

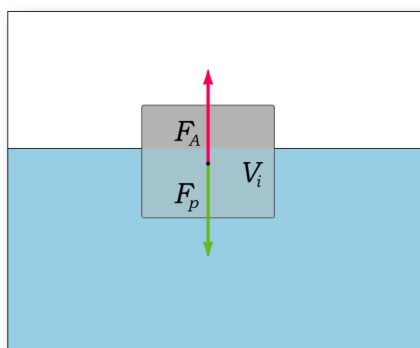
# Capitolo 1

## I fluidi

I fluidi sono stati fin dall'antichità oggetto di interesse scientifico oltre che naturale e tecnico. Secondo la storia conosciuta il primo a captare la somiglianza tra aria ed acqua fu il grande filosofo Aristotele (Calcidica 384 a.C.- Calcide 322 a.C.), il quale attribuì ad esse una proprietà comune chiamata *sottigliezza*, l'antenata della densità.

Se l'idea aristotelica aveva centrato il concetto qualitativo, il primo a pervenire ad una corretta e sorprendente teoria sul comportamento dei fluidi fu lo scienziato siracusano Archimede (Siracusa 287 a.C. circa - Siracusa 212 a.C.), precursore della scienza idrostatica.

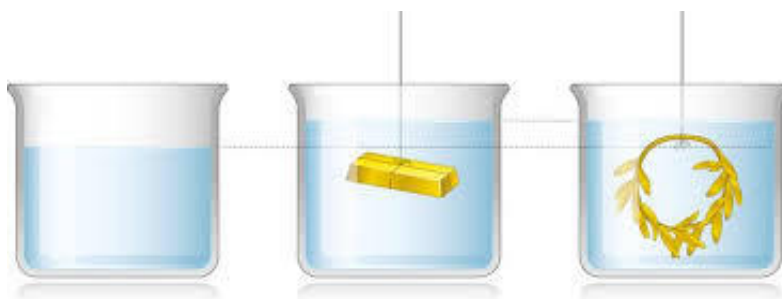
Si narra che le sue grandi scoperte siano legate ad un curioso aneddoto: il tiranno di Siracusa Gerone II, sospettando che la sua corona, appena forgiata dall'orafo di corte, non fosse stata realizzata con oro puro, decise di rivolgersi al mondo scientifico di cui Archimede era massimo esponente. Il mito vuole che lo scienziato, ormai rassegnato a non trovare soluzione, abbia cercato pace presso le terme pubbliche, dove si accorse di un fatto che fino a quel giorno era passato inosservato: immergendo il corpo nella vasca, il livello dell'acqua si alzava. Grazie a tale semplice intuizione, il genio siracusano poté formulare



**Figura 1.1:** Il principio di Archimede sul galleggiamento dei corpi

i famosi **Principi di Archimede**: *”Qualsiasi solido più leggero di un fluido, se collocato nel fluido, si immergerà in misura tale che il peso del solido sarà uguale al peso del fluido spostato. Un solido più pesante di un fluido, se collocato in esso, discenderà in fondo al fluido e se si peserà il solido nel fluido, risulterà più leggero del suo vero peso, e la differenza di peso sarà uguale al peso del fluido spostato.”*

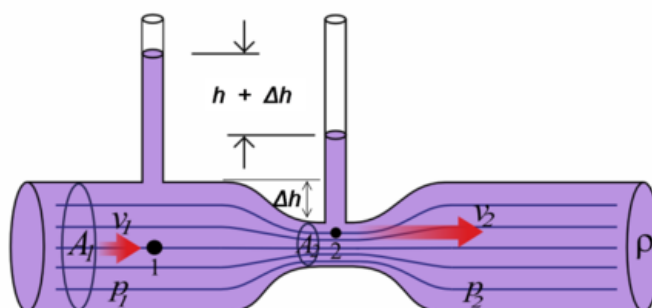
Tale scoperta rese possibile la misura della densità della corona confrontando semplicemente gli spostamenti di liquido in seguito all’immersione, in un recipiente colmo d’acqua, del cimelio e di un blocco d’oro puro di pari peso: ma lo stesso peso non corrispondeva a quanto pare allo stesso volume. Se



**Figura 1.2:** La corona spostava una quantità maggiore di acqua rispetto al blocco d’oro: l’orefice aveva sostituito una parte di oro con argento

Archimede con il trattato *Sui Galleggianti* aveva gettato le basi della scienza idrostatica, precursore della scienza fluidodinamica fu senza dubbio Leonardo da Vinci, pittore, filosofo ed ingegnere. Leonardo infatti, osservando il corso dei fiumi, il flusso nei canali e la forma dei vortici, capì che, per quanto potesse sembrare caotico, il movimento dell’acqua seguiva schemi prevedibili.

*”L’acqua scorre sempre più velocemente quando è costretta attraverso una strozzatura e l’aumento della velocità dell’acqua è proporzionale al restringimento della sezione del canale di passaggio.”* Questa straordinaria scoperta



**Figura 1.3:** Legge di Bernoulli

fu in seguito chiamata: **Principio di continuità**. Altro grande passo nello studio della fluidodinamica venne compiuto con il medico e matematico Daniel Bernoulli (Groninga 1700 - Basilea 1782), il quale dedicò tutta la vita allo studio dei fluidi avanzando e provando importanti teorie. Egli fu il primo a trovare un metodo semplice ed efficace per misurare la pressione di un fluido che scorre in un vaso sanguigno ed, in generale, in un canale; riuscì inoltre a trovare la relazione che lega pressione e velocità in un fluido in movimento. Molti studiosi hanno contribuito alla crescita delle conoscenze riguardanti i fluidi e le loro applicazioni ingegneristiche; ne sono stati ricordati solo alcuni allo scopo di evidenziare i principi cardine dell'idrostatica e della fluidodinamica.

