

# Appunti per il corso di Meccanica del Continuo

Riccardo Ricci

Università di Firenze, Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica

Anno Accademico 2005-2006

28 gennaio 2008

# Indice

<b>1</b>	<b>Il modello</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione . . . . .	2
1.2	Caratteristiche comuni . . . . .	2
1.2.1	Relazioni cinematiche . . . . .	3
1.2.2	Una formula utile . . . . .	5
1.2.3	L'equazione di continuità . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Le forze</b>	<b>8</b>
2.1	Schema per le forze . . . . .	8
2.2	Il teorema di Cauchy . . . . .	10
2.3	Le equazioni indefinite . . . . .	11
2.3.1	Le equazioni della dinamica . . . . .	12

# Capitolo 1

## I continui

### 1.1 Introduzione

Il modello di un sistema continuo è un modello *fenomenologico* adatto a descrivere sistemi fisici macroscopici nei casi in cui le dimensioni dei fenomeni osservati siano sufficientemente grandi in modo da poter trascurare la struttura molecolare della materia.

Una trave, l'acqua che riempie un bacino, il gas in un recipiente, sono tutti esempi di sistemi che possono essere descritti, entro dati limiti osservativi, con questo modello. Accanto ad assunzioni comuni ci sono notevoli differenze tra questi sistemi, che portano a equazioni, sia per il moto che per l'equilibrio, che possono differire profondamente dal punto di vista matematico. Un caso limite è quello dei corpi rigidi, il cui studio viene affrontato nella Meccanica Razionale: in virtù del fatto che le configurazioni nello spazio di un corpo rigido sono descritte da un numero finito di parametri (sei), le equazioni che ne descrivono il moto formano un sistema di equazioni differenziali ordinarie, identiche a quelle di un sistema finito di punti materiali vincolati a rimanere a distanza fissata tra loro.

I continui *deformabili* invece si possono pensare come sistemi con “infiniti” gradi di libertà e le equazioni di moto assumono la forma di equazioni differenziali alle derivate parziali.

### 1.2 Caratteristiche comuni

Quello che accomuna la descrizione dei sistemi continui è l'assunzione che esista una *funzione di densità*  $\rho(P, t)$  tale che la massa di una porzione  $D$  del sistema sia esprimibile tramite

$$M(D) = \int_D \rho(P, t) dV, \quad (1.1)$$

dove  $dV$  indica l'elemento di volume nello spazio<sup>1</sup>.

Questa assunzione è in contrasto con la struttura atomica della materia, e oggi la distribuzione continua di materia è considerata come una assunzione fenomenologica che permette di studiare l'equilibrio e il moto di corpi macroscopici su scale molto maggiore di quelle atomiche<sup>2</sup>. Questo

<sup>1</sup>Qui assumiamo che il continuo occupi, come realistico fare, una porzione dello spazio tridimensionale. In alcuni casi però una o anche due dimensioni possono essere “trascurate” e si possono quindi adottare modelli di continuo bi- o mono-dimensionali, come p.e. le membrane o le corde. In questo caso la funzione densità avrà “supporto” bi o mono dimensionale e l'elemento di “volume” sarà rispettivamente un elemento di area su una superficie o un elemento di lunghezza su una curva.

<sup>2</sup>La teoria dei continui dominò tutta la fisica del diciannovesimo secolo, e fu definitivamente messa da parte come “teoria fondamentale” della materia solo all'inizio del ventesimo secolo sull'impulso del terzo articolo di Einstein del 1905, e delle ricerche sperimentali di J.B. Perrin, che per questo ricevette il premio Nobel per la Fisica nel 1926.

significa che quando parliamo di “punto” nella teoria dei continui dobbiamo tener conto che non si tratta di un punto geometrico ma di una piccola particella di materiale, tale da preservare le caratteristiche del corpo macroscopico.

### 1.2.1 Relazioni cinematiche

La descrizione delle configurazioni che può assumere un sistema continuo rispetto a un osservatore, rappresentato da un sistema di riferimento  $S = (O, x_1, x_2, x_3)$ , prevede di fissare una regione dello spazio  $C^*$ , detta *configurazione di riferimento*, e una famiglia a un parametro (il tempo  $t$ ) di diffeomorfismi<sup>3</sup>

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), \quad \mathbf{x}^* \in C^*. \quad (1.2)$$

Ad ogni istante  $t$  il continuo occuperà la regione  $C(t) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), \mathbf{x}^* \in C^*\}$ , detta configurazione attuale del continuo. La (1.2), al variare del tempo  $t$  e per ogni fissato  $\mathbf{x}^*$ , ci dà l'equazione di moto del “punto del continuo” identificato dall'etichetta  $\mathbf{x}^*$ .

