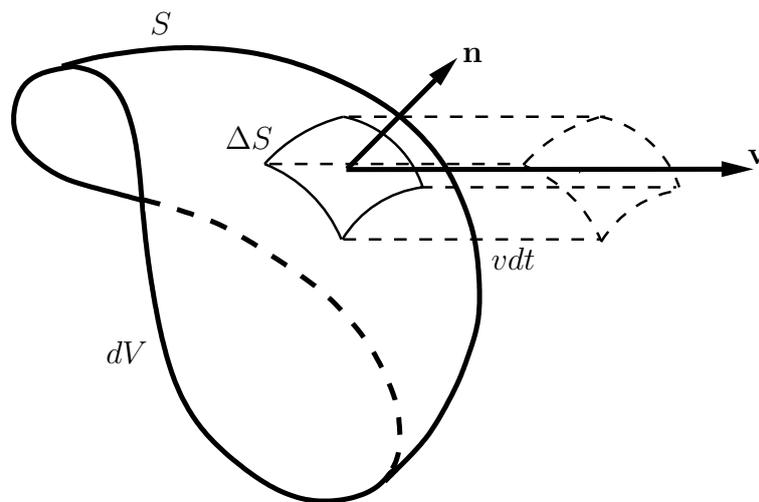


---

# MECCANICA DEI CONTINUI

Appunti redatti da Anna Tangredi  
revisionati dal Prof. Giovanni Frosali <sup>1</sup>

---



FIRENZE - 11 GIUGNO 2014

---

<sup>1</sup>DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA U. DINI, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE, VIA S. MARTA 3, 50139 FIRENZE, e-mail: [GIOVANNI.FROSALI@UNIFI.IT](mailto:GIOVANNI.FROSALI@UNIFI.IT)



# Indice

|  |            |
|--|------------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>iii</b> |
| 0.1 La Meccanica del continuo . . . . .                                | iii        |
| <b>1 Cinematica</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1 I sistemi continui . . . . .                                       | 1          |
| 1.2 Relazioni cinematiche e relative proprietà . . . . .               | 2          |
| 1.3 Approccio lagrangiano - Approccio euleriano . . . . .              | 4          |
| 1.4 La derivata materiale . . . . .                                    | 7          |
| 1.5 Esempi . . . . .   | 9          |
| <b>2 Principi ed Equazioni Fondamentali</b>                            | <b>11</b>  |
| 2.1 Equazione di continuità . . . . .                                  | 11         |
| 2.2 Equazioni fondamentali . . . . .                                   | 16         |
| 2.2.1 Forze . . . . .  | 16         |
| 2.2.2 Statica e Dinamica . . . . .                                     | 18         |
| 2.3 Il tensore degli sforzi di Cauchy . . . . .                        | 19         |
| 2.3.1 Equazioni indefinite di bilancio . . . . .                       | 22         |
| 2.4 Appendice di calcolo tensoriale . . . . .                          | 24         |
| <b>3 I fluidi</b>  | <b>25</b>  |
| 3.1 Statica e dinamica dei fluidi . . . . .                            | 27         |
| 3.1.1 I fluidi perfetti . . . . .                                      | 27         |
| 3.2 Trinomio di Bernoulli . . . . .                                    | 31         |
| 3.3 Il campo delle velocità . . . . .                                  | 35         |
| 3.4 Fluidi viscosi . . . . .   | 36         |
| 3.4.1 Introduzione ai fluidi viscosi . . . . .                         | 36         |
| 3.4.2 Fluidi viscosi . . . . .   | 37         |
| 3.5 Equazioni di Navier Stokes . . . . .                               | 38         |
| 3.5.1 Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-stokes . . . . . | 43         |
| 3.6 Flussi con strato limite . . . . .                                 | 46         |
| 3.7 Equazioni fondamentali per fluidi viscosi . . . . .                | 46         |



# Introduzione

## 0.1 La Meccanica del continuo

La Meccanica del continuo è una branca della fisica che si occupa di studiare il moto, lo stato di sforzo e le deformazioni di sistemi continui, analizzando le relazioni esistenti tra variabili cinematiche e dinamiche. Il moto ed i fenomeni relativi a tali sistemi possono essere descritti attraverso due modalità intercambiabili e complementari: descrizione lagrangiana o materiale e descrizione euleriana o spaziale.