## 1.1 Statica e dinamica dei fluidi

I fluidi, liquidi o gassosi, sono dei sistemi continui incapaci di sostenere sforzi di taglio in condizioni di riposo; l'azione di tali sforzi è infatti responsabile della continua deformazione subita dai fluidi.

Facendo un semplice confronto tra il comportamento di un corpo solido ed un corpo fluido, per esempio un sasso e l'acqua, osserveremo che tutte le parti del sasso, se colpito da una pala, si muoveranno simultaneamente, mentre l'acqua, colpita dalla stessa pala, schizzerà dappertutto.

**Definizione 1.1.** *Si dicono fluidi i sistemi continui nei quali in condizioni statiche sono presenti soltanto sforzi di compressione.*

Quindi un fluido è caratterizzato dall'assenza di forze di taglio e questo comporta una proprietà molto interessante, conosciuta come Teorema di Pascal.

### 1.1.1 I fluidi perfetti

**Teorema 1.1. Teorema di Pascal.** *In un fluido incomprimibile uno stato di pressione prodotto in qualunque sua parte viene trasmesso inalterato in ogni suo punto e in ogni sua direzione.*

Con questo teorema, Pascal definì fluidi perfetti come sistemi continui nei quali sono presenti soltanto forze di pressione in ogni direzione.

Alla classe dei fluidi perfetti, appartengono i gas ed alcuni fluidi (come l'acqua), ma possono essere considerati perfetti, in buona approssimazione, tutti i fluidi con bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ne consegue che in un fluido, essendo assenti sforzi di taglio, sono presenti solo direzioni principali, per le quali la struttura del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  è diagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

**Proprietà 1.1.** *In un fluido in equilibrio il tensore degli sforzi è diagonale.*

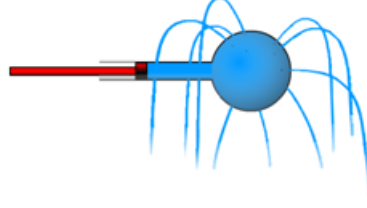


Figura 1.4:

Dalla definizione di fluido secondo Pascal, si può provare il cosiddetto Teorema di Pascal, conosciuto con questo nome in letteratura, nella seguente forma.

**Teorema 1.2. Teorema di Pascal.** *In un fluido in equilibrio, il tensore degli sforzi ha la forma*

$$\mathbb{T}(P, t) = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

dove  $p$  è uno scalare positivo detto **pressione**, cioè gli sforzi sono tutti uguali.

*Dimostrazione.* Usiamo il teorema di Cauchy con il tempo  $t$  fissato,

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = \Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z.$$

Sostituendo in  $\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$  si ha

$$\Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$$

Utilizzando nel primo membro la definizione di fluido e nel secondo membro l'espressione del vettore  $\mathbf{n}$ , l'espressione sopra può essere riscritta come

$$-p(P, \mathbf{e}_x, t)n_x \mathbf{e}_x - p(P, \mathbf{e}_y, t)n_y \mathbf{e}_y - p(P, \mathbf{e}_z, t)n_z \mathbf{e}_z = -p(P, \mathbf{n}, t)(n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z).$$

Uguagliando i due membri si ottiene per ogni direzione  $\mathbf{n}$

$$p(P, \mathbf{n}, t) = p(P, \mathbf{e}_x, t) = p(P, \mathbf{e}_y, t) = p(P, \mathbf{e}_z, t),$$

da cui

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, t) \mathbf{n}.$$

□

Un esperimento molto semplice, ma capace di illustrare efficacemente lo stato di pressione di un corpo in un fluido, consiste nell'immergere totalmente un uovo in acqua: si osserva che la forma del tuorlo rimane invariata.

Un corpo immerso in un fluido è sottoposto ad una pressione di compressione, lungo le direzioni principali, di uguale intensità, ovvero si trova in uno stato di

pressione idrostatica. Ne consegue che non è presente uno stato di tensione deviatorico, ovvero il corpo non subirà cambiamenti di forma ma solo di volume. Di stessa natura è lo stato di pressione a cui sono sottoposte le bolle di sapone, internamente ed esternamente, mentre fluttuano nell'aria; esse infatti rimangono sferiche.

### Equazione di stato

La pressione  $p$ , la densità  $\rho$  e la temperatura  $\theta$  in un fluido sono legate tramite l'equazione di stato.

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (1.3)$$

### Equazione fondamentale della statica

Grazie al Teorema di Pascal sappiamo che le forze esercitate all'interno di un fluido a riposo sono esclusivamente forze di pressione, ovvero un fluido perfetto è caratterizzato dall'assenza di sforzi di taglio.

Tenendo conto del Teorema di Pascal (1.1), possiamo scrivere

$$\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbb{T} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f} - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f} - \nabla p = 0$$

e quindi l'**equazione fondamentale della statica dei fluidi** ha la forma

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p. \quad (1.4)$$

Nel caso della presenza del solo peso, l'equazione della statica si riduce a

$$\rho \mathbf{g} = \nabla p. \quad (1.5)$$

Si osservi che la pressione è stata introdotta con il segno meno affinché risulti positiva per sforzi di compressione.

### Equazione fondamentale della dinamica

Continuiamo a chiamare perfetto anche in condizioni dinamiche un fluido il cui tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  rimanga diagonale anche durante il movimento.

Fanno parte di questa classe tutti quei fluidi che in buona approssimazione hanno bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ricaviamo adesso l'**equazione di moto per un fluido perfetto** applicando la seconda legge di Newton

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p \quad (1.6)$$

essendo  $\mathbf{a}$  il vettore accelerazione,  $\rho$  la densità del fluido ed  $\mathbf{f}_m$  le forze specifiche di massa.

Dividendo per la densità  $\rho$ , otteniamo l'espressione del vettore accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

che può essere riscritta sotto forma di derivata materiale in rappresentazione euleriana

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.7)$$

Questa equazione, detta **equazione indefinita della dinamica**, contiene cinque incognite, che possono essere ridotte assumendo valida l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.8)$$

ed introducendo inoltre la **funzione di stato**  $F$  che regola il legame tra la pressione  $p$  (pressione idrodinamica), la temperatura  $\theta$  e la densità  $\rho$  del fluido in movimento

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (1.9)$$

Per risolvere completamente il problema di un fluido in movimento è comunque necessario determinare un'ultima relazione. L'informazione mancante riguarda in particolare la densità  $\rho$ , infatti fino ad ora sono state fatte considerazioni del tutto indipendenti dalla natura del fluido; è necessario quindi fornire un'ulteriore informazione di carattere fisico che espliciti il *legame tra pressione e densità*; questo può essere possibile attraverso un'approssimazione del fenomeno fisico. Esistono infatti alcune situazioni particolari, a dire il vero molto frequenti, che permettono di semplificare il modello del fluido:

- **Fluidi barotropici:** quando l'equazione di stato (1.9) è indipendente dalla temperatura  $\theta$ , il fluido si trova sottoposto a trasformazioni isoterme oppure adiabatiche e la densità può essere espressa in funzione della pressione

$$p = p(\rho) \Rightarrow \rho = \rho(p). \quad (1.10)$$

Da sottolineare il fatto che nella (1.10) non si ha dipendenza dalla temperatura ed è utilizzabile esclusivamente nelle trasformazioni adiabatiche.

- **Fluidi barotropici con influenza della temperatura:** qualora non fosse possibile trascurare la temperatura, il fluido si considera ancora barotropico, ma si deve fare uso delle leggi della termodinamica e dell'equazione del trasporto del calore per definire l'incognita temperatura.
- **Fluidi incomprimibili:** la densità di un fluido è costante

$$\rho = \text{costante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (1.11)$$

e dall'equazione di continuità ricaviamo la relazione

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.12)$$

Questo accade nei liquidi che sono considerati incompressibili, ed in generale con buona approssimazione la densità viene considerata costante nei moti in aria a bassa velocità, circa 0,3 Mach.

**Nota 1.1.1.** Si ricordi che il numero di Mach ( $Ma$ ) è il rapporto della velocità di un corpo in un fluido e la velocità del suono nel fluido: Questo numero permette di stabilire l'importanza degli effetti di comprimibilità di un fluido. Come abbiamo già detto, se il numero di Mach è minore di 0,3 l'errore che si commette considerando la densità costante è trascurabile.

Possiamo ricapitolare che il problema di un fluido perfetto in movimento è determinato attraverso le seguenti relazioni fondamentali:

- l'equazione di moto (1.7) ;
- l'equazione di continuità (1.8);
- la funzione di stato (1.9);
- una relazione di approssimazione del fenomeno fisico.

Il sistema di equazioni che si ottiene è noto con il nome di **Equazioni di Eulero** dalle quali, nel caso di fluidi incompressibili, si ottengono le equazioni di Bernoulli.

## 1.2 Trinomio di Bernoulli

Introduciamo il trinomio di Bernoulli

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}$$

che possiamo scrivere nella forma più generale

$$B = \frac{1}{2}v^2 - U + \mathcal{P},$$

dove  $\mathcal{P}$  è l'energia potenziale delle pressioni, cioè la primitiva della funzione  $\frac{1}{\rho(p)}$ , ovvero

$$\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho(p)} dp + \mathcal{P}_0$$

dove  $\mathcal{P}_0$  è la costante di integrazione. Si noti che la pressione dipende dal punto e dal tempo, quindi  $\mathcal{P}(P, t) = \mathcal{P}(p(P, t))$ .

**Teorema 1.3.** *Nei moti stazionari (o permanenti, ovvero quando la velocità  $\mathbf{v}$  è localmente costante) di un fluido perfetto barotropico, sottoposto a forze conservative, il trinomio di Bernoulli si conserva in ogni punto del fluido.*

*Dimostrazione.* In caso di forze conservative l'equazione di moto  $\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \nabla p$  diventa

$$\mathbf{a} = \nabla(U - \mathcal{P})$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $\mathbf{v}$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= \nabla(U - \mathcal{P}) \cdot \frac{dP}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{d}{dt} (U - \mathcal{P}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue la costanza di  $B$

$$B = \frac{1}{2} v^2(t) - \mathcal{U}(t) + \mathcal{P}(P(t)) = \text{costante}, \quad \forall t$$

dove  $\mathcal{U}(t) = U(P(t))$ . □

**Nota 1.2.1.** I trinomio di Bernoulli rappresenta l'energia totale per unità di massa del fluido.  $\frac{1}{2}v^2$  è l'energia cinetica,  $U$  quella potenziale della forza peso (forze esterne),  $\mathcal{P}$  corrisponde all'energia potenziale delle forze interne.

Il lettore dovrebbe essersi accorto che il teorema precedente è stato enunciato seguendo il punto di vista lagrangiano.

Passiamo ora alla formulazione euleriana del trinomio di Bernoulli.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \nabla (\mathcal{U} - \mathcal{P}) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) \quad (1.14)$$

Nel caso di

1. moti stazionari  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ ,
2. irrotazionali  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$

si ha

$$\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) = 0,$$

ovvero

$$B = \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} = \text{costante}.$$

**Teorema 1.4.** *In un moto stazionario di un fluido perfetto barotropico soggetto a forze di massa conservative, le superfici energetiche sono simultaneamente superficie di corrente e di vortice.*



Ricordiamo le definizioni. Le linee di flusso sono quelle linee che sono tangenti alla velocità del fluido, esse corrispondono alle curve integrali. Per ovvie ragioni fisiche le linee di flusso non si possono incrociare fra loro. La superficie di flusso si ottiene considerando tutte le linee di flusso che passano per una curva fissata.

