LEZIONE LUNEDÌ 13 MARZO 2017

- argomenti trattati : meccanica anolonoma + esempi applicativi

spazio euclideo
- distanza tramite prod. scalare
- si fissa un origine per avere spazio vettoriale

dinamica di n punti nello spazio E^3

→ ciascun punto è descritto da 3 coordinate (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, n$

→ SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI : comprende tutte le possibili posizioni → E^{3n}

possono esistere relazioni tra i punti
queste sono date dai VINCOLI, ovvero funzioni

vincolo bilatero $\quad f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n, t) = 0$

- scleronomi (*)
- reonomi (t)

cinematico : compaiono velocità e posizione!

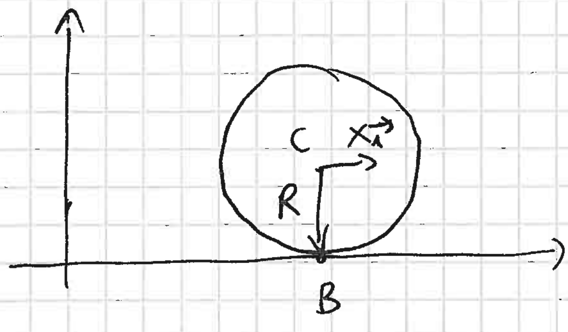
geometrico se $f(x_1, \dots, z_n, t) = 0$ → non dipende dalle velocità

- un vincolo cinematico è integrabile se può essere espresso come vincolo geometrico.

DEF. Un vincolo cinematico integrabile è detto OLONOMO, altrimenti si chiama ANOLONOMO

si ASSUME
compatibilità (non vuoto)
indipendenza (rango max)

esempio (rotolamento puro)



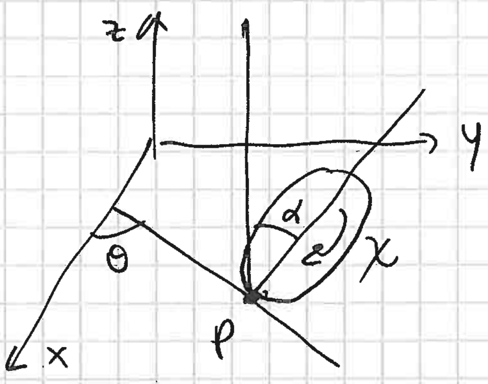
$\vec{v}(B) = 0$ istantaneamente

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(B) + \vec{\omega} \wedge (C - B)$$
$$= -\dot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{j}$$
$$= R\dot{\varphi}\,\vec{i}$$

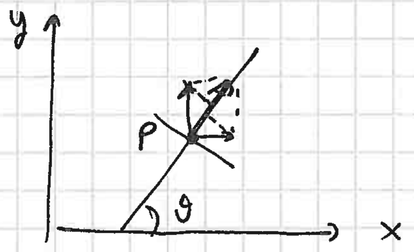
$\Rightarrow \dot{x} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{x = R\varphi}$

olonomo

esempio (falling disc)



$P = (x, y)$



$$\begin{cases} dx = R\,d\chi \cos\vartheta \\ dy = R\,d\chi \sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\chi}\cos\vartheta \\ \dot{y} = R\dot{\chi}\sin\vartheta \end{cases}$$

oppure
$$\begin{cases} R\,d\chi = dx\cos\vartheta + dy\sin\vartheta \\ 0 = -dx\sin\vartheta + dy\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta = R\dot{\chi} \\ -\dot{x}\sin\vartheta + \dot{y}\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

non integrabile $\longrightarrow$ ANOLONOMO

---

assumiamo di avere c vincoli, di cui m olonomi, p anolonomi

$$c = m + p$$

allora $Q = \{ (x_1, \dots, z_n) \mid F(x_1, \dots, z_n) = 0 \}$

spazio delle configurazioni

→ teorema del Dini o funzione inversa

coordinate esprimibili tramite $l = 3n - m$
parametri indipendenti $q_1, \dots, q_l$ (coordinate lagrangiane)

- lo spazio delle configurazioni sarà una VARIETÀ DIFFERENZIABILE

↳ esempio per far capire cosa sono
geodesiche come traiettorie più corte
come esempio di utilità delle varietà.

→ ~~xi~~ vincoli ANOLONOMI diventano:

$$f_i(q_1^1, \dots, q_e^l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_e, t) = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

→ si assume che i vincoli siano omogenei e lineari nelle velocità

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(q^i, t)\, \dot{q}^k = 0 \longrightarrow A(q)\dot{q} = 0 \quad \text{in particolare}$$

<u>esempio</u> (falling disc)

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta = R\dot{\chi} \\ -\dot{x}\sin\vartheta + \dot{y}\cos\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & R \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = 0$$

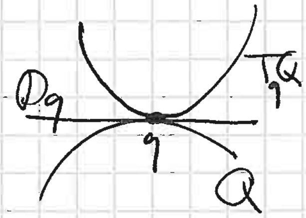
<u>PRINCIPIO DI HAMILTON</u> — prima per sistemi olonomi

- alternativa per ricavare eq. di Lagrange II specie
- anche detto principio di minima azione (es. luce)

---

i vincoli olonomi determinano la dim. di Q

quelli anolonomi determinano le velocità



TQ spazio tangente sul quale sono definite le velocità

↳ $D_q = \{ \delta q \in T_q Q \mid A(q)\,\delta q = 0 \}$ ← soddisfa i vincoli

insieme di tutti i possibili spostamenti virtuali → sottospazio lineare dello spazio tangente in q

PRIMA VINCOLI OLONOMI

PRINCIPIO DI HAMILTON

introduzione nel significato di coordinate lagrangiane ovvero Q come spazio ridotto

Q spazio delle configurazioni

q^i coordinate lagrangiane del sistema

definito dai vincoli pg. 5

$L = T + U$

T energia cinetica

U potenziale

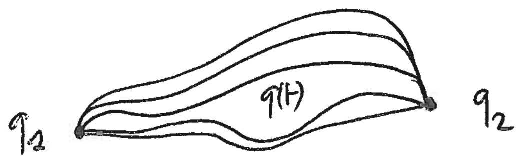
famiglia di curve $q(t,s) : [t_1, t_2] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Q$

possibili strade tra due stati del sistema

connettono due punti q_1 e q_2, tali che:

1) $q(t,0) = q(t) \quad \forall\, t \in [t_1, t_2]$

2) $q(t_1, s) = q_1 \ , \ q(t_2, s) = q_2 \quad \forall\, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$



non indico i

si definisce l'AZIONE come $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q)\, dt$

scalare, dimensione energia × tempo

THM (principio di Hamilton) Le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

punto di minimo

seguono dalla stazionarietà dell'azione S, ovvero il principio di Hamilton sceglie le curve dalla condizione

$$\delta S = 0,$$

con le variazioni prese su curve lisce in Q con estremi fissati.

modo per eliminare i λ dalle eq. di Lagrange I specie

DIM. La derivata variazionale è definita come

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q)\, dt =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t,s), \dot q(t,s))\, dt \quad ;$$

inoltre

$$\delta q = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} q(t,s).$$

Pertanto

$$0 = \delta S = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t,s), \dot q(t,s))\, dt =$$ — inverto con integrale e uso regola della catena

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q \; dt =$$ — integro per parti

$$= \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q \; dt =$$

estremi fissi

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q \; dt \qquad \forall q$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

✓

$\lrcorner$

equazioni di Hamilton

momento coniugato $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$

prodotto scalare

Hamiltoniana $H(p,q) = \langle p, \dot q \rangle - L(q, \dot q)$

$\rightarrow$ per poter esprimere H come funzione di p e q deve risultare

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j} \right) \neq 0$$

Hessiano

• se possibile la Lagrangiana è detta iperregolare

THM. (Hamilton equations) Per una Lagrangiana iperregolare, le equazione di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni canoniche di Hamilton

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

DIM. Scriviamo $L = \langle p, \dot q \rangle - H(p,q)$

dalla definizione di azione

$$\Rightarrow \quad 0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \langle p, \dot q \rangle - H(q,p)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta \langle p, \dot q \rangle - \delta H(q,p)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle \delta p, \dot q \rangle + \langle p, \delta \dot q \rangle - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle \delta p, \dot q - \frac{\partial H}{\partial p} \rangle - \langle \dot p + \frac{\partial H}{\partial q}, \delta q \rangle \, dt +$$

$$+ \cancel{\left[\langle p, \delta q \rangle \right]_{t_2}^{t_1}} \qquad \forall\, \delta q, \delta p$$

quindi

$$\begin{cases} \dot{q} - \dfrac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} + \dfrac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad \checkmark$$

∎

VINCOLI OLONOMI E VINCOLI ANOLONOMI

- n punti in $\mathbb{R}^3$ $\qquad P_i = (x_i, y_i, z_i) \quad i = 1, \dots, n$
- vincolo bilatero

$$f(x_1, y_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_n, t) = 0 \qquad \underline{\text{cinematico}}$$

anche no

- scleronomi (o fissi) se indipendenti dal tempo
- reonomi (o mobili) se dipendono dal tempo

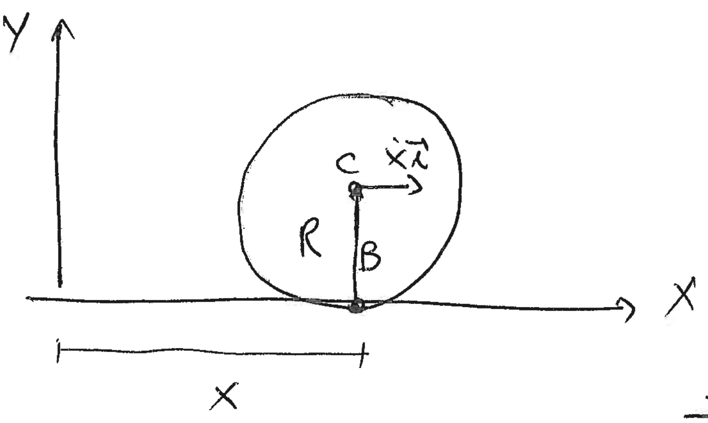
geometrico: $\quad f(x_1, y_1, \dots, z_n, t) = 0$

un vincolo cinematico è integrabile se il vincolo cinematico può essere integrato ed espresso come vincolo geometrico.

DEF. Un vincolo cinematico integrabile è detto olonomo, altrimenti viene detto anolonomo.

EXM (rotolamento puro).

anche no



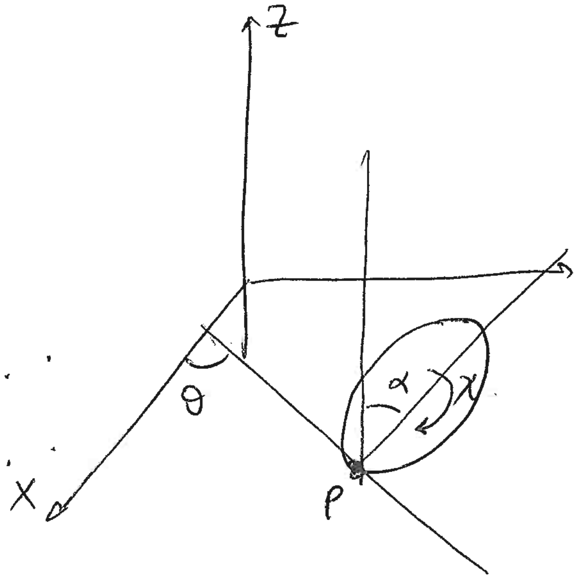
$\vec{v}(B) = 0$ istantaneamente

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(B) + \vec{\omega} \wedge (C - B) = -\dot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{j} = R\dot{\varphi}\,\vec{i}$$

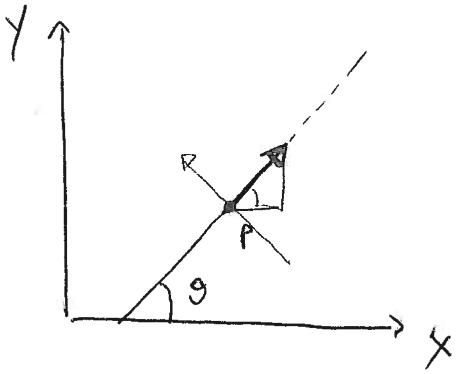
$$\Rightarrow \underline{\dot{x} = R\dot{\varphi}}$$

$$\Rightarrow x = R\varphi \qquad \underline{\text{olonomo}}$$

EXM. (falling disc)



$P = (x,y)$



$$\begin{cases} dx = R\, d\chi \cos\vartheta \\ dy = R\, d\chi \sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = R\dot\chi \cos\vartheta \\ \dot y = R\dot\chi \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\, d\chi = dx \cos\vartheta + dy \sin\vartheta \\ 0 = -dx \sin\vartheta + dy \cos\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot x \cos\vartheta + \dot y \sin\vartheta = \dot\chi R \\ -\dot x \sin\vartheta + \dot y \cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

non integrabile $\Rightarrow$ anolonomo

---

assumiamo di avere C vincoli, m olonomi e r anolonomi

$C = m + r$

$$Q = \{(x_1, y_1, \dots, z_n) \mid F(x_1, y_1, \dots, z_n) = 0\}$$

spazio delle configurazioni

$\dim Q = \ell\,, \qquad \ell = 3n - m$

$$\Rightarrow f_i(q^1, \dots, q^\ell, \dot q^1, \dots, \dot q^\ell) = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

vincoli anolonomi

~~omogenei, ovvero~~

omogenei e lineari nelle velocità, ovvero

$$A(q)\,\dot q = 0 \qquad\qquad A \in M(\gamma \times l)$$

EXM. (falling disc)

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & -R \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot \chi \end{pmatrix} = 0$$

→ per sistemi anolonomi con γ vincoli anolonomi indipendenti, il numero di gradi di libertà è

$$g = l - \gamma$$

① eq. di Lagrange d'Alembert

MECCANICA ANOLONOMA

possibilità di aggiungere l'effetto dei vincoli come forze esterne assumendo

$$\sum_{i=1}^{l} F_i\,\delta q^i = 0$$

constraint force

moltiplicatori di Lagrange (vettore)

abbiamo da trovare anche $\underline{\lambda}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}}_{\text{anche posto dal principio di Lagrange - D'Alembert}} = \lambda A(q) \quad ① \quad \text{con} \quad A(q)\,\dot q = 0$$

tipo eq. di Lagrange di I specie quindi si vogliono eliminare i λ.

→ ci sono dei problemi concettuali con tale approccio legati all'ipotesi sulle forze.

VOGLIAMO TROVARE UN MODO MIGLIORE PER SCRIVERE LE EQUAZIONI

$$\left(D_q = \{ \delta q \in T_qQ \mid A(q)\,\delta q = 0 \} \right.$$ spazio vettoriale $)$

|| approccio variazionale anche se i sistemi anolonomi non sono propriamente variazionali

(variazioni prima o dopo i vincoli.

si usa il PRINCIPIO DI LAGRANGE – D'ALEMBERT : le equazioni di moto sono determinate da

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t))\, dt$$

ovvero $\delta q \in \mathcal{D}_q(t)$

δq soddisfano i vincoli e $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.
Inoltre $q(t)$ curva soddisfa i vincoli