La velocità del punto di etichetta  $\mathbf{x}^*$  è quindi data da

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t}, \quad (1.3)$$

e la sua accelerazione da

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

Al variare di  $\mathbf{x}^*$ , e prendendo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)$ , la (1.3) fornisce la velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

della particella di continuo che *all'istante  $t$  occupa la posizione  $\mathbf{x}$*  (essendo tale particella in moto, ci si riferisce ad essa anche come alla particella che *transita* per il punto  $\mathbf{x}$ ).

Possiamo anche vedere la (1.3) come una funzione vettoriale che, al tempo fissato  $t$ , associa ad ogni punto dello spazio  $\mathbf{x}$  la velocità della particelle che in quel momento occupa quella posizione: ci riferiremo a questa descrizione come al *campo di velocità* del continuo.

La (1.3) e la (1.5) sono tipiche dei due modi di rappresentare le quantità fondamentali nella descrizione dei continui. Nel primo caso si cerca una descrizione dei fenomeni “seguendo i singoli punti” del continuo. Il continuo è quindi pensato come una sorta di sistema formato da infinite particelle etichettabili e dotate di propria individualità, che possono essere sempre individuate e seguite durante il moto. Questo modo di vedere prende il nome di *descrizione lagrangiana*. Nel secondo caso il problema di individuare le particelle del continuo viene messo in secondo piano e ci si concentra invece su ciò che succede in un punto fissato dello spazio, indipendentemente da quale particella del continuo lo stia attraversando. Questa descrizione, che si adatta bene ai fluidi (liquidi e gas), specialmente quando occupano sempre la stessa porzione di spazio (ovvero  $C(t)$  è sempre lo stesso insieme al variare di  $t$ ), è detta *euleriana*.

Nella descrizione euleriana ha senso quindi calcolare le quantità e le loro variazioni in funzione del tempo, *mantenendo fissa la posizione nello spazio dell'osservatore*. Questo è, p.e., ciò che fa un anemometro quando misura la velocità del vento (il continuo è ovviamente l'aria). Le variazioni temporali di queste misurazioni di velocità saranno quindi espresse dalla

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

che si ottiene dal confronto delle registrazioni della velocità al passare del tempo. La derivata in (1.6) non deve essere confusa con l'accelerazione di una particelle di continuo.

<sup>3</sup>Diffeomorfismo = applicazione dello spazio in sé, differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile.

E' possibile stabilire un legame generale tra le variazioni delle quantità nelle due descrizioni. Indichiamo con  $g$  una quantità qualsiasi (scalare) attribuita al continuo (densità di massa, le singole componenti della velocità in un riferimento cartesiano, temperatura, pressione, etc.). Nella descrizione lagrangiana questa sarà pensata come "attribuita" a una singola particella e la sua rappresentazione matematica sarà

$$g = g(\mathbf{x}^*, t), \quad (1.7)$$

e la sua derivata (parziale) rispetto al tempo, a  $\mathbf{x}^*$  fissato, ci dà la sua variazione temporale nel punto  $\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)$  che sta seguendo il moto del continuo.

L'osservatore euleriano invece potrà osservare variazioni in  $t$  a  $\mathbf{x}$  fissato e variazioni nello spazio (piazzando più rilevatori in punti "vicini") a tempo  $t$  fissato.

Il legame tra queste differenti variazioni si ottiene osservando che da un punto  $\mathbf{x}$  dello spazio, al tempo  $t$ , sta transitando la particella la cui etichetta  $\mathbf{x}^*$  soddisfa  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)$ . Quindi l'osservatore euleriano sta calcolando la quantità

$$g(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), t). \quad (1.8)$$

Derivando rispetto al tempo la relazione (1.8), otteniamo

$$\frac{d}{dt}g(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}g(\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t) \cdot \nabla g(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla g(\mathbf{x}, t), \quad (1.9)$$

dove si è sostituito alla velocità del punto, nella sua espressione lagrangiana  $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)$  il valore del campo di velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  misurato dall'osservatore euleriano (si ricordi che il punto di etichetta  $\mathbf{x}^*$  "sta passando" dal punto  $\mathbf{x}$  nello spazio).

La derivata  $\frac{d}{dt}$  prende il nome di *derivata lagrangiana* o *sostanziale*, mentre le variazioni  $\frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{x}, t)$  e  $\nabla g(\mathbf{x}, t) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}g(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_i$  sono dette *derivate euleriane*.

Particolarmente importante è la formula di passaggio tra la derivata lagrangiana della velocità (che è l'accelerazione del "punto" del continuo) e le rispettive derivate euleriane. Sia ha

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.10)$$

dove il prodotto scalare  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  va inteso come il vettore le cui componenti sono il prodotto scalare della velocità con il gradiente delle corrispondenti componenti di  $\mathbf{v}$ , ovvero

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))_i = \sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (1.11)$$

## Definizioni

Introduciamo un po' della nomenclatura che useremo in seguito.

Nella formulazione euleriana chiameremo *linee di flusso* del campo di velocità quelle curve tali che in ogni loro punto il campo di velocità risulti tangente alla linea stessa (in termini più matematici esse sono dette curve integrali del campo vettoriale). Va notato che se il campo di velocità varia nel tempo, anche le linee di flusso cambiano da istante a istante.

Quindi esse differiscono in genere dalle *traiettorie* delle "particelle" di continuo (nella formulazione lagrangiana); linee di flusso e traiettorie coincidono però quando il campo di velocità (nella rappresentazione euleriana) non varia nel tempo, ovvero la velocità euleriana è *costante nel tempo in ogni punto* (ma può variare da punto a punto). Tali campi sono detti *stazionari*, e le linee di flusso prendono il nome di *linee di corrente*.

Data una linea  $\gamma$  non tangente al campo di velocità, l'insieme delle linee di flusso da essa uscenti è detto *superficie di flusso*; nel caso in cui la curva sia chiusa la superficie è detta *tubo di flusso*. Nel caso stazionario questi prendono il nome rispettivamente di superfici e tubi di corrente.

Dato un campo vettoriale nello spazio tridimensionale è possibile associargli un nuovo campo vettoriale prendendone il rotore. Ricordiamo che, dato  $\mathbf{X}$ , il suo rotore  $\text{rot } \mathbf{X}$  (indicato anche con il simbolo  $\nabla \times \mathbf{X}$ ) è dato dal risultato dello sviluppo formale (rispetto alla prima riga) del determinante

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{X} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Il rotore del campo di velocità  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ , è detto *vorticità* del campo di velocità. La sua importanza è illustrata dal caso particolare in cui il moto del continuo sia un moto rigido: in questo caso la vorticità del campo è costante e coincide con (due volte) la *velocità angolare*,  $2\boldsymbol{\omega}$ , del moto rigido. Nel caso generale possiamo quindi pensare alla vorticità come al campo vettoriale che misura localmente la parte di moto rigido rotazionale (non traslazionale) presente nel campo di velocità.

Un campo di velocità per cui  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  in ogni punto è detto *irrotazionale*.

Data una curva regolare  $\gamma$  si dice *circuitazione* del campo  $\mathbf{v}$  su  $\gamma$  l'integrale

$$C_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}. \quad (1.13)$$

Il legame tra circuitazione e rotore è dato dal teorema di Stokes, che dice che se  $\Sigma(\gamma)$  è una qualsiasi superficie regolare avente  $\gamma$  come bordo, e tale che  $\text{rot } \mathbf{v}$  sia definito per ogni punto di  $\Sigma(\gamma)$ , allora

$$C_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_{\Sigma(\gamma)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma, \quad (1.14)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie e  $d\Sigma$  l'elemento di superficie.

Ne segue che se un campo  $\mathbf{v}$  è irrotazionale e se per ogni curva chiusa  $\gamma$  esiste una superficie  $\Sigma(\gamma)$  di cui  $\gamma$  è il bordo, allora la circuitazione è nulla su qualsiasi curva chiusa: in questo caso il campo è il gradiente di una funzione scalare  $\varphi$ , ovvero

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad (1.15)$$

la funzione  $\varphi$  detta potenziale di velocità<sup>4</sup>.

## 1.2.2 Una formula utile

Tramite l'operatore rotore è possibile riscrivere il legame tra accelerazione e le derivate euleriane della velocità espresso dalla formula (1.10). Abbiamo infatti, come è facile anche se laborioso verificare direttamente,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}, \quad (1.16)$$

<sup>4</sup>Attenzione: un campo può essere irrotazionale ma non essere *globalmente* il gradiente di una funzione. Il controesempio è il campo

$$\mathbf{V} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (x_2 \mathbf{e}_1 - x_1 \mathbf{e}_2)$$

che è irrotazionale ma dove la condizione sulle curve  $\gamma$  è violata. Infatti il campo non è definito in tutti punti della retta  $\{x_1 = x_2 = 0\}$  e quindi non esiste alcuna superficie  $\Sigma(\gamma)$  di cui  $\gamma$  sia il bordo se la curva "gira attorno" alla retta  $\{x_1 = x_2 = 0\}$ . In questo caso abbiamo che  $C(\gamma) = 2k\pi$  dove  $k$  è il numero di giri della curva attorno alla retta.

dove  $\wedge$  indica il prodotto vettore. Da questa formula segue

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \left( \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \right) + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}, \quad (1.17)$$

### 1.2.3 L'equazione di continuità

La prima equazione fondamentale per lo studio del moto di un sistema continuo discende dal principio di conservazione della massa. Fissiamo un istante  $t_0$  e un insieme  $S(t_0)$  di punti del continuo, poi seguiamolo durante il moto fino a un istante  $t$ . I punti che si trovavano in  $S(t_0)$ , a seguito del moto, occuperanno ora una nuova regione  $S(t)$ . Il principio di conservazione della massa ci dice che la quantità di materia contenuta in  $S(t)$  è la stessa che prima era contenuta in  $S(t_0)$ . Possiamo formulare questo principio di conservazione in termini lagrangiani assumendo  $S(t_0)$  come “configurazione di riferimento”. Avremo allora

$$\int_{S(t)} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), t) d\mathbf{x} = \int_{S(t_0)} \rho(\mathbf{x}^*, t_0) d\mathbf{x}^*. \quad (1.18)$$

Inoltre, per la continuità del moto, i punti che appartenevamo al bordo di  $S(t_0)$  occupano ora il bordo di  $S(t)$ . Possiamo derivare la (1.18) rispetto al tempo, e otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(t)} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t), t) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.19)$$

Il calcolo di questa derivata però non è facile: esso infatti deve tener conto sia della variazione “locale” della funzione di densità sia del fatto che il dominio di integrazione  $S(t)$  varia rispetto a  $t$ .

Possiamo però osservare lo stesso fenomeno dai punti di vista euleriano: fissiamo una regione dello spazio  $S$  che, in un certo intervallo di tempo, resta sempre all'interno del continuo. In questo caso la variazione della massa contenuta da  $S$  in un intervallo  $dt$  sarà espressa dalla differenza

$$\Delta M(dt) = \int_S \rho(\mathbf{x}, t + dt) d\mathbf{x} - \int_S \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.20)$$

e la variazione istantanea dal limite di  $\Delta M(dt)/dt$  per  $dt \rightarrow 0$ , ovvero

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Poiché ora il dominio di integrazione è fissato, possiamo derivare sotto il segno di integrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.22)$$

Resta però da legare questa quantità al moto del continuo. Nell'intervallo di tempo  $dt$  alcune particelle del continuo avranno abbandonato la regione  $S$  a seguito del loro moto, mentre altre particelle, che prima non erano nella regione, saranno entrate in  $S$ . Per far ciò queste particelle devono attraversare il bordo  $\partial S$  della regione  $S$ . Ogni particella che attraversa la frontiera “trasporta” con sé una quantità (o meglio una “densità”) di massa pari a  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .

Se  $dt$  è sufficientemente piccolo, una particella che occupava la posizione  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$  si troverà il  $\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt$  all'istante  $t + dt$ . Questa particella sarà uscita da  $S$  se, e solo se,  $\mathbf{x} \in S$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt \notin S$ , mentre sarà entrata se  $\mathbf{x} \notin S$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt \in S$ .