Quali caratteristiche deve avere un sistema per poter essere definito continuo? Osservando gli oggetti nello spazio che ci circonda, quali sono i criteri che ci spingono a classificare un corpo come continuo? Un cubetto di acciaio, l'acqua contenuta in un bicchiere, il gas racchiuso in una bombola ... sono sistemi continui? Osservando un corpo ad occhio nudo, con una lente di ingrandimento o con un microscopio ad alta risoluzione, cambia ciò che vediamo.

Se pensiamo ai corpi secondo scale microscopiche possiamo figurarli, in generale, come agglomerati di atomi e molecole tenuti insieme da particolari legami ed ordinati secondo un caratteristico reticolo cristallino. Gli atomi a loro volta, pensando in scala ancora più piccola, sono costituiti dal nucleo di protoni e neutroni e dalle relative orbite elettroniche. Intuiamo come la materia, osservata in questa scala microscopica, non sia definibile continua.

Accettando invece il concetto di continuità della materia, ignoriamo la sua composizione discreta e consideriamola come un mezzo in grado di occupare completamente (ovvero senza lasciare spazi vuoti) ed uniformemente lo spazio. Per chiarire tale concetto, un gas rarefatto non può essere modellato come un continuo dato che le sue molecole sono molto distanti tra loro (si pensi ad esempio all'alta atmosfera). Focalizzando l'oggetto attraverso una scala macroscopica, ignoreremo la composizione discreta della materia e risulterà naturale definire il sistema osservato **continuo**; adottando tale punto di vista assumeremo inoltre che il corpo o il mezzo occupi completamente ed uniformemente lo spazio in cui è immerso, senza lasciare spazi vuoti.

Quindi, alla luce di queste considerazioni, perchè sia possibile attribuire la caratteristica di *continuità* ad un corpo, esso va osservato in *scala macroscopica*: le sue dimensioni devono essere quindi molto maggiori di quelle del raggio atomico, in accordo con il punto di vista adottato in buona parte degli studi

ingegneristici.

Al contrario, osservando il sistema attraverso una scala microscopica, la materia si rivelerà composta da agglomerati di molecole ed atomi tenuti insieme da particolari legami; scendendo ancora nel microscopico, potremo perfino osservare la struttura dell'atomo. In questo caso non risulterà naturale trascurare ed ignorare la composizione discreta della materia.

La Meccanica del continuo si occupa quindi dello studio dei fenomeni fisici, in particolare del comportamento cinematico e meccanico, dei sistemi continui (solidi e fluidi) da un punto di vista macroscopico.

I sistemi solidi, liquidi o gassosi sono definibili continui se:

- sono osservati attraverso una scala macroscopica;
- le loro dimensioni sono molto maggiori del raggio atomico;
- non sono sistemi rarefatti.

Definiamo a questo punto le caratteristiche che contraddistinguono tali sistemi:

- Deformabilità: sotto l'azione di forze, ogni sistema continuo può cambiare forma e/o volume; le particelle che lo compongono a causa del moto e/o della deformazione possono andare ad occupare nuove posizioni nello spazio (cambiamento di configurazione);
- Omogeneità: il materiale che costituisce il continuo avrà identiche proprietà in ogni sua parte;
- Isotropia: il materiale di cui è composto il continuo presenterà stesse caratteristiche meccaniche in ogni direzione.

Assumendo tale *modello* per i corpi continui, potremo studiare qualsiasi parte contenuta nel sistema stesso, poiché conserverà le caratteristiche del corpo originario. Saremo inoltre in grado di associare ad ogni punto della regione di spazio occupato dal corpo, grandezze di campo come la velocità e la densità.

In seguito affronteremo due temi principali: la derivazione delle equazioni fondamentali valide per tutti i mezzi continui, le quali si basano sulle leggi universali della fisica come la conservazione della massa, i principi della conservazione dell'energia e del momento, e le equazioni costitutive che caratterizzano il comportamento di specifiche classi di materiali continui idealizzati, come i solidi perfettamente elastici ed i fluidi viscosi. Queste equazioni sollevano i punti focali intorno ai quali vertono e si sviluppano gli studi di elasticità, plasticità, viscoelasticità e la meccanica dei fluidi.

Le equazioni fondamentali della meccanica dei continui possono avere due formulazioni matematiche equivalenti: la prima è una forma di tipo globale o integrale, derivata dall'applicazione dei principi basilari ad un volume finito del materiale, la seconda è un approccio tipo di campo, basato su equazioni risultanti dall'applicazione dei principi ad un volumetto infinitesimo. Nella pratica è comodo dedurre le equazioni di campo dalla forma globale.

# Capitolo 1

## Cinematica

### 1.1 I sistemi continui

Si definisce continuo quel sistema costituito da un insieme di punti materiali, ovvero da un numero elevato di particelle ed individuato attraverso la porzione continua  $B$  di spazio che esso occupa. Tale porzione di spazio è chiamata configurazione del sistema ed è delimitata dalla superficie  $\partial B$ , che supponiamo sufficientemente regolare.

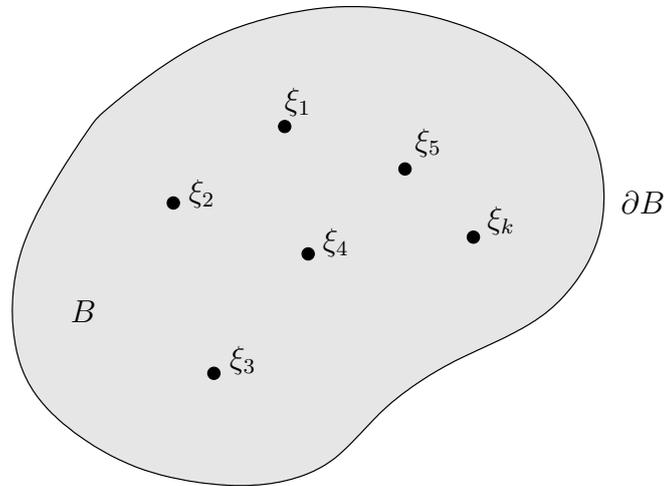
Nello studio della Cinematica dei corpi continui risulta di fondamentale importanza distinguere le numerose particelle e con questo intento si assegna ad ogni elemento materiale un'**etichetta** che rappresenta ciascuna particella.

Per chiarire il concetto, pensiamo ad un insieme di esseri umani, ognuno caratterizzato da nome, cognome, data di nascita...ogni essere umano ha una propria identità, che ne permette il riconoscimento univoco. Sinteticamente, si può pensare che l'identità di ogni singolo individuo sia rappresentata attraverso la carta d'identità contenente una sequenza unica di dati.

Per distinguere ed identificare le varie particelle, adotteremo una tecnica molto simile: il documento di base di tutte le particelle, ovvero la carta d'identità, sarà la lettera  $\xi$ , mentre il nome, cognome e tutti i dati significativi di una particella saranno rappresentati attraverso il pedice  $k$ . Il documento  $\xi$  ed i dati  $k$  costituiranno l'etichetta  $\xi_k$  della particella. Quindi in un corpo costituito da  $n$  particelle potremo distinguere un'elemento materiale dall'altro grazie all'etichetta  $\xi_k$  caratteristica di ogni particella:  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ .

**Nota 1.1.1.** Nella teoria del continuo, quando parliamo di particella, ci riferiamo ad un elemento materiale, ovvero alla parte più piccola in cui è suddivisibile un corpo senza perderne le caratteristiche originarie. Da sottolineare che, mentre nella meccanica dei corpi rigidi ad ogni punto materiale è assegnata una massa, ad ogni particella di continuo si assegna invece una densità (riprenderemo tale concetto nel Capitolo (2)).

Ogni punto materiale, ovvero ogni particella  $\xi_k$  può essere messa in corrispondenza biunivoca con i punti di una regione regolare dello spazio fisico. Specificando la posizione di tutte le particelle costituenti il corpo  $B$  rispetto ad



**Figura 1.1:** Sistema continuo.

un sistema di riferimento inerziale, definiamo la *configurazione*  $C_t$  del corpo in quell'istante di tempo  $t$ .

Convenzionalmente la configurazione del corpo corrispondente all'istante che noi assumiamo iniziale è chiamata **configurazione di riferimento**  $C_0$  del continuo o configurazione indeformata, mentre la configurazione assunta in un istante generico  $t$  è chiamata **configurazione attuale**  $C_t$  o configurazione deformata.

Il cambiamento di configurazione consiste in generale in uno spostamento rigido del corpo e/o nella deformazione del corpo stesso (cambiamento di dimensione, di forma).

In particolare la configurazione di riferimento  $C_0$  è la configurazione rispetto alla quale si stimano gli spostamenti ed in generale può anche non essere mai stata realmente occupata dal corpo, ma solo concettualmente (configurazione virtuale).

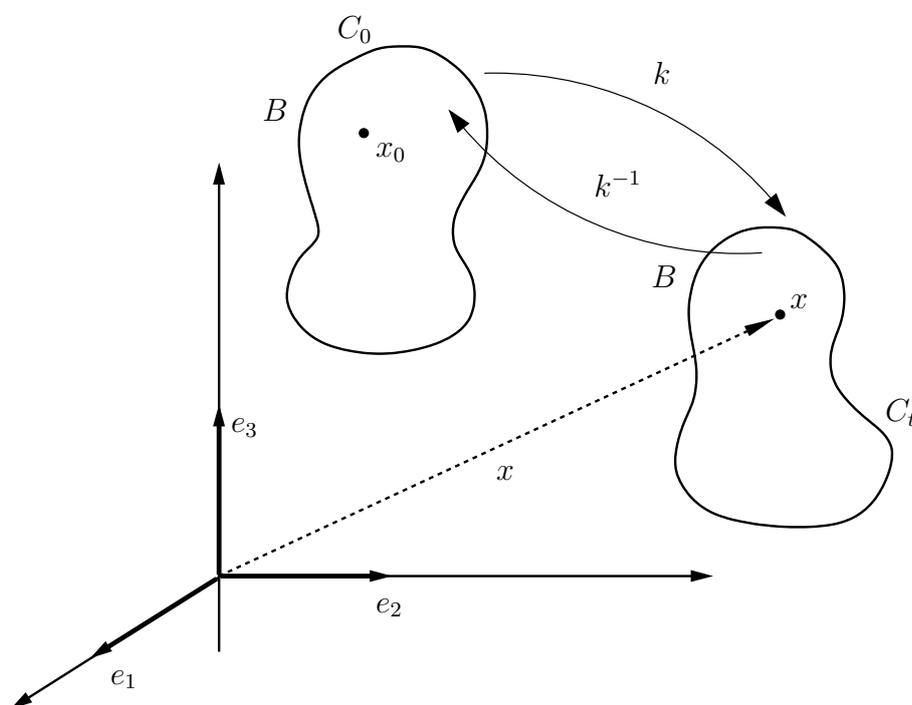
## 1.2 Relazioni cinematiche e relative proprietà

Introduciamo la **funzione posizione**  $\kappa$

$$\mathbf{x} = \kappa(\xi_k, t) \quad \xi_k \in C_0 \quad (1.1)$$

tale mappa è una funzione vettoriale che associa ad ogni particella del corpo  $C_0$  un punto dello spazio individuato attraverso il vettore  $\mathbf{x}$  in un determinato istante di tempo  $t$ .

- $B$ : corpo continuo
- $C_0$ : configurazione di riferimento



**Figura 1.2:** Sistema continuo.

- $C_t$ : configurazione attuale
- $\mathbf{x}$ : vettore che individua il punto dello spazio occupato dalla particella nell'istante di tempo  $t$  rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  con origine in  $O$
- $\kappa$ : funzione posizione
- $\kappa^{-1}$ : funzione inversa della posizione

La funzione posizione  $\kappa$  in generale deve soddisfare le proprietà matematiche di: biunivocità, continuità, derivabilità (con derivata continua) ed invertibilità locale.

Dal punto di vista fisico  $\mathbf{x} = \kappa(\xi_k, t)$  deve essere una funzione tale da rappresentare il seguente comportamento a livello di particelle di continuo:

- particelle vicine si manterranno vicine durante il moto e/o la deformazione del corpo;
- un punto dello spazio non può essere occupato da più di una particella.

**Nota 1.2.1.** Negli urti nei gas può accadere che nello stesso istante di tempo due o più particelle si trovino ad occupare la stessa posizione: non è quindi possibile utilizzare tale modello. La teoria che studia la dinamica dei gas si chiama teoria cinetica e l'equazione fondamentale è quella di Boltzmann.

Soddisfatte le proprietà di continuità e biunivocità, la funzione posizione  $\boldsymbol{\kappa}$  può essere invertita

$$\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in C(t) \quad (1.2)$$

e dal punto di vista matematico tale operazione è possibile se

$$\det(J(\mathbf{x})) \neq 0 \quad (1.3)$$

dove con  $J(\mathbf{x})$  si è indicato la matrice jacobiana i cui elementi sono

$$J_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{kj}}, \quad x_i = \boldsymbol{\kappa}_i(\boldsymbol{\xi}_k, t). \quad (1.4)$$

Per semplificare le notazioni, d'ora in avanti quando indicheremo una particella qualsiasi ometteremo l'etichetta  $k$ , anche per non confondere con l'indice delle componenti e manterremo tale indice solo quando vorremo indicare una precisa particella. Quindi per semplicità useremo la **funzione posizione** nella forma generica

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in C_0. \quad (1.5)$$

**Nota 1.2.2.** Qualche volta, in alcuni testi, si usa scrivere la (1.5) come

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$$

utilizzando lo stesso nome sia per la variabile dipendente che per la funzione. Noi faremo ricorso a tale forma solo quando ne sarà chiaro il significato dal contesto.

### 1.3 Approccio lagrangiano - Approccio euleriano

La caratteristica di invertibilità è di fondamentale importanza nello studio della Meccanica dei continui, poichè rende immediato il passaggio da una configurazione all'altra del corpo, dalla  $C_0$  alla  $C_t$  e viceversa; ovvero, grazie all'invertibilità della funzione posizione, diventa possibile studiare il continuo ed il suo comportamento cinematico e meccanico, adottando due approcci intercambiabili, ovvero due diversi punti di vista: **approccio lagrangiano** e **approccio euleriano**.

- **Approccio lagrangiano:** la descrizione del fenomeno associato al sistema continuo avviene ponendo l'attenzione sui singoli elementi materiali, cioè le particelle del continuo, individuati attraverso la loro etichetta  $\boldsymbol{\xi}_k$  ed inseguiti nel moto.
- **Approccio Euleriano:** la descrizione del fenomeno avviene da un punto specifico dello spazio, nel quale si troverà l'osservatore e per il quale in ogni istante di tempo transiteranno diverse particelle.

Data la generica particella  $\xi$ , appartenente alla regione dello spazio  $C_0$ , detta configurazione di riferimento, e la funzione vettoriale che ci fornisce la posizione  $\kappa(\xi, t)$  dell'elemento  $\xi$  all'istante  $t$ , allora la configurazione al tempo  $t$  è

$$C_t = C(t) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \kappa(\xi, t), \xi \in C_0\}$$

e possiamo definire la velocità del punto  $\mathbf{x}$  come la derivata rispetto a  $t$  della posizione  $\kappa(\xi, t)$  lasciando costante la  $\xi$  (derivata parziale rispetto a  $t$ ), ovvero

- la **velocità lagrangiana**

$$\mathbf{v}_L = \frac{\partial \kappa(\xi, t)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

e conseguentemente

- l'**accelerazione lagrangiana**

$$\mathbf{a}_L = \frac{\partial^2 \kappa(\xi, t)}{\partial t^2}. \quad (1.7)$$

Se fissiamo un punto  $\mathbf{x}$  dello spazio, per il quale transitano le diverse particelle  $\xi$ , e facciamo variare  $\xi$ , utilizzando la funzione inversa della funzione posizione con la quale sono a conoscenza del punto  $\mathbf{x}$  nel quale si trova la particella  $\xi$ , la (1.6) fornisce il campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Tale campo dà la velocità della particella di continuo che all'istante  $t$  occupa la posizione  $\mathbf{x}$  (essendo tale particella in moto, ci si riferisce ad essa anche come alla particella che transita per il punto  $\mathbf{x}$ ).

Quindi possiamo ricavare la velocità e l'accelerazione in descrizione euleriana

- la **velocità euleriana** o campo di velocità

$$\mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \kappa(\xi, t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t); \quad (1.8)$$

- l'**accelerazione euleriana** o campo di accelerazione

$$\mathbf{a}_E = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \kappa(\xi, t)}{\partial t^2} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (1.9)$$

In quel che abbiamo fatto sopra, ci siamo riferiti a questa descrizione come al **campo di velocità** del continuo. In altre parole ci siamo concentrati su ciò che succede nel punto fissato dello spazio  $\mathbf{x}$ , caratteristico dell'approccio euleriano.

La differenza sostanziale tra velocità (o accelerazione) lagrangiana ed euleriana deriva essenzialmente dalla diversa filosofia di descrizione:

- $\mathbf{v}_L$  rappresenta la velocità di una certa particella inseguita nel suo moto, si ottiene quindi derivando la funzione posizione  $\kappa$  nel tempo fissata la particella  $\xi$ .

- $\mathbf{v}_E$  rappresenta il campo di velocità in un punto fissato dello spazio individuato dal vettore  $\mathbf{x}$ , si ottiene quindi derivando  $\kappa$  rispetto al tempo al variare della  $\xi$ .

Posti davanti ai due approcci, sorge spontaneo domandarsi in quali casi convenga usare una rappresentazione piuttosto che l'altra.

Pensando ad un fluido, data la sua natura non geometrica, l'idea di una configurazione specifica perde di significato; inoltre da un punto di vista pratico, in un fluido in movimento diventa estremamente difficoltoso l'inseguimento delle particelle. Per questo motivo in fluidodinamica si adotta l'approccio euleriano: fissati alcuni punti dello spazio costituenti il volume di controllo del fluido, si registra in ogni punto  $\mathbf{x}$  ed in ogni istante  $t$  il valore delle grandezze di interesse.

Nella descrizione euleriana ha quindi senso calcolare le quantità e le loro variazioni in funzione del tempo, mantenendo fissa nello spazio la posizione dell'osservatore.

**Nota 1.3.1.** Attenzione a non confondere le variazioni temporali delle misurazioni di velocità

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.10)$$

con l'accelerazione (1.9).

L'accelerazione non si ottiene derivando parzialmente la  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  rispetto al tempo. Infatti scriviamo la (1.10) come limite del rapporto incrementale

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \text{ con } \mathbf{x} \text{ fissato.}$$

In questo rapporto le velocità sono in due tempi vicini, ma non sono della stessa particella, perché a tempi diversi nel punto  $\mathbf{x}$  passano due particelle diverse  $\xi_1 = \xi_1(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  e  $\xi_2 = \xi_2(\mathbf{x}, t)$ .

L'accelerazione è data da

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

Consideriamo adesso una funzione scalare qualsiasi, ad esempio la temperatura  $\vartheta$ , attribuibile al corpo continuo.

Nella descrizione lagrangiana, la quantità associata alla grandezza  $\vartheta$  coinciderà con il valore di  $\vartheta$  che istante per istante appartiene al singolo elemento materiale, alla singola particella  $\xi$  inseguita nel suo moto

$$\vartheta = \vartheta(\xi, t) \quad (1.12)$$

Per l'osservatore euleriano, invece, il valore della temperatura  $\vartheta$  in ogni istante coinciderà con quello della particella  $\xi$  che in quell'istante transita per il punto fissato  $\mathbf{x}$

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

Il legame esistente tra questi due differenti approcci allo studio, nonché tra le differenti formulazioni di  $\vartheta$ , si ottiene osservando che per un determinato

punto dello spazio  $\mathbf{x}$  nell'istante di tempo  $t$  transita una certa particella, per esempio  $\boldsymbol{\xi}$ , per la quale vale la relazione  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)$ . Ovvero dato un punto dello spazio  $\mathbf{x}$  in ogni istante di tempo  $t$ , siamo in grado di prevedere quale particella  $\boldsymbol{\xi}$  transiterà per quel punto grazie all'inversa delle funzione posizione  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ .

Allo stesso modo data una particella  $\boldsymbol{\xi}$ , attraverso la funzione posizione  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)$ , potremo risalire esattamente al punto dello spazio in cui si trova nell'istante  $t$ .

Grazie alla funzione posizione  $\mathbf{x}$  ed alla sua inversa  $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$  possiamo passare dalla rappresentazione lagrangiana a quella euleriana e viceversa.

$$\begin{aligned}\vartheta_L &= \vartheta(\boldsymbol{\xi}, t) \rightarrow [\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)] \rightarrow \vartheta = \vartheta(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \rightarrow \vartheta = \vartheta_E(\mathbf{x}, t), \\ \vartheta_E &= \vartheta(\mathbf{x}, t) \rightarrow [\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \vartheta = \vartheta(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t) \rightarrow \vartheta = \vartheta_L(\boldsymbol{\xi}, t).\end{aligned}$$

## 1.4 La derivata materiale

La derivata materiale o particellare o sostanziale o lagrangiana è una derivata totale che indica in generale la variazione nel tempo di una grandezza, ad esempio la temperatura  $\vartheta$ , riferita ad una specifica particella del sistema continuo.

Tale derivata può essere pensata come la variazione della grandezza di interesse misurata da un osservatore che viaggia a cavallo della particella considerata. La derivata può essere espressa sia in forma lagrangiana che in forma euleriana. Se la grandezza è data nella descrizione lagrangiana, la derivata materiale coincide con la derivata parziale rispetto al tempo

$$\frac{d\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t},$$

poichè le  $\boldsymbol{\xi}$  sono etichette, codici identificativi costanti nel tempo.

Se, invece, la grandezza è data nella sua formulazione spaziale (euleriana), la derivata materiale sarà data da

$$\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \quad \text{con } x_i = \kappa_i(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (1.14)$$

dato che le particelle cambiano posizione nel tempo (si noti che, d'ora in avanti, si omette la sommatoria sull'indice  $i$  quando gli stessi indici sono ripetuti).

- $\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt}$  è la **derivata materiale o lagrangiana (o sostanziale)**;
- $\frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  e  $\frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}$  sono **derivate euleriane**;
- $\frac{dx_i}{dt}$  è una componente del campo di velocità misurato dall'osservatore euleriano.

L'equazione (1.14) può essere scritta sostituendo a  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  il campo di velocità  $v(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}, t)$$

Il primo termine a secondo membro rappresenta la variazione della grandezza  $\vartheta$  nella posizione  $\mathbf{x}$ , per tale motivo può essere definito come termine che dà la variazione locale della  $\vartheta$ ; il secondo deriva invece dal cambiamento di posizione delle particelle nello spazio.

Siamo quindi in grado di dedurre l'**operatore derivata materiale** per grandezze espresse nella descrizione di tipo spaziale euleriana

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

dove l'operatore  $\nabla$  applicato ad una grandezza, nel nostro caso  $\vartheta$ , ne determina il gradiente.

Utilizzando l'operatore derivata materiale ricaviamo l'espressione dell'accelerazione  $a(\mathbf{x}, t)$  data nella descrizione spaziale, derivando la velocità euleriana  $v(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

con

$$[\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(x, t)]_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Riassumendo si ha

- **$\xi$  etichetta:** identifica la particella del continuo
- $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)$ : **funzione posizione:** rappresenta la posizione occupata dalla particella  $\boldsymbol{\xi}$  nell'istante di tempo  $t$ .
- $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ : **funzione inversa della posizione** fissato un punto dello spazio fornisce l'etichetta della particella che in quell'istante transita per il punto.
- **Approccio lagrangiano:** l'osservatore insegue la particella nel suo moto, osservando e registrando i valori delle grandezze di interesse relative a quella particella allo scorrere del tempo .
- **Approccio euleriano:** fissato un punto dello spazio, si registