, ricordando che $\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, $\beta = \dfrac{dy}{ds}$,

$$A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2 = 0\text{ ».} \tag{VIII, 18}$$

Le curve che soddisfano questa equazione differenziale si chiamano « *caratteristiche* » dell'equazione differenziale (VIII, 4) ed hanno proprietà assai notevoli: come si vede esse dipendono solo dai termini di 2° ordine dell'equazione a derivate parziali data (²).

(²) Nella interpretazione geometrica di cui alla nota 2 di questo §, la proprietà fondamentale delle caratteristiche si enuncia così: *due superfici integrali della* (VIII, 4) *non possono essere tangenti fra loro lungo tutta una curva se la proiezione di questa sul piano* (x, y) *non è una caratteristica.*

È stato anche dimostrato [ma ci limitiamo ad enunciarlo] che, sotto certe condizioni qualitative, se γ non è una caratteristica il problema di Cauchy ammette sempre una soluzione.

§ 165. Classificazione delle equazioni della fisica matematica in base alle caratteristiche.

Studiamo ora più da vicino l'equazione delle caratteristiche (VIII, 18). Supponiamo dapprima che almeno uno dei coefficienti A e C [diciamo A] non sia identicamente nullo. Allora dalla (VIII, 18), che si può scrivere

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0\,, \tag{VIII, 18'}$$

si ricava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\,. \tag{VIII, 19}$$

Questa rappresenta, se $B^2 \neq AC$, due equazioni differenziali del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. È ben noto che gli integrali di un'equazione di questo tipo rappresentano una famiglia di curve tale che per ogni punto del piano ne passa una: le caratteristiche dell'equazione (VIII, 4) costituiscono dunque due famiglie siffatte e quindi per ogni punto del piano passano due caratteristiche. Tali curve saranno reali nelle regioni del piano dove $B^2 > AC$, e l'equazione (VIII, 4) dicesi, in quelle regioni, *di tipo iperbolico*, saranno immaginarie dove $B^2 < AC$, ed ivi l'equazione dicesi *di tipo ellittico*. Dove poi $B^2 = AC$, la (VIII, 19) dà per $\frac{dy}{dx}$ un solo valore reale e vi è, quindi, una sola famiglia di caratteristiche [reali]: ivi l'equazione (VIII, 4) dicesi *di tipo parabolico*.

Se, come avviene per es. quando la (VIII, 4) è a coefficienti costanti, in tutto il piano è $B^2 > AC$ oppure $B^2 < AC$, o $B^2 = AC$, l'equazione (VIII, 4) chiamasi senz'altro equazione di *tipo iperbolico*, *ellittico* o *parabolico*.

Resta da esaminare il caso che sia $A = C = 0$ [e quindi $B \neq 0$]: in tal caso l'equazione delle caratteristiche (VIII, 18) si riduce a

$$dx\,dy = 0\,,$$

e quindi rappresenta le due famiglie di linee

$$x = \text{cost.}\,,\qquad y = \text{cost.}\,,$$

ossia le parallele agli assi. Tale caso si deve dunque assimilare a quello dell'equazione iperbolica. Si può dunque dire che in ogni caso dove $B^2 > AC$ le caratteristiche sono reali e distinte e l'equazione (VIII, 4) è ivi iperbolica.

La classificazione delle equazioni a derivate parziali del tipo (VIII, 4) in iperboliche, ellittiche e paraboliche corrisponde, come vedremo, a profonde differenze nella natura dei problemi relativi a tali equazioni.

Ci dànno alcuni esempi dei tre tipi:

a) l'equazione di Laplace [§ 21]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{VIII, 20}$$

che *è* del tipo *ellittico* ed ha per equazione delle caratteristiche [immaginarie]

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\,, \qquad \text{ossia} \qquad y \pm ix = \text{cost.}\;; \tag{VIII, 21}$$

le sue caratteristiche sono, come si vede, le rette isotrope del piano;

b) l'equazione delle corde vibranti [§ 78], che possiamo scrivere [ponendo $y = Vt$]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,: \tag{VIII, 22}$$

essa è del tipo *iperbolico* ed ha per caratteristiche le due famiglie di rette

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1\,, \qquad \text{ossia} \qquad y \pm x = \text{cost.}\,, \tag{VIII, 23}$$

cioè le parallele alle bisettrici degli assi;

c) l'equazione della propagazione del calore [§ 154], che scriveremo [ponendo $y = Dt$]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,: \tag{VIII, 24}$$

essa è del tipo *parabolico* ed ha per caratteristiche l'unica famiglia

$$\frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad y = \text{cost.}\,, \tag{VIII, 25}$$

cioè le parallele all'asse x.

§ 166. Riduzione a forma canonica delle equazioni della fisica matematica.

Se si sostituiscono alle variabili x ed y altre due variabili ξ, η mediante relazioni invertibili del tipo

$$\text{(VIII, 26)} \qquad \xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

l'equazione (VIII, 4) si trasformerà in una nuova equazione lineare

$$\text{(VIII, 27)} \qquad A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F'u + G' = 0,$$

con A', B', ..., funzioni di ξ, η, le cui caratteristiche soddisfano l'equazione [v. (VIII, 18)]

$$\text{(VIII, 28)} \qquad A'(d\eta)^2 - 2B' \, d\xi \, d\eta + C'(d\xi)^2 = 0 .$$

Ma si osservi che [per la definizione di caratteristiche] queste curve devono rappresentare, nel piano (ξ, η), le curve corrispondenti [attraverso la corrispondenza (VIII, 26)] delle caratteristiche nel piano (x, y) (¹). Di questa proprietà si può trarre profitto per scegliere la trasformazione (VIII, 26) in modo da ridurre la (VIII, 4) ad una forma più semplice.

Supponiamo dapprima che la (VIII, 4) sia, nella regione che interessa, *iperbolica* e siano

$$f_1(x, y) = \text{cost.}, \qquad f_2(x, y) = \text{cost.},$$

le due famiglie di caratteristiche. Prendiamo come trasformazione (VIII, 26) la seguente

$$\xi = f_1(x, y), \qquad \eta = f_2(x, y).$$

Le equazioni delle caratteristiche nelle variabili ξ, η dovranno dunque essere [per l'osservazione fatta poco sopra] $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$, il che significa che la (VIII, 28) dovrà essere soddisfatta sia da $d\xi = 0$, sia da $d\eta = 0$: da ciò si conclude che deve essere $A' = C' = 0$. Con ciò la (VIII, 27), divisa tutta per $2B'$ [che è certo $\neq 0$] e posto $D'/(2B') = -a$, etc., assume la forma

$$\text{(VIII, 29)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + d .$$

(¹) Se ne deduce, in particolare, che se la (VIII, 26) è, come supponiamo, una trasformazione reale e biunivoca e se l'equazione (VIII, 4) è di tipo iperbolico, ellittico o parabolico, è dello stesso tipo l'equazione trasformata (VIII, 27), vale a dire: il «tipo» rappresenta una proprietà *intrinseca* dell'equazione (VIII, 4) [nel campo reale].

Ogni equazione iperbolica può quindi ridursi a questa forma, che riguarderemo come « *forma canonica* » delle equazioni iperboliche. Si dice anche che l'equazione (VIII, 29) è « riferita alle sue caratteristiche », perchè la trasformazione adottata equivale ad assumere un nuovo sistema di coordinate ξ, η, tale che le caratteristiche dell'equazione ne siano le linee coordinate. [Un caso particolare di questa trasformazione si è già visto al § 78, dove si è utilizzata per trovare l'integrale generale della equazione delle corde vibranti].

Se la (VIII, 4) è *ellittica* si potrebbe eseguire una trasformazione formalmente analoga ma con funzioni f_1, f_2 complesse coniugate, e quindi il vantaggio della riduzione alla forma (VIII, 29) sarebbe compensato dalla perdita della realità delle variabili ξ, η. Si può, invece, porre la (VIII, 4) ellittica sotto una forma più semplice restando nel campo reale, con la trasformazione

$$\xi = f_1(x, y) + f_2(x, y), \qquad \eta = \frac{f_1(x, y) - f_2(x, y)}{i},$$

da cui $2f_1 = \xi + i\eta$, $2f_2 = \xi - i\eta$. Le equazioni delle caratteristiche devono dunque identificarsi con $\xi \pm i\eta = \text{cost.}$ e perciò la (VIII, 28) deve essere soddisfatta per $d\xi$ arbitrario e $d\eta = \pm i\, d\xi$. Ciò può essere solo se $A' = C'$, $B' = 0$. Quindi la (VIII, 27), divisa per A' e posto $D'/A' = -a$, etc., assume la forma

$$\text{(VIII, 30)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + d,$$

che si può considerare come la forma canonica delle equazioni ellittiche.

Se la (VIII, 4) è *parabolica*, sia

$$\text{(VIII, 31)} \qquad f(x, y) = \text{cost.}$$

l'equazione della famiglia delle sue caratteristiche. Eseguiremo in tal caso una trasformazione del tipo

$$\text{(VIII, 32)} \qquad \xi = \xi(x, y), \qquad \eta = f(x, y),$$

dove $\xi(x, y)$ è una funzione qualunque [scelta, però, in modo che la trasformazione sia biunivoca]. Dovendo l'equazione essere parabolica anche nelle nuove variabili, sarà

$$B'^2 = A'C'.$$

Ora, per la (VIII, 31) e la seconda delle (VIII, 32), le caratteristiche devono essere le curve $\eta = \text{cost.}$, ossia $d\eta = 0$: perchè tali curve soddisfino la (VIII, 28) deve essere $C' = 0$ e, quindi, in conseguenza dell'ultima formula, anche $B' = 0$. La (VIII, 27) si riduce dunque [dividendola per A' e ponendo $D'/A' = -a$, etc.] alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + c . \tag{VIII, 33}$$

È questa la forma canonica per le equazioni paraboliche.

Da quanto si è detto risulta che una equazione di tipo ellittico si può formalmente assimilare ad una di tipo iperbolico rinunciando alla realità delle variabili. Ciò porta, però, un cambiamento assai profondo nella natura della soluzione: ce ne possiamo render conto discutendo brevemente un esempio particolare:

L'equazione di Laplace (VIII, 20), col cambiamento di variabili

$$\xi = x , \qquad \eta = iy , \tag{VIII, 34}$$

diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 , \tag{VIII, 35}$$

che è formalmente identica all'equazione delle corde vibranti. Si può utilizzare questa circostanza per trovare l'integrale generale della (VIII, 20): difatti l'integrale generale della (VIII, 35) è [integrale di d'Alembert (§ 78)]

$$u = f(\xi + \eta) + g(\xi - \eta) ,$$

con f e g funzioni arbitrarie [purchè derivabili due volte]: introducendo le (VIII, 34) questo diviene

$$u = f(x + iy) + g(x - iy) , \tag{VIII, 36}$$

ma, affinchè abbia senso, bisogna, come si vede, che le funzioni f e g siano funzioni non solo derivabili due volte nel campo reale, ma anche analitiche. La (VIII, 36) dà l'integrale generale dell'equazione di Laplace nel piano. Però essa è di scarsa utilità pratica poichè nei problemi di fisica matematica, come si è visto in varie occasioni, l'equazione di Laplace è generalmente associata a condizioni supplementari relative ad un contorno chiuso [problema di Dirichlet, problema di Neumann e simili (Cap. II)] e non è agevole determinare le funzioni f e g in modo da soddisfare queste condizioni.

Vogliamo a questo proposito osservare che il teorema di esistenza relativo al problema di Cauchy assicura che, assegnati ad arbitrio i valori di u e $\frac{du}{dn}$ su una curva s, che ora vogliamo supporre chiusa, esiste generalmente, in una regione contenente s, una soluzione analitica della (VIII, 4) che soddisfa tali condizioni: non assicura però che tale soluzione esista in *tutta* l'area σ racchiusa da s, poichè la detta regione potrebbe avere delle lacune all'interno di σ. Si può anzi facilmente riconoscere che, fissati ad arbitrio i valori della u, soltanto una determinata scelta [sempre possibile] dei valori della derivata normale di u assicura l'esistenza di una u regolare in tutto σ: difatti, si è già dimostrato [§ 18] che una funzione *armonica* in σ è determinata in modo unico dai suoi valori al contorno. Se quindi si assegnassero ad arbitrio i valori al contorno di u e $\frac{du}{dn}$, si troverebbe bensì una soluzione della (VIII, 20), ma essa non sarebbe, in genere, regolare [tanto meno, quindi, analitica] in tutta σ (²).

§ 167. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle corde vibranti.

Riprendiamo l'equazione delle corde vibranti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \tag{VIII, 37}$$

le cui caratteristiche, come risulta dalla (VIII, 23), sono le rette $x \pm vt = \text{cost.}$, cioè le rette inclinate di $\pm\,\theta$ sull'asse delle ordinate t, con θ tale che

$$\operatorname{tg}\theta = v\,. \tag{VIII, 38}$$

Chiameremo caratteristiche « della famiglia ξ » quelle di equazione $x + vt = \text{cost.}$, « della famiglia η » le $x - vt = \text{cost.}$. Prima di studiare il problema di Cauchy per la (VIII, 37) vogliamo ricavare da essa una formula, fondamentale per ciò che seguirà (¹).

(²) Ciò può rendersi intuitivo colla seguente osservazione [dovuta ad una comunicazione verbale di F. Tricomi]. Il problema analogo a questo, in una dimensione, sarebbe quello di trovare una $u(x)$ che in un segmento AB [l'analogo dell'area σ] soddisfi l'equazione

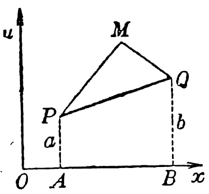

Fig. 142.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0\,, \tag{*}$$

e che ai due estremi A e B [che corrispondono al contorno s] soddisfi le condizioni

$$u(x_A) = a\,,\quad u(x_B) = b\,,\quad u'(x_A) = \alpha\,,\quad u'(x_B) = \beta\,.$$

essendo a, b, α, β costanti assegnate. Poichè la (*) è soddisfatta da tutte e sole le funzioni lineari di x [rappresentate graficamente da rette o da spezzate rettilinee], se si richiede anche la regolarità, la $u(x)$ dovrà essere rappresentata da una retta (v. fig. 142), che non potrà essere che quella passante per i due punti $P(x_A\,,\,a)$, $Q(x_B\,,\,b)$, la quale dovrebbe ivi avere inclinazioni assegnate α, β: è chiaro pertanto che queste condizioni sono incompatibili a meno che sia $\alpha = \beta = \dfrac{b-a}{x_B - x_A}$. Ma se si rinuncia alla continuità della derivata prima di $u(x)$, la soluzione può anche essere rappresentata da una spezzata, come, per es., la PMQ, ed in tal caso si possono assegnarne ad arbitrio le inclinazioni α, β nei punti P e Q.

(¹) Si potrebbe semplificare, almeno nella forma, la trattazione seguente, riducendo la (VIII, 37) alle sue caratteristiche col cambiamento di variabili $\xi = x + vt$, $\eta = x - vt$ [§ 78]: preferiamo non farlo, per conservare alle variabili il loro significato fisico.

Se s è una linea chiusa qualsiasi, che racchiude un'area σ entro la quale u è *regolare*, moltiplicando la (VIII, 37) per $d\sigma$ ed integrando in tutta σ si ha, per il lemma di Gauss (I, 13), detti α e β i coseni della normale esterna,

$$\text{(VIII, 39)} \qquad \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\beta\right) ds = 0\,.$$

Se conveniamo che s sia percorsa nel verso antiorario, e chiamiamo α' e β' i coseni della sua tangente, sarà $\alpha = \beta'$, $\beta = -\alpha'$, e quindi la (VIII, 39) si potrà scrivere [moltiplicandola per v]

$$\text{(VIII, 39')} \qquad \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x}\,v\beta'\right) ds = 0\,.$$

È importante notare che se un tratto di s si identifica con una caratteristica ξ [percorsa in un verso o nell'altro], su di esso è $\alpha' = -\,v\beta'$ e quindi l'integrando della (VIII, 39') diviene, per quel tratto,

$$\text{(VIII, 40)} \qquad (\ldots\ldots)\,ds = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\beta' + \frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha'\right) ds = -\,\frac{du}{ds}\,ds = -\,du\,.$$

Similmente si vede che su un tratto di caratteristica η [dove $\alpha' = v\beta'$] è

$$\text{(VIII, 40}_1\text{)} \qquad (\ldots\ldots)\,ds = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\beta' + \frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha'\right) ds = \frac{du}{ds}\,ds = du\,.$$

Studiamo ora il problema di Cauchy per la (VIII, 37). Sia dato un arco di curva γ [che per ora supponiamo tale che nessuna caratteristica abbia con esso più di un punto in comune] e su di esso siano assegnati i valori di u e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Dagli estremi A e B di γ (fig. 143) conduciamo le caratteristiche, le quali delimiteranno un parallelogrammo $ACBD$: mostreremo che i dati determinano una sola soluzione *regolare* entro tale parallelogrammo, e potremo anzi scriverne l'espressione esplicita.

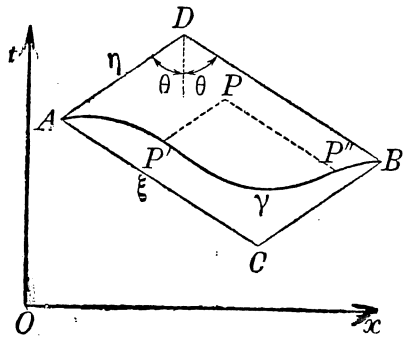

Fig. 143.

Preso un punto P qualsiasi, interno al detto parallelogrammo, conduciamo da esso le caratteristiche, e siano P', P'' le loro intersezioni con γ: preso come contorno s il triangolo mistilineo $PP'P''$ applichiamo ad esso la (VIII, 39'), notando che sul lato PP' si può applicare la (VIII, 40_1)

e su $P''P$ la (VIII, 40): avremo

$$[u(P') - u(P)] + \int_{P'}^{P''} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x} v\beta'\right) ds - [u(P) - u(P'')] = 0 ,$$

da cui, risolvendo rispetto ad $u(P)$, si ottiene

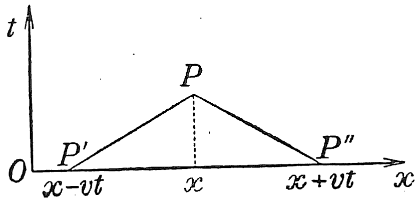

Fig. 144

$$\text{(VIII, 41)} \quad u(P) = \frac{u(P') + u(P'')}{2} + \frac{1}{2}\int_{P'}^{P''} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x} v\beta'\right) ds .$$

È questa la formula risolutiva del nostro problema.

Prendiamo in particolare come curva γ l'asse delle x. Nel caso della corda vibrante [Cap. IV] ciò significa assegnare per $t = 0$, ed in ogni punto della corda, la u [spostamento iniziale] e la $\frac{\partial u}{\partial t}$ [velocità iniziale]: è dunque il problema già risolto al § 79. E difatti, se si osserva che in questo caso i punti P' e P'' della costruzione precedente vengono ad essere (fig. 144) i punti dell'asse x di ascissa $x \pm vt$, e che lungo $P'P''$ è $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, $ds = dx$, si riconosce che la (VIII, 41) si identifica colla (IV, 24).

Il problema più generale cui si riferisce la fig. 143 si presenterebbe, nello studio della corda vibrante, qualora fossero assegnati spostamenti e velocità di ogni punto della corda, o di un tratto di essa, non nell'istante iniziale, ma in un istante diverso da punto a punto [definito, per ogni x, dalla corrispondente ordinata della curva γ].

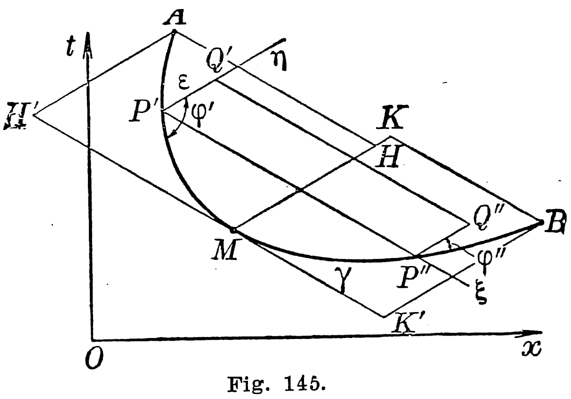

Fig. 145.

Passiamo ora al caso in cui la curva γ è tale che alcune caratteristiche hanno con essa in comune più punti: per es. (fig. 145) supponiamo che vi sia una caratteristica ξ che la incontra in due punti P', P''. Allora coi soli dati del tratto AM [essendo M il punto dove γ ha per tangente una caratteristica ξ] si determina, come si è visto sopra, la soluzione nell'area $AH'MH$, e coi soli dati di MB nell'area $MK'BK$: è chiaro che se i dati sono assegnati ad arbitrio le due soluzioni non coincideranno in generale lungo MH. Quindi, se si vuole una soluzione regolare si devono scegliere i dati in modo da rispettare certe condizioni. Troviamole. Condotte da P' e P'' le caratteristiche

η e preso su di esse, dalla stessa parte, un segmento di lunghezza arbitraria ε, formiamo il parallelogrammo $P'P''Q''Q'$ ed applichiamo ad esso la (VIII, 39'). Tenuto conto che sui lati $P'P''$ e $Q'Q''$ vale la (VIII, 40) e sugli altri due la (VIII, 40_1), si ha

$$-[u(P'')-u(P')]+[u(Q'')-u(P'')]-[u(Q')-u(Q'')]+ \\ +[u(P')-u(Q')]=0\,,$$

cioè, dividendo per 2ε,

$$\frac{u(Q'')-u(P'')}{\varepsilon}=\frac{u(Q')-u(P')}{\varepsilon}\,.$$

Se ora facciamo tendere ε a zero, i due membri di questa uguaglianza tendono alle derivate di u nella direzione η, rispettivamente in P' e P''; quindi troviamo

$$\text{(VIII, 42)}\qquad \left(\frac{du}{d\eta}\right)_{P'}=\left(\frac{du}{d\eta}\right)_{P''}\,,$$

ovvero, detto φ l'angolo $\widehat{s\eta}$ ed n la direzione della normale [rivolta a destra del verso positivo di s],

$$\text{(VIII, 42')}\qquad \left(\frac{du}{ds}\cos\varphi-\frac{du}{dn}\sin\varphi\right)_{P'}=\left(\frac{du}{ds}\cos\varphi-\frac{du}{dn}\sin\varphi\right)_{P''}\,.$$

Questo risultato ci dice che, nel caso che consideriamo, i dati del problema di Cauchy [se si vuole che la u sia regolare] non possono essere presi ad arbitrio, poichè deve sussistere la relazione (VIII, 42') fra le derivate prime di u nei due punti di γ che sono sulla stessa caratteristica. Quindi, nel caso, per es., della fig. 145, assegnati ad arbitrio u e $\frac{du}{dn}$ nel tratto AM, sul tratto MB si può assegnare ad arbitrio soltanto la u, mentre $\frac{du}{dn}$ resta determinata dalla (VIII, 42').

Un'applicazione delle cose dette si ha nel problema delle vibrazioni di una corda limitata i cui estremi siano assoggettati a movimenti assegnati [problema che è la generalizzazione del problema del § 82, in cui gli estremi erano fissi]. Più precisamente, supponiamo che siano assegnate la configurazione e la velocità iniziali, cioè u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ per $t=0$ e per $0<x<l$ [essendo l la lunghezza della corda] ed inoltre lo spostamento dei due estremi in funzione del tempo, cioè $u(0,t)$ ed $u(l,t)$, per un certo intervallo di tempo $0<t<T$. Nel diagramma (x,t) [v. fig. 146] ciò significa assumere come curva γ la spezzata $AOLB$, in cui $OL=l$, $AO=LB=T$, ed assegnare su OL la u e la $\frac{du}{dn}$ ossia, $\frac{\partial u}{\partial t}$, e su

AO ed LB la u. [Su questi ultimi lati si può assegnare solo la u, e non $\frac{du}{dn}$, perchè questa resta determinata dalla (VIII, 42'): infatti una almeno delle due caratteristiche condotte da un punto qualunque di AO e BL taglia la spezzata in un altro punto]. Ciò premesso, per determinare la u in un punto P conduciamo da P le caratteristiche: se incontrano entrambe il lato OL siamo ricondotti al caso precedente e le condizioni agli estremi non intervengono. Supponiamo invece [come in fig. 146] che una delle caratteristiche tagli AO in H e l'altra LB in K: condotte da H e K le caratteristiche dell'altra famiglia queste taglino OL in M ed N. Applichiamo la (VIII, 39') al poligono $PHMNK$ ricordando le (VIII, 40) ed (VIII, 40_1) e notando che su MN è $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, $ds = dx$: troviamo

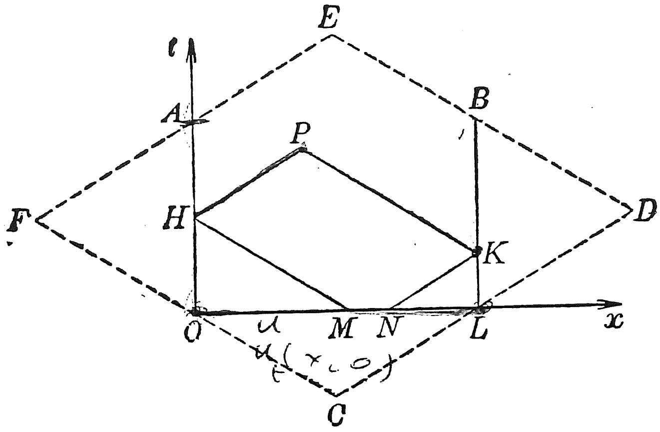

Fig. 146.

$$[u(H) - u(P)] - [u(M) - u(H)] + \\ + [u(K) - u(N)] - [u(P) - u(K)] + \\ + \int_M^N \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = 0\,,$$

da cui la formula risolutiva

$$u(P) = u(H) + u(K) - \\ - \frac{u(M) + u(N)}{2} + \frac{1}{2v} \int_M^N \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\,. \tag{VIII, 43}$$

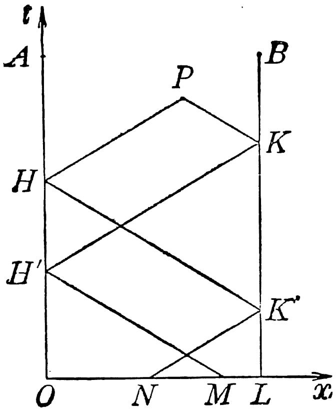

Fig. 147.

Se le caratteristiche condotte da H e K non tagliano OL ma OA ed OB (v. fig. 147) la costruzione si ripete quante volte occorre ed il procedimento si estende in modo abbastanza ovvio.

§ 168. Significato fisico delle caratteristiche di un'equazione iperbolica.

Si osservi ora, sulla (VIII, 41), che a determinare il valore di u in P non intervengono tutti i dati del problema ma solo quelli relativi ad un tratto, $P'P''$, della curva γ [nel caso della fig. 144 a determinare lo stato della corda nel punto x al tempo t, intervengono solo i dati iniziali relativi al tratto di corda fra $x - vt$ et $x + vt$]. Questo fatto, come ora mostreremo, è la traduzione analitica della natura di «propagazione ondosa» dei fenomeni governati dalla equazione (VIII, 37).

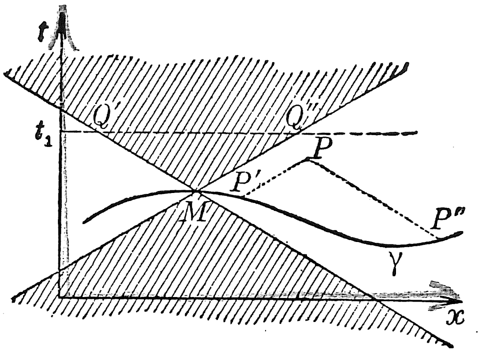

Fig. 148.

Per comprenderlo intuitivamente, supponiamo che i dati del problema siano i seguenti: $u = 0$ e $\frac{du}{dn} = 0$ lungo tutta γ eccettuato un punto M (fig. 148) [ciò può realizzarsi, per es., percuotendo in un solo punto, x_M, al tempo t_M, una corda inizialmente in riposo]. Da M conduciamo le caratteristiche, le quali divideranno il piano in due regioni, [quella tratteggiata e quella bianca]. È chiaro che se applichiamo la (VIII, 41) ad un punto P compreso nella regione bianca, il tratto $P'P''$ di curva γ che interviene nella formula non contiene il punto M, quindi su di esso [e nei suoi estremi] u e le sue derivate sono dovunque nulle e risulta perciò $u(P) = 0$; se invece P è compreso nella regione tratteggiata risulta, in genere, $u(P) \neq 0$. Dunque, se consideriamo la corda in un istante qualsiasi t_1 (¹), dovremo tracciare la retta $t = t_1$, ed avremo che solo il tratto di corda corrispondente al segmento $Q'Q''$, interno alla zona tratteggiata, risente della perturbazione impressa in M, mentre tutto il resto della corda è ancora in quiete: come si vede, col crescere di t_1 tale segmento si dilata progressivamente: i suoi estremi Q', Q'' [detti «*fronti d'onda*»] procedono lungo la corda, l'uno con velocità v, l'altro con velocità $-v$ [determinate dall'inclinazione delle caratteristiche]; le due caratteristiche che limitano la zona tratteggiata sono le «*linee orarie*» dei due fronti d'onda.

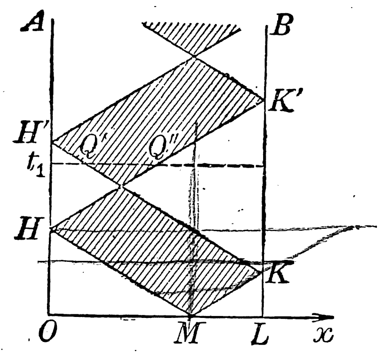

Fig. 149.

Considerazioni analoghe si possono fare per una corda cogli estremi fissi, la quale sia inizialmente in quiete e riceva un impulso in un punto M: in tal

(¹) La fig. 148 suppone $t_1 > t_M$: la zona tratteggiata al disotto di M corrisponderebbe a perturbazioni che dovrebbero preesistere nella corda, affinchè al tempo t_M si producesse spontaneamente nel punto x_M quella perturbazione che abbiamo supposto assegnata.

caso dovremo applicare la costruzione della fig. 149 con $u = 0$ su OA ed LB, ed $u = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ su tutta OL tranne un punto M. Da M tracciamo le caratteristiche fino ad incontrare OA ed LB in H e K, di qui tracciamo le nuove caratteristiche HK', KH', etc.; veniamo così a definire una serie di parallelogrammi, che nella figura sono tratteggiati. Se ora applichiamo la (VIII, 43) ad un punto che sia fuori delle zone tratteggiate, si riconosce facilmente, come nel caso precedente, che risulta $u(P) = 0$, cosicchè in un istante qualunque t_1 la corda è perturbata solo in un tratto $Q'Q''$ i cui estremi [fronti d'onda] hanno per linee orarie le spezzate MKH'....., MHK'....: essi dunque partono da M con velocità $\pm v$ e si «riflettono» ogni volta che giungono ad un estremo della corda.

Se ora torniamo a considerare il caso in cui γ è una linea qualunque e su di essa u e du/dn sono assegnati comunque, potremo decomporre γ in trattini infinitesimi, e ricordando la linearità dell'equazione, considerare la soluzione come la somma [più propriamente l'integrale] delle soluzioni corrispondenti ai casi in cui uno solo degli elementi infinitesimi della curva γ ha u e $\dfrac{du}{dn}$ diversi da zero: vale a dire, nel problema della corda, considerare separatamente i movimenti che sarebbero prodotti nella corda perturbandone, al tempo t_M, un solo punto M e sovrapporli. Si può dunque pensare che da ciascun punto della corda partano due fronti d'onda [uno progressivo ed uno regressivo] propagantisi con velocità $\pm v$: «*le caratteristiche dell'equazione differenziale hanno il significato di linee orarie di tali fronti d'onda*».

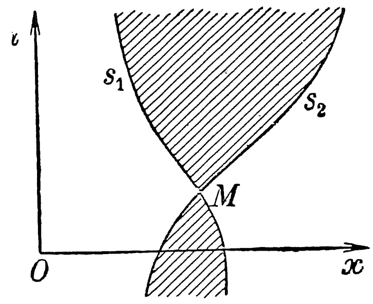

Fig. 150.

Questa conclusione si può estendere a qualsiasi equazione omogenea di tipo iperbolico, anche a coefficienti non costanti e quindi a caratteristiche non rettilinee (²). Consideriamo, infatti, una soluzione $u(x, t)$ che sia diversa da zero entro una regione limitata da due linee s_1, s_2 (fig. 150) mentre al di fuori è (³) $u = 0$: per definizione s_1, s_2 saranno le linee orarie dei «fronti d'onda»: supponiamo inoltre [come è generalmente richiesto da ragioni fisiche] che la u sia continua insieme alle sue derivate prime dappertutto, anche attraverso s_1 ed s_2. Se interpretiamo geometricamente la u come una superficie, essa coinciderà col piano (x, t) nella zona non tratteggiata, mentre se ne staccherà nella zona tratteggiata, ma sarà tangente a tale piano lungo s_1 ed s_2. Ora, si è dimostrato

(²) Una tale equazione si presenta, per es., nel problema delle vibrazioni di una corda di spessore non uniforme.

(³) Essendosi supposta l'equazione omogenea, essa è soddisfatta da $u = 0$.

al § 164 [nota 3], che due superfici integrali non possono essere tangenti lungo una linea se questa non è una caratteristica: poichè il piano (x, t) è anch'esso una superficie integrale, ne segue che s_1 ed s_2 debbono essere due caratteristiche della equazione differenziale.

Studiamo ora, nel caso unidimensionale, il tipo di propagazione ondosa descritto dalla (V, 71) del § 110: esso corrisponde a prendere la u della forma

$$u = g(x) f[\varphi(x) - t] \,, \tag{VIII, 44}$$

dove la forma della funzione f dipende in genere dalle condizioni iniziali, mentre le funzioni g e φ dipendono dalla natura del mezzo. In questa formula rientrano, in particolare, le onde progressive o regressive di una corda vibrante [in tal caso $g = 1$, $\varphi = \pm x/v$] e le onde in mezzo assorbente studiate al § 139 [g rappresentando il fattore esponenziale di assorbimento]. Ora, generalizzando il ragionamento fatto a § 79, si può osservare che, nel caso $g(x) = \text{cost.}$, se si considera un punto che si muova con la legge

$$\varphi(x) - t = c \,, \tag{VIII, 45}$$

[con c costante], in questo punto la u ha sempre lo stesso valore: si può dunque dire che nel piano (x, t) le linee rappresentate dalla (VIII, 45) sono le « linee orarie » della propagazione, e che la velocità di questa è $1/\varphi'(x)$. Per naturale estensione, anche quando la $g(x)$ non è costante, si definiscono le (VIII, 45) come linee orarie della propagazione e la $1/\varphi'(x)$ come velocità di questa.

Vogliamo ora far vedere che se la u del tipo (VIII, 44), con f arbitraria, salvo restrizioni qualitative, soddisfa un'equazione della forma (VIII, 4), che qui riscriviamo con t al posto di y,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu + G = 0 \,, \tag{VIII, 46}$$

le linee orarie della propagazione devono identificarsi con caratteristiche di tale equazione. Ciò si può dimostrare richiamandosi al teorema dato poco sopra, e notando che, se si prende la funzione $f(\xi)$ tale che sia $f(\xi) \neq 0$ per $\xi < c$ e $f(\xi) = 0$ per $\xi > c$, il punto, il cui moto è definito dalla (VIII, 45), è in ogni istante un fronte d'onda; ma si può anche verificarlo direttamente col calcolo seguente.

Supponiamo che la (VIII, 46) ammetta soluzioni del tipo (VIII, 44) con f arbitraria: sostituendo in (VIII, 46) ed ordinando i termini secondo le derivate di f si ha

$$(A\varphi'^2 - 2B\varphi' + C) g f'' + (.....) f' + (.....) f + G = 0 \,,$$

dove i puntini rappresentano espressioni, che non contengono f nè le sue derivate, delle quali non ci interessa la forma. Perchè questa sia soddisfatta per f arbitraria deve anzitutto essere $G = 0$ [ossia l'equazione deve essere omogenea] e poi anche [essendo da escludere che g sia identicamente nullo] deve essere

$$A\varphi'^2 - 2B\varphi' + C = 0 \,. \tag{VIII, 47}$$

Ora, si ha dalla (VIII, 18′) che le caratteristiche della (VIII, 46) hanno per equazione

$$A\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2B\,\frac{dt}{dx} + C = 0\,,$$

e, confrontando con la (VIII, 47), si vede che φ' deve identificarsi col $\dfrac{dt}{dx}$ di una delle due famiglie di caratteristiche e quindi che le linee (VIII, 45) devono appartenere ad una di tali famiglie.

§ 169. Il problema di Cauchy per l'equazione della propagazione del calore.

Passiamo ora a considerare l'equazione

$$\text{(VIII, 48)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,,$$

che è, come si è detto, di tipo parabolico ed ha per caratteristiche le rette $t = \text{cost.}$. Anche in questo caso [come per l'equazione iperbolica] avviene che se la curva γ, cui si riferisce il problema di Cauchy, è tale che alcune caratteristiche la tagliano in più di un punto e se inoltre si impongono alla u le consuete condizioni di regolarità, non si possono assegnare ad arbitrio, su γ, la u e la $\dfrac{du}{dn}$. Precisamente dimostreremo che:

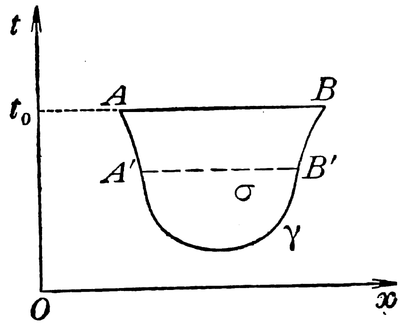

Fig. 151.

« se la curva γ ha gli estremi A, B su una stessa caratteristica $t = t_0$ ed è posta tutta *al disotto* si essa (fig. 151) e se si impone alla u di essere regolare in tutta l'area σ racchiusa da γ e dalla detta caratteristica, la soluzione resta univocamente determinata in tutta σ assegnando su γ soltanto i valori della u [la $\dfrac{du}{dn}$ resta quindi determinata da questi] ».

Per dimostrarlo, supponiamo che vi siano due soluzioni u_1, u_2 della (VIII, 48), entrambe regolari in σ ed assumenti su γ gli stessi valori: la loro differenza $w = u_1 - u_2$ sarà pure regolare in σ, si annullerà su γ, e soddisferà l'equazione

$$\text{(VIII, 49)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\,\frac{\partial w}{\partial t} = 0\,.$$

Il nostro teorema sarà dimostrato se dimostreremo che da ciò segue