Se il moto è stazionario allora le linee di flusso prendono il nome di linee di corrente. Analogamente si hanno le superfici di corrente.

Le linee tangenti al campo vettoriale del rot  $\mathbf{v}$  si chiamano linee di vortice. Analogamente si hanno le superfici di vortice. Quando le curve per cui passano le linee di flusso e quelle di corrente sono chiuse si hanno i tubi di flusso ed i tubi di corrente.

### Moti irrotazionali

L'equazione di Eulero si riduce per i moti stazionari a

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla B.$$

Essendo  $\nabla B$  normale alle superfici  $B = \text{costante}$ , queste superfici sono tangenti sia al vettore  $\mathbf{v}$  che al vettore  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  (se  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ ).

Se ne deduce che  $B$  ha lo stesso valore in tutti i punti del fluido ovvero tutti i punti hanno la stessa energia specifica  $B$ .

ESEMPIO 1.2.1. *Liquido pesante* Si consideri un fluido incompressibile e pesante, il trinomio assume la forma

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho},$$

che essendo costante si può scrivere come somma di tre quote

$$B = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}.$$

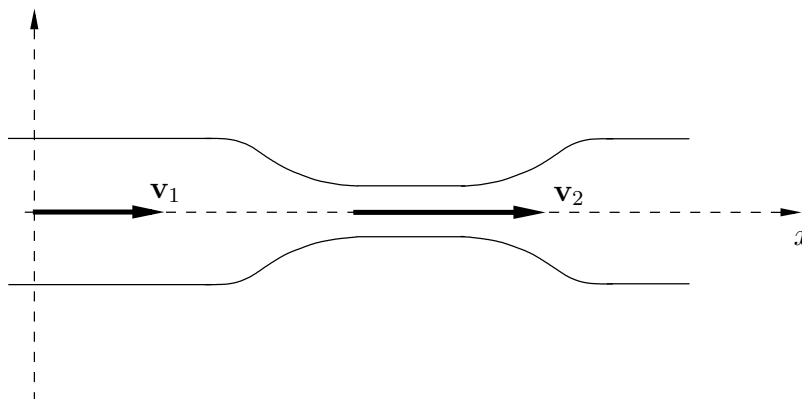
Ogni addendo è dimensionalmente una lunghezza

- $\frac{v^2}{2g}$  è la **quota cinetica**. La quota cinetica è la quota da cui si deve lasciar cadere un grave perché acquisti la velocità  $v$ ;
- $z$  è la **quota effettiva**, in cui si trova il punto ;
- $\frac{p}{\gamma}$  è la **quota piezometrica**. La quota piezometrica è l'altezza di una colonna del fluido che produce sul fondo la pressione  $p$ .

ESEMPIO 1.2.2. *Teorema di Torricelli*. Si consideri un recipiente che contiene un liquido, la cui superficie libera si trovi ad altezza  $h$  rispetto al fondo del recipiente, dove è praticato un foro da cui fuoriesce il liquido. Il liquido nel recipiente è mantenuto alla stessa altezza facendo attenzione che il moto risulti stazionario e senza vortici. Calcoliamo la velocità di uscita del liquido dal foro.

Sulla superficie libera si ha  $B = \frac{p}{\gamma}$ , mentre nel punto in cui fuoriesce il liquido si ha  $B = \frac{v^2}{2g} - h + \frac{p}{\gamma}$ . Quindi utilizzando la costanza del trinomio di Bernoulli (moto stazionario e non vorticoso), si conclude che  $v = \sqrt{2gh}$ .

**ESEMPIO 1.2.3. Tubo di Venturi.** Si consideri ancora un fluido in moto stazionario e non vorticoso che si muove in un tubo, come in figura (1.5) La



**Figura 1.5:** Tubo di Venturi.

costanza del flusso attraverso le sezioni del tubo (Legge di Castelli) implica che la velocità sarà più alta nella strozzatura del tubo. Inoltre il trinomio di Bernoulli si mantiene costante e la pressione diminuirà in corrispondenza della stessa strozzatura. Si chiama effetto Venturi la depressione che avviene a valle della strozzatura. È bene osservare che nella strozzatura il moto del fluido dovrà risentire poco di quello che accade nelle regioni di tubo a monte ed a valle, dove le pareti non sono più orizzontali.

**Nota 1.2.2. Flussi irrotazionali.** Per verificare se un flusso irrotazionale resta tale nel tempo, è necessario avere una legge di variazione per il  $\text{rot } \mathbf{v}$ . A tal fine calcoliamo il rotore di ogni elemento al primo membro dell'equazione di moto (1.7)

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + g \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0,$$

ovvero tenendo conto della costanza del trinomio di Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

dalle quali si deduce che se il flusso è inizialmente irrotazionale, si mantiene tale durante il moto.

### 1.3 Il campo delle velocità

Sia  $\mathbf{v}(x, t)$  il campo delle velocità nel punto  $\mathbf{x}$  del fluido, ricordiamo che abbiamo già introdotto precedentemente il gradiente di velocità

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Sviluppiamo ora in serie fino al 1° ordine nell'intorno del punto  $\mathbf{x}$  la velocità, ottenendo

$$v_i(\mathbf{x}') \simeq v_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})(x'_k - x_k), \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Se decomponiamo il tensore  $\nabla \mathbf{v}$ , rappresentato dalla matrice (1.16), in parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} + \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T}{2} = \mathbb{S} + \Omega$$

allora possiamo riscrivere lo sviluppo nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (1.18)$$

dove le matrici  $\mathbb{S}$  ed  $\Omega$  sono valutate nel punto  $\mathbf{x}$  ed operano come al solito col prodotto righe per colonne.

In particolare vediamo come opera  $\Omega$

$$\Omega \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

È noto che ad ogni tensore antisimmetrico si può associare un vettore; nel nostro caso introdotto

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_z$$

si può scrivere

$$\Omega \mathbf{y} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}. \quad (1.19)$$

Tornando al nostro problema, lo sviluppo al primo ordine (1.18) si scrive come

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (1.20)$$

Definiamo il vettore vorticità

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

e riscriviamo lo sviluppo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{\mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{deformazione}}. \quad (1.21)$$

Lo sviluppo al primo ordine si può interpretare come un atto di moto locale dato dalla somma di un atto di moto rigido con velocità di trascinamento  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  e velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  e di una componente di deformazione.

Il tensore  $\mathbb{S}$  è rappresentato da una matrice reale e simmetrica. È ben noto che una tal matrice ammette 3 autovalori reali e 3 autovettori. Nel nuovo riferimento delle direzioni degli autovettori l'intorno del punto  $\mathbf{x}$  si accorcia e si allunga nelle direzioni principali; in quelle direzioni l'atto di moto è una deformazione pura.

Si noti che quanto è stato detto si riferisce ad una visione locale del flusso di velocità.

## 1.4 Fluidi viscosi

### 1.4.1 Introduzione ai fluidi viscosi

Il modello dei fluidi perfetti che si basa sulle equazioni di Eulero è un modello detto di approssimazione di ordine zero. Nel modello di Eulero non si tengono conto degli sforzi di taglio e ciò ne limita l'applicazione a problemi in cui sono presenti pareti ed ostacoli.

Facciamo un esempio.

**ESEMPIO 1.4.1.** Si consideri un fluido perfetto incomprimibile fra due piani  $z = 0$  e  $z = H$  e se ne determini il campo di velocità stazionario con  $\mathbf{v} = v_x(x, z)\mathbf{e}_x$  ed in presenza della forza peso. Applichiamo l'equazione di Eulero

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) \quad (1.22)$$

limitandoci alle due componenti  $x$  e  $z$ . Calcoliamo intanto

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_y \wedge v_x \mathbf{e}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \mathbf{e}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z, \\ \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Sostituendo in (1.22) si ottiene

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x = \nabla (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

ovvero nelle due componenti, tenendo conto dell'espressione di  $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( -gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \end{cases} . \quad (1.23)$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{p}{\rho} = -gz + c(x).$$

Scriviamo anche l'equazione di incomprimibilità  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , che implica

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

e dalla prima equazione di (1.23), si può ricavare  $c(x)$ ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \implies \frac{dc}{dx} = 0 \implies c = \text{costante}.$$

Quindi il campo di velocità  $v_x(z)$  rimane indeterminato. In questo modello l'assenza degli sforzi di taglio non fa influenzare fra loro i piani  $z = \text{costante}$ .

### 1.4.2 Fluidi viscosi

Fino ad ora abbiamo considerato fluidi ideali caratterizzati esclusivamente da forze agenti in direzione normale e quindi gli sforzi di taglio erano assenti. Prendiamo adesso in considerazione una classe più ampia e generale di fluidi dove, oltre alle forze agenti in direzione normale, siano presenti anche sforzi di taglio, responsabili del trasferimento dei momenti. In generale quando si verificano cambiamenti di velocità entro brevi distanze, gli sforzi di taglio non possono essere trascurati. I fluidi che presentano tali caratteristiche sono detti **fluidi viscosi**.

Ci chiediamo come possiamo caratterizzare un campo di velocità in modo tale che non appaia in quiete in nessun sistema di riferimento e la risposta naturale è che dobbiamo cercare un campo che non deve coincidere col campo di velocità di un moto rigido. Il nuovo tensore degli sforzi deve contenere il tensore dei fluidi perfetti più un termine che si annulli quando il fluido compie un moto rigido. In componenti dovrà essere

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Ricordiamo le proprietà che hanno i moti rigidi e teniamo in mente che  $\sigma_{ij}$  deve dipendere linearmente dalle derivate

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Pensiamo al campo delle velocità decomposto in parte simmetrica e antisimmetrica.

1. La parte simmetrica  $\frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2}$ , che abbiamo chiamato tensore di velocità di deformazione, in componenti

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

ha la proprietà che è nulla per un moto rigido. Il nome di deformazione viene proprio da questo fatto che per i moti rigidi la deformazione è zero.

2. Inoltre i moti rigidi sono solenoidali dovendosi conservare i volumi e  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Nella prossima sezione rivediamo con maggiori dettagli come si può caratterizzare il tensore degli sforzi per i fluidi viscosi.

## 1.5 Equazioni di Navier Stokes

Consideriamo quindi la seguente relazione lineare giustificata dal teorema di Cauchy

$$\text{Forza agente su } S \text{ per unità di area} = -p(x, t)\mathbf{n} + \mathbb{T}(x, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.24)$$

dove  $\mathbb{T}$  è il tensore degli sforzi con le seguenti proprietà:

1.  $\mathbb{T}$  dipende linearmente dal gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{v}$ , ovvero è collegato a  $\nabla \mathbf{v}$  attraverso una qualche trasformazione lineare in ogni punto;
2.  $\mathbb{T}$  è invariante rispetto a rotazioni rigide, ovvero data una matrice ortogonale  $\mathbb{U}$  risulta

$$\mathbb{T}(\mathbb{U}\nabla \mathbf{v}\mathbb{U}^{-1}) = \mathbb{U}\mathbb{T}(\nabla \mathbf{v})\mathbb{U}^{-1}; \quad (1.25)$$

3.  $\mathbb{T}$  è simmetrico.

Dalla proprietà di simmetria segue l'esclusiva dipendenza di  $\mathbb{T}$  dalla parte simmetrica di  $\nabla \mathbf{v}$ , quindi solo dalla deformazione  $\mathbb{D}$ , poichè

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (1.26)$$

Essendo  $\mathbb{T}$  una funzione lineare di  $\mathbb{D}$ , anche i suoi autovalori saranno funzioni lineari di  $\mathbb{D}$ ; inoltre per la seconda proprietà, scegliendo una matrice ortogonale  $\mathbb{U}$  per permutare due autovalori di  $\mathbb{D}$ , essa permuterà anche i corrispondenti autovalori di  $\mathbb{T}$ .

Segue che le uniche funzioni lineari in grado di soddisfare tali caratteristiche sono della forma

$$T_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\eta d_i \quad (1.27)$$

dove  $T_i$  sono gli autovalori di  $\mathbb{T}$ , mentre  $d_i$  quelli di  $\mathbb{D}$  con  $i = 1, 2, 3$ .  
Ricordando che

$$d_1 + d_2 + d_3 = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.28)$$

si ottiene la seguente espressione di  $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\eta\mathbb{D} \quad (1.29)$$

dove  $\mathbb{I}$  è la matrice identità.

Tale relazione può essere riscritta nel seguente modo

$$\mathbb{T} = 2\eta \left[ \mathbb{D} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} \right] + \eta_v(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I}. \quad (1.30)$$

Le costanti  $\eta$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il primo ed il secondo **coefficiente di viscosità**, mentre  $\eta_v$

$$\eta_v = \lambda + \frac{2}{3}\eta \quad (1.31)$$

è il **coefficiente di viscosità di volume**.

Per la seconda legge di Newton la variazione del flusso deve essere uguale alla forza applicata su di esso

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} d\mathbf{v} = \int_{\partial V_t} (p \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds$$

e facendo uso del *teorema del trasporto e della divergenza*, otteniamo le **equazioni di Navier-Stokes**

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + (\lambda + \eta)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (1.32)$$

dove

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{v}$$

è il laplaciano di  $\mathbf{v}$ .

Insieme all'equazione di continuità e all'equazione dell'energia, le equazioni di Navier-Stokes descrivono il moto di un fluido viscoso comprimibile.

Nel caso di un fluido incomprimibile omogeneo ( $\rho = \rho_0 = \text{costante}$ ), le equazioni di Navier-Stokes assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

dove  $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$  è il coefficiente di viscosità cinematica, mentre  $p' = \frac{p}{\rho_0}$ .  
Quindi per i fluidi newtoniani avremo il seguente sistema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}). \end{cases} \quad (1.33)$$

Per la risoluzione del sistema è necessario imporre un'ulteriore condizione: oltre ad assumere  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , situazione in cui il flusso non attraversa il bordo ma si muove solo tangenzialmente ad esso, aggiungiamo la condizione che sulle pareti del solido la velocità tangenziale sia nulla, condizione di non scivolamento

$$\mathbf{v} = 0.$$

**ESEMPIO 1.5.1. Moto di Poiseuille.** Supponiamo di avere due piani infiniti paralleli con un fluido che scorre al loro interno con velocità lungo un'unica direzione. Questo moto è il cosiddetto moto di Poiseuille.

Sia il fluido viscoso pesante incomprimibile in moto stazionario in una regione di lunghezza  $L$  ed altezza  $H$  con i due piani paralleli a quota  $y = 0$  e  $y = H$ . Il fluido a quota  $y = 0$  ha una pressione iniziale  $p_{in}$  nel punto di ascissa  $x = 0$  e una pressione finale  $p_{out}$  nel punto di ascissa  $x = L$ .

Trattiamo il problema in due dimensioni considerando l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  secondo l'asse  $\mathbf{e}_y$ . Il campo è unidimensionale, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\mathbf{v}(x, y) = v_x(x, y)\mathbf{e}_x$$

nell'ipotesi di conoscere i valori della pressione agli estremi della regione.

Essendo il moto incomprimibile e stazionario, deve essere  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , se la soluzione esiste, essendo la velocità lungo un'unica direzione, allora questa soluzione deve essere costante lungo la direzione  $x$  ovvero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \implies v_x = v_x(y). \quad (1.34)$$

L'equazione di moto di Navier-Stokes si riduce a

$$\nabla \left( gy + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\eta \nabla^2 v), \quad (1.35)$$

con le condizioni al contorno  $v(0) = v(H) = 0$ , che corrisponde ad un sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( gy + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

Dalle due ultime due equazioni (dalla seconda in realtà) si ottiene subito

$$p = -\rho gy + g(x), \quad (1.37)$$

con  $g(x)$  funzione incognita. La pressione è funzione lineare della quota come nel caso statico. Sostituiamo ora il valore della pressione nella componente di (1.36) secondo la direzione  $\mathbf{e}_x$ , ottenendo

$$\frac{dg}{dx}(x) = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}(y) = G,$$



pertanto  $\frac{dg}{dx}$  è una funzione costante, che indichiamo con  $G$ , e  $g(x)$  è una funzione lineare affine. Quindi la legge con cui varia la pressione diventa

$$p = -\rho gy + Gx + b,$$

con  $G$  e  $b$  costanti da determinarsi. Imponendo, per  $y = 0$ , in  $x = 0$  e  $x = L$  i valori di pressione  $p_{in}$  e  $p_{out}$  rispettivamente, si ottiene  $b = p_{in}$  e  $G = \frac{\Delta p}{L}$  dove  $\Delta p = p_{out} - p_{in}$ . L'andamento della velocità è dato dall'equazione

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2}(y) = \frac{\Delta p}{\eta L},$$

dopo una prima integrazione si ha

$$\begin{cases} \int_0^y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y') dy' = \int_0^y \frac{\Delta p}{\eta L} dy', \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(0) = \frac{\Delta p}{\eta L} y. \end{cases} \quad (1.38)$$

e dopo una seconda integrazione si ha

$$\begin{cases} \int_y^h \frac{\partial v_x}{\partial y}(y') dy' = \frac{\Delta p}{\eta L} \int_y^h y' dy', \\ v_x(y) - v_x(H) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right). \end{cases} \quad (1.39)$$

$$v(y) = \frac{G}{2\eta}(y^2 - Hy).$$

In conclusione il profilo di velocità fra i due piani paralleli è parabolico. Il modulo dello sforzo di taglio è  $\eta|v'(y)| = G\left|y - \frac{H}{2}\right|$ , ovvero è nullo al centro fra i due piani e massimo alle pareti.

**Esercizio 1.5.1.** *Come esercizio lasciamo allo studente di studiare il problema dell'esempio precedente nel caso di geometria assiale. Si tralasci per semplicità l'accelerazione di gravità.*

**ESEMPIO 1.5.2.** Studiamo il modello precedente nel caso si trascuri l'accelerazione di gravità, nel caso di un canale lungo  $L$  e limitato anch'esso da due piani distanti  $2H$ . Siano  $p_{in}$  e  $p_{out}$  le pressioni in ingresso ed uscita e sia la differenza di pressione  $\Delta p = p_{out} - p_{in} < 0$ .

Con le stesse notazioni, possiamo scrivere il sistema di quattro equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

dove la prima equazione discende dall'equazione di continuità. Dalle ultime due equazioni si ricava che  $p = p(x)$ , ed infine dalla seconda si ottiene l'equazione risultante

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = G = \text{costante},$$

poiché le due funzioni indipendenti di diverse variabili indipendenti. Dalla prima ( $\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \text{costante}$ ) si ricava

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{H}x + p_{in}$$

Nella seconda equazione ( $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = \text{costante} = \frac{\Delta p}{\eta L}$ ) aggiungiamole condizioni di non slittamento sulla parete (velocità nulla sulle pareti)

$$v_x(-H) = v_x(H) = 0.$$

Effettuata l'integrazione si ha

$$v_x(y) = v_x(H) + \frac{\Delta p}{\eta L} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right),$$

e per la condizione di non slittamento si ottiene il profilo parabolico della velocità

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (H^2 - y^2).$$

Vediamo adesso, relativamente a questo esempio, come è possibile adimensionalizzare questo tipo di equazioni.

Scegliendo una lunghezza caratteristica  $L$  ed una velocità caratteristica  $V$ , adimensionalizziamo le grandezze  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $t$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^a &= \frac{\mathbf{v}}{V} \\ \mathbf{x}^a &= \frac{\mathbf{x}}{L} \quad t^a = \frac{tV}{L} \end{aligned}$$

ottenendo così l'equazione di Navier-Stokes per fluidi newtoniani adimensionalizzata

$$\frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + \mathbf{v}^a \cdot \nabla \mathbf{v}^a = -\nabla(p - U) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^a \quad (1.41)$$

dove  $U$  è il potenziale di  $\mathbf{g}$ , mentre  $Re$  è un numero adimensionale detto numero di Reynolds che fisicamente rappresenta il rapporto tra le forze di gravità e le forze viscosi.

La soluzione della (1.41) risulta valida se il numero di Reynolds assume valori piccoli caratteristici dei flussi in regime laminare.

### 1.5.1 Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-stokes

Vediamo alcune proprietà di scalatura delle equazioni di Navier-Stokes introducendo dei parametri adimensionali.

Consideriamo un fluido incomprimibile e supponiamo un dominio rettangolare di lunghezza  $L$  ed altezza  $H$  per il flusso, con moto in direzione della verticale discendente  $x$  in presenza dell'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$ .

L'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes, essendo  $\mathbf{v} = (u_x, u_y)$  sono

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \rho g, \\ \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (1.42)$$

siamo quindi in presenza di

1. tre variabili indipendenti  $x, y, t$ ;
2. tre variabili dipendenti  $u_x, u_y, p$ ;
3. cinque parametri  $L, H, \rho, \eta, g$ .

Altri parametri sono poi introdotti attraverso le condizioni iniziali e le condizioni sul bordo. Assumiamo inoltre che la velocità media all'ingresso del dominio sia uguale a  $V$ .

I termini che compaiono nelle equazioni (1.39) possono essere scalati. Se ad esempio  $L$  ed  $H$  sono dello stesso ordine di grandezza, possiamo scegliere una o l'altra per scalare le variabili  $x$  e  $y$

$$x^a = \frac{x}{L}, \quad y^a = \frac{y}{L}.$$

La velocità può essere invece scalata attraverso la velocità caratteristica del fluido  $V$

$$u_x = \frac{u_x}{V} \quad u_y = \frac{u_y}{V}.$$

A questo punto dobbiamo trovare due unità caratteristiche per adimensionalizzare  $t$  e  $p$ . Il tempo può essere scalato attraverso  $\frac{L}{V}$  oppure  $\frac{L^2}{\nu}$ , con  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , mentre per la pressione  $p$  si possono utilizzare i fattori  $\frac{\eta V}{L}$  o  $\rho V^2$ .

La scelta tra i parametri di scalatura è guidata essenzialmente dalla fisica del flusso: ad esempio per la variabile tempo, è opportuno utilizzare  $\frac{L}{V}$  quando risulta dominante l'effetto convettivo del flusso; se invece è prevalente l'effetto della diffusione rispetto alla vorticità, è meglio utilizzare  $\frac{L^2}{\nu}$ .

Per i fluidi viscosi sceglieremo  $\frac{\eta V}{L}$  per adimensionalizzare la pressione, dato che il moto è dovuto in gran parte alla pressione e ai gradienti dello sforzo di taglio

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

pertanto la pressione può essere vista come uno sforzo viscoso, misurato in unità di  $\frac{\eta V}{L}$ .

Per i fluidi non viscosi questo tipo di scalatura non è appropriato; i flussi infatti sono guidati sia dal gradiente di pressione che dall'inerzia, in accordo con le equazioni di Eulero

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p$$

Da tenere presente che solo una scelta oculata delle scalature conduce a risultati interessanti.

Procediamo effettivamente al processo di adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, adottando i seguenti fattori di scala

$$t^a = \frac{t}{L/V}, \quad p^a = \frac{p}{\eta V/L}.$$

Sostituendo questi fattori nelle equazioni di Navier-Stokes (1.42), si ottengono le **equazioni adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} \frac{\rho V L}{\eta} \left( \frac{\partial u_x^a}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + u_y^a \frac{\partial u_x^a}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^a}{\partial y^2} \right) + \frac{\rho g L^2}{\eta V} \\ \frac{\rho V L}{\eta} \left( \frac{\partial u_y^a}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y^a}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y^a}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Il primo gruppo adimensionale è detto **Numero di Reynolds**

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

dato dal rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

Il secondo gruppo adimensionale è chiamato **Numero di Stokes**

$$St = \frac{\rho g L^2}{\eta V}$$

che rappresenta il rapporto tra le forze di gravità e le forze viscosse.

Riscriviamo dunque le **equazioni di Navier-Stokes adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} Re \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + St \\ Re \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Introduciamo un altro numero adimensionale, l'**aspect ratio**

$$\epsilon = \frac{H}{L},$$

dipendente solo dalla geometria del problema e per questo utilizzato come fattore di scala per prove di laboratorio.

Attraverso le condizioni al bordo ed iniziali, le equazioni adimensionali appena introdotte forniscono la seguente dipendenza funzionale

$$\begin{aligned} p^a &= p^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon), \\ u^a &= u^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon). \end{aligned}$$

Vediamo altri numeri adimensionali di importanza significativa nella meccanica dei fluidi.

Il **Numero di Weber**, rapporto tra le forze di inerzia e le forze di tensione superficiale

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}.$$

Il **Numero di capillarità**, rapporto tra le forze di viscosse e la tensione superficiale o forza capillare.

$$Ca = \frac{\eta V}{\sigma}.$$

Il **Numero di Froude**, rapporto tra le forze di inerzia e quelle di gravità.

$$Fr = \frac{V^2}{gL}.$$

Il **Numero di Eulero**, rapporto tra le forze di pressione e le forze viscosse.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}.$$

Sono valide inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} We &= Re Ca \\ Fr &= Re St \end{aligned}$$

## 1.6 Flussi con strato limite

Consideriamo adesso il caso in cui un fluido si trovi a scorrere in prossimità di una superficie solida. Questa tipologia di flusso è conosciuta come flusso con strato limite e viene comunemente descritta in termini di vorticità; la presenza di vorticità permette infatti di distinguere lo strato limite dal flusso potenziale. Lo strato limite può essere pensato come la vorticità che, formatasi in prossimità di una superficie solida, rimane confinata entro uno sviluppo pseudo-parabolico per effetto della convezione.

Nel caso bidimensionale la vorticità è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k, \quad (1.43)$$

e rappresenta una misura della rotazione di un fluido.

La linea di confine tra strato limite e flusso potenziale è definita attraverso "l'orbita delle particelle di vorticità" generate sulla superficie solida e diffuse lungo lo spessore dello strato limite  $\delta_x$ .

Lungo il bordo dello strato limite, convezione e diffusione assumeranno valori con lo stesso ordine di grandezza, ovvero

$$V \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \cong K^2 \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2}$$

dove  $K$  è una costante. Dalla relazione conseguente

$$\frac{V}{x} \cong K^2 \frac{\nu}{\delta^2(x)}$$

con  $x$  distanza dal bordo di attacco, ricaviamo l'espressione

$$\delta(x) = K \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

che fornisce un ordine di grandezza stimato per lo spessore  $\delta(x)$  dello strato limite.

## 1.7 Equazioni fondamentali per fluidi viscosi

I fluidi non possiedono uno stato naturale nel quale ritornare dopo la rimozione delle forze applicate, inoltre le forze viscosive sono direttamente correlate al campo di velocità, per queste ragioni è consuetudine adottare la descrizione euleriana nella formulazione delle equazioni della Teoria dei fluidi viscosi.

Riportiamo sinteticamente le equazioni fondamentali in forma euleriana che descrivono il comportamento termo-meccanico di un fluido newtoniano:

- equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.44)$$

- equazione di moto:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.45)$$

- equazione costitutiva:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu D_{ij} \quad (1.46)$$

- equazione di Navier Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.47)$$

- equazione dell'energia:

$$\rho \cdot \mathbf{u} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,j} + \rho r \quad (1.48)$$

- equazione della cinetica di stato:

$$p = p(\rho, \theta) \quad (1.49)$$

- equazione di stato del calore:

$$u = u(\rho, \theta) \quad (1.50)$$

- equazione del trasporto del calore:

$$q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (1.51)$$

INCISO 1.7.1. Calcolo della velocità del suono  $c$

Supponiamo di trovarci in condizioni di adiabaticità, in quanto la vibrazione è un processo veloce che non permette scambio di calore. Dalla legge dei gas perfetti abbiamo

$$PV = RT \quad (1.52)$$

$$PV^\gamma = P_0 \rho^\gamma \quad (1.53)$$

$$P\rho^{-\gamma} = P_0 \rho^{-\gamma} \quad (1.54)$$

$$P = P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma \quad (1.55)$$

La pressione non cresce linearmente con la densità, ma cresce con una sua potenza. Possiamo calcolare la pendenza della curva derivando la (1.55)

$$\left. \frac{P}{\rho} \right|_0 = P_0 \gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \Big|_0 = P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} \quad (1.56)$$

questa derivata ha come dimensione quella di una velocità elevata al quadrato. Infatti dall'equazione di Bernoulli e ricordando che la velocità è quella del suono

$$\rho \frac{c^2}{2} + P + \rho gh = cost \Rightarrow P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} = c^2 \quad (1.57)$$

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0} \gamma} = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.58)$$

La velocità di propagazione dipende solo dal mezzo e non dall'ampiezza e frequenza del segnale, dipende invece dalla temperatura.