Se il punto  $\mathbf{x}$  è sufficientemente lontano dal bordo  $\partial S$ , i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt$  apparterranno entrambi a  $S$  o al suo complementare. Quando invece il punto  $\mathbf{x}$  è sufficientemente vicino al bordo

$\partial S$ , allora il punto  $\mathbf{x} + \mathbf{v}dt$  potrà trovarsi nel complementare dell'insieme che contiene  $\mathbf{x}$ . Per far ciò il punto che occupava la posizione  $\mathbf{x}$  deve avere una componente di velocità non nulla nella direzione perpendicolare al bordo, ovvero dovremo avere, indicando con  $\mathbf{n}_e$  la normale *esterna* al bordo,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e \neq 0$ . In particolare avremo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e > 0$  per i punti che *escono* da  $S$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e < 0$  per quelli che entrano.

Passando al limite per  $dt \rightarrow 0$  avremo quindi che il bilancio tra particelle uscenti e quelle entranti è dato dall'integrale

$$\int_{\partial S} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{x}) d\Sigma, \quad (1.23)$$

ovvero dal flusso del campo vettoriale attraverso la superficie  $\partial S$ . Poiché questo flusso è positivo quando le particelle uscenti sono di più di quelle entranti, esso sarà uguale alla variazione di particelle dentro  $S$  cambiata di segno, e possiamo infine scrivere la legge di bilancio della massa, in forma integrale,

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial S} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{x}) d\Sigma = 0, \quad (1.24)$$

L'integrale (1.23) può essere espresso tramite un integrale di volume per il teorema di Gauss, che ci dice che per un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  vale

$$\int_{\partial S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{x}) d\Sigma = \int_S \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (1.25)$$

dove  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  rappresenta la divergenza del campo vettoriale  $\mathbf{v}$ , ed è la funzione scalare definita da

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (1.26)$$

Ne segue che possiamo riscrivere la (1.24) nella forma

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_S \operatorname{div} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.27)$$

Infine possiamo fruttare il fatto che  $S$  è un'arbitraria regione dentro il continuo, ovvero la (1.27) deve valere per qualsiasi sottoinsieme  $S$  del continuo. Ciò è possibile solo se la funzione integranda è nulla in ogni punto, ovvero se si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (1.28)$$

per ogni punto  $\mathbf{x}$  ad ogni tempo  $t$ . La (1.28) prende il nome di *equazione di continuità* o di *conservazione della massa*.

Ponendo  $\mathbf{u} = \rho \mathbf{v}$  in (1.26), otteniamo  $\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ , che ci permette di scrivere (1.28) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.29)$$

Possiamo infine osservare che i primi due addendi nella (1.29) ci danno la derivata lagrangiana della densità, e quindi possiamo riscrivere *l'equazione di continuità in forma lagrangiana*

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.30)$$



## Capitolo 2

# Equazioni indefinite

Qui prendiamo in considerazione il problema dell'equilibrio di un continuo e deduciamo delle equazioni generali valide per ogni tipo di continuo<sup>1</sup>.

Questo sistema di equazioni è di per sé incompleto, le incognite che appaiono nelle equazioni superano in numero le equazioni stesse. Per questo vengono spesso chiamate *equazioni indefinite*. La “chiusura” del sistema delle equazioni di equilibrio (o del moto) avviene introducendo delle relazioni tra le incognite presenti nelle equazioni, che possono eventualmente coinvolgere altre quantità incognite come, p.e., la temperatura. Queste relazioni sono note con il nome di *relazioni costitutive* e di fatto discriminano il comportamento di classi diverse di continui iniziando dalla distinzione tra fluidi e solidi, a loro volta suddivisi a seconda del loro modo di muoversi-deformarsi in funzione delle forze applicate.

### 2.1 Schema per le forze

Consideriamo un continuo che occupi una parte  $\mathcal{C}$  dello spazio, e consideriamo una sua qualsiasi sotto parte  $\mathcal{S}$ , che supponiamo contenuta nell'interno di  $\mathcal{C}$  in modo che anche il bordo  $\partial\mathcal{S}$  sia interno a  $\mathcal{C}$ .

L'ipotesi che facciamo divide le forze in due categorie: le *forze di massa* e le *forze di superficie*.

Con il termine forze di massa intendiamo quelle che si esercitano su ogni parte  $\mathcal{S}$  del continuo *indipendentemente* dal fatto che  $\mathcal{S}$  sia contenuta nel continuo. L'esempio tipico (e quasi esclusivo nelle applicazioni) di questo tipo di forze è il peso. Ogni sotto parte del continuo è “pesante” indipendentemente dal fatto di essere parte o no di  $\mathcal{C}$ . L'altro esempio, correlato a questo, è quello delle forze centrifughe nel caso di un sistema che si trovi in un riferimento non inerziale.