→ si prendono le variazioni prima di imporre i vincoli.

come in precedenza, si ha

$$-\delta L = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i = 0$$

soddisfano i vincoli
non tutti gli spostamenti virtuali sono ammissibili

anolonomi

sfruttando il fatto che i vincoli sono indipendenti, possiamo usare il teorema del Dini (funzione inversa) ed esplicitare le funzione vincolare rispetto ad un certo set di variabili, ovvero si può dividere

$$q = (r, s) \in R^{n-k} \times \mathbb{R}^k$$

e quindi i vincoli $A(q)\dot{q} = 0$ posso essere scritti in forma esplicita come

$$\boxed{\dot{s}^a + A^a_\alpha(r,s)\, \dot{r}^\alpha = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \delta s^a + A^a_\alpha \delta r^\alpha = 0$$

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) \delta r^\alpha + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a} \right) \delta s^a$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha}\right) = A^a_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a}\right)$$ essendo δr arbitrario

$\alpha = 1, \dots, n-k$

$$+ \quad \dot s^a = -A^a_\alpha \dot r^\alpha$$ (*)

$a = 1, \dots, k$

DEF. Lagrangiana vincolata introducendo i vincoli, ovvero

$$L_c(r^\alpha, s^a, \dot r^\alpha) = L(r^\alpha, s^a, \dot r^\alpha, -A^a_\alpha \dot r^\alpha)$$

scriviamo (*) tramite la Lagrangiana vincolata.
Si vede che

$$\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot r^\alpha} - A^b_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha}\dot r^\beta\right)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial s^a} = \frac{\partial L}{\partial s^a} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial s^a}\dot r^\beta\right)$$

~~non dipende dal tempo~~

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} + A^b_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\right) - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha}\dot r^\beta\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} + A^b_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^b} - \left(\frac{d}{dt}A^b_\alpha\right)\frac{\partial L}{\partial \dot s^b} +$$

$$- \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha}\dot r^\beta\right)$$

$$A^a_\alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a}\right) = A^a_\alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^a} - \frac{\partial L_c}{\partial s^a} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial s^a}\dot r^\beta\right)\right)$$

$$\frac{\partial A^b_\alpha}{\partial r^\beta}\dot r^\beta + \frac{\partial A^b_\alpha}{\partial s^a}\dot s^a \longrightarrow -\frac{\partial A^b_\alpha}{\partial s^a} A^a_\beta \dot r^\beta \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} + \cancel{A^b_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^b}} + \left(\frac{d}{dt}A^b_\alpha\right)\frac{\partial L}{\partial \dot s^b} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha}\dot r^\beta\right) =$$

$$= \cancel{A^a_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s^a}} - A^a_\alpha \frac{\partial L_c}{\partial s^a} - A^a_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\frac{\partial A^b_\beta}{\partial s^a}\dot r^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A^a_\alpha \frac{\partial L_c}{\partial s^a} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot s^b}\left(\frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha} - A^a_\alpha\frac{\partial A^b_\beta}{\partial s^a} - \frac{\partial A^b_\alpha}{\partial r^\beta} + A^a_\beta \frac{\partial A^b_\alpha}{\partial s^a}\right)\dot r^\beta$$

definiamo

$$B^b_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial A^b_\alpha}{\partial r^\beta} - \frac{\partial A^b_\beta}{\partial r^\alpha} + A^a_\alpha \frac{\partial A^b_\beta}{\partial s^a} - A^a_\beta \frac{\partial A^b_\alpha}{\partial s^a}\right)$$

si ha

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot r^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A^a_\alpha \frac{\partial L_c}{\partial s^a} = -\frac{\partial L}{\partial \dot s^b} B^b_{\alpha\beta}\dot r^\beta}$$

equazioni di Lagrange - d'Alembert
per sistemi anolonomi.