Queste sono forze le cui reazioni sono generalmente applicate a punti al di fuori del continuo<sup>2</sup>. Chiameremo queste forze *forze di massa*.

Ovviamente quando isoliamo una parte  $\mathcal{S}$  di continuo dal resto, il suo equilibrio sarà determinato, oltre che dalle forze di massa, dall'interazione di questa parte con il resto del continuo stesso.

---

<sup>1</sup>In realtà ci sono modelli per la descrizione dei sistemi continui che portano a sistemi di equazioni più complessi. Un esempio famoso è quello dei cosiddetti continui di Cosserat nella teoria dell'elasticità.

<sup>2</sup>Questo è vero solo approssimativamente, ogni parte del continuo, avendo una massa, esercita una attrazione gravitazionale sul resto del continuo. Questa forza di “autoattrazione” è generalmente trascurabile in confronto al peso nelle applicazioni alla meccanica degli oggetti quotidiani ma non può essere trascurata se p.e. stiamo costruendo un modello continuo per lo studio dell'evoluzione di ammassi stellari. Altro esempio importante è quello di corpi elettrostaticamente carichi, tipo gas ionizzati dove si devono tener in conto le forze elettrostatiche (almeno quelle, poi ci sono i fenomeni di induzione dovuti al moto delle cariche e ...).

Per chiarire, se abbiamo un serbatoio di liquido in quiete, una regione qualsiasi all'interno del liquido non cade sotto l'effetto della gravità perché viene sostenuta dal resto del liquido (spinta di Archimede).

Il modello standard della meccanica dei continui assume che questa azione si eserciti su  $S$  solo attraverso il bordo della regione  $\partial S$ . Inoltre si assume che l'azione esercitata in ogni punto di  $\partial S$  assuma la forma di una forza (per unità di superficie) e che dipenda solo dalla direzione della normale  $\mathbf{n}$  alla superficie stessa<sup>3</sup>. Chiameremo queste forze *forze di superficie*.

Quindi in ogni punto del continuo avremo una densità (volumetrica) di forze di massa che rappresenteremo in genere nella forma  $\rho(P)\mathbf{f}(P)$ , dove  $\rho(P)$  è la densità di massa nel punto  $P$ , e una funzione vettoriale  $\Phi(P, \mathbf{n})$ , dipendente oltre che dal punto  $P$  da un versore  $\mathbf{n}$ , detta *stato di tensione*, che rappresenterà, per ogni punto  $P$  la tensione ovvero la (densità superficiale di) forza che si esercita su una superficie passante per  $P$  e avente  $\mathbf{n}$  come normale<sup>4</sup>. Il principio di azione e reazione ci dice che la forza esercitata dal resto del continuo sulla porzione in esame deve essere equilibrata dalla quella esercitata da questa porzione sul resto del continuo. Poiché la superficie di separazione è la stessa, e cambia solo il verso del vettore normale, avremo che

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = -\Phi(P, -\mathbf{n}). \quad (2.1)$$

L'equazione (vettoriale) indefinita della statica dei continui stabilisce un legame tra  $\mathbf{f}$  e  $\Phi$ . Essa parte dall'assunzione che *per ogni sottoparte  $S$  del continuo devono valere le equazioni cardinali della meccanica*.

Prendiamo quindi in considerazione la parte  $S$ . Su di essa si esercitano delle forze di massa la cui densità indicheremo con  $\rho\mathbf{f}$  e quindi la forza di massa totale che si esercita su  $S$  è data da

$$\int_S \rho(P)\mathbf{f}(P)dV, \quad (2.2)$$

dove  $dV$  denota l'elemento di volume.

Le forze di superficie invece esercitano la loro azione attraverso il bordo  $\partial S$  e la forza complessiva si ottiene dall'integrale superficiale

$$\int_{\partial S} \Phi(P, \mathbf{n})dS, \quad (2.3)$$

dove  $dS$  indica l'elemento di superficie.

La prima equazione cardinale stabilisce che le forze totali agenti su una qualsiasi parte del continuo devono annullarsi e quindi che i due integrali (2.2) e (2.3) devono avere somma vettoriale nulla

$$\int_S \rho(P)\mathbf{f}(P)dV + \int_{\partial S} \Phi(P, \mathbf{n})dS = 0, \quad (2.4)$$

La seconda equazione cardinale si scrive semplicemente scegliendo un punto qualsiasi  $O$  e imponendo, in modo analogo a quanto fatto per le forze, l'annullarsi dei momenti

$$\int_S (P - O) \wedge \rho(P)\mathbf{f}(P)dV + \int_{\partial S} (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n})dS = 0, \quad (2.5)$$

<sup>3</sup>Il modello di Cosserat prevede invece di tenere in conto, oltre a una distribuzione di forze, anche una distribuzione di momenti sulla superficie di separazione. Anche l'ipotesi di dipendenza dalla sola direzione normale non è sufficiente quando si vogliono studiare continui non omogenei, p.e. continui bifase, dove le forze che si esercitano attraverso le superfici di separazione delle fasi dipendono anche dalla curvatura della superficie di separazione (tensione superficiale)

<sup>4</sup>Per convenzione si assume che se la superficie è chiusa,  $\mathbf{n}$  sia la normale esterna.

## 2.2 Il teorema di Cauchy

La dipendenza del vettore  $\Phi$  dalla direzione della normale  $\mathbf{n}$  è determinata dal *teorema di Cauchy*:

**Teorema 2.2.1** In ogni punto del continuo è definito un tensore simmetrico  $\mathbf{T}(P)$ , detto *tensore degli sforzi*, tale che lo sforzo  $\Phi(P, \mathbf{n})$  è dato da

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(P)\mathbf{n}, \quad (2.6)$$

ovvero, in un sistema di coordinate cartesiano ortogonale,

$$\Phi^k(P, \mathbf{n}) = \sum_{h=1}^3 T_h^k(P)n^h. \quad (2.7)$$

Per dimostrare il teorema prendiamo, all'interno del continuo, un tetraedro  $\mathcal{T}$  con tre facce a due due perpendicolari tra loro.

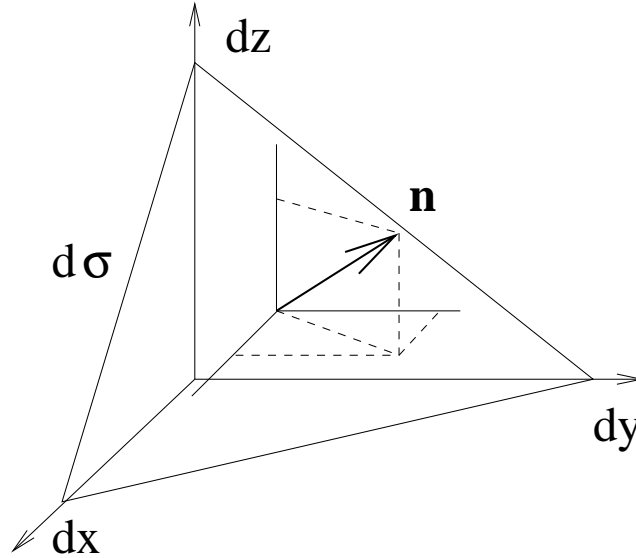


Figura 2.1: Tetraedro elementare

Scegliamo gli assi coordinati centrati nel vertice intersezione delle facce perpendicolari, che quindi giaceranno sui tre piani coordinati  $x_i = 0$  e avranno per versori normali esterni i vettori della base cambiati di segno,  $-\mathbf{e}_i$ . Sia inoltre  $\mathbf{n}$  la direzione normale alla giacitura della quarta faccia del tetraedro, quindi  $\mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{n})\mathbf{e}_i$ . Se indichiamo con  $d\sigma$  l'area della faccia perpendicolare a  $\mathbf{n}$  e con  $d\sigma_i$  le facce sui piani cartesiani, si ha che  $d\sigma_i = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{n})d\sigma$ .

Applichiamo ora a  $\mathcal{T}$  le equazioni indefinite dell'equilibrio. Assumiamo che il tetraedro sia sufficientemente piccolo da poter considerare costanti sia le forze di massa al suo interno sia lo stato di tensione sulla sua superficie (in questo caso viene trascurata solo la dipendenza dal punto nello spazio; lo stato di tensione continua a dipendere dalla direzione normale alla superficie). La prima delle equazioni indefinite diventa

$$\rho(P)\mathbf{f}(P)dV + \sum_{i=1}^3 \Phi(P, -\mathbf{e}_i) \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{n})d\sigma + \Phi(P, \mathbf{n})d\sigma = 0. \quad (2.8)$$

Ora mandiamo a zero le dimensioni del tetraedro (mantenedo le facce parallele): l'elemento di volume è un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'elemento di superficie e quindi da (2.8) (ricordando la (2.1)) otteniamo la relazione

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \Phi(P, \mathbf{e}_i) \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \Phi(P, \mathbf{e}_i) n^i. \quad (2.9)$$

Possiamo infine introdurre il tensore (matrice)  $\mathbf{T}(P)$  le cui colonne coincidono con i vettori  $\Phi(P, \mathbf{e}_i)$  e la (2.9) diventa la (2.7).

Un calcolo analogo (ma assai complicato) fatto a partire dalla seconda equazione cardinale, ci porta alla relazione

$$T_i^k = T_k^i, \quad (2.10)$$

ovvero alla simmetria del tensore degli sforzi.

## 2.3 Le equazioni indefinite

Il teorema di Cauchy permette di formulare la prima equazione cardinale in forma differenziale.

Riscriviamo la (2.4), per ciascuna delle tre componenti scalari, introducendo la forma di  $\Phi(P, \mathbf{n})$  data da (2.7)

$$\int_S \rho(P) f^k(P) dV + \int_{\partial S} \sum_{h=1}^3 T_h^k(P) n^h dS = 0. \quad (2.11)$$

La funzione integranda nell'integrale superficiale in (2.11) ha la struttura di prodotto scalare di un campo vettoriale, le cui componenti sono date dagli elementi della  $k$ -esima riga del tensore degli sforzi, con il versore della normale esterna sul bordo del dominio  $S$ .

Possiamo quindi usare il teorema della divergenza e riscrivere la (2.11) trasformando l'integrale di superficie in un integrale di volume

$$0 = \int_S \rho f^k dV + \int_S \operatorname{div} \left( \sum_{h=1}^3 T_h^k \mathbf{e}_h \right) dV = \int_S \rho(P) f^k dV + \int_S \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} T_h^k dV. \quad (2.12)$$

Poiché il dominio  $S$  per cui sono scritte le equazioni è arbitrario, ne segue che la funzione integranda deve essere nulla, ovvero, in ogni punto  $P$  del continuo devono essere verificate le tre equazioni differenziali

$$\rho(P) f^k + \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} T_h^k = 0. \quad (2.13)$$

A sua volta il termine  $\sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} T_h^k$  può essere pensato come la  $k$ -esima componente di un vettore che viene tradizionalmente indicato con la notazione  $\operatorname{div} \mathbf{T}$ , e l'equazione viene riscritta nella forma "vettoriale"

$$\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0. \quad (2.14)$$

**Nota:** nei problemi di statica dei sistemi continui le forze di massa sono generalmente note, mentre non è noto lo stato di tensione interna rappresentato dal tensore  $\mathbf{T}$ . Le (2.13) sono quindi un sistema di equazioni necessari per la determinazione delle componenti del tensore simmetrico  $\mathbf{T}$ . Poiché quest'ultimo ha sei componenti, in generale non è possibile determinarlo solo dalle (2.13). Inoltre le (2.13) sono un sistema di equazioni alle derivate parziali che devono essere accompagnate da opportune condizioni alla frontiera esterna continuo, che possono essere espresse in termini di forze di superficie assegnate.

### 2.3.1 Le equazioni della dinamica

Le equazioni della dinamica si ottengono dalle equazioni della statica per mezzo del Principio di d'Alembert che dice che le equazioni della dinamica si ottengono dalle equazione della statica sostituendo alle forze applicate la differenza tra le forze applicate e quelle inerziali (dette anche "forze perdute"). Nel caso dell'equazione indefinita (2.14) questo significa che al posto del termine  $\rho \mathbf{f}$  dobbiamo inserire la differenza  $\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a})$ , dove  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione del punto del continuo. Quindi si ha

$$\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0. \quad (2.15)$$

Ricordiamo che il campo vettoriale  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  può essere espresso tramite la derivata lagrangiana del campo di velocità e quindi possiamo riscrivere la (2.15) come

$$\rho \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad (2.16)$$

o ancora, sfruttando l'espressione euleriana del campo di accelerazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad (2.17)$$

che può essere ancora riscritta usando la (1.17)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad (2.18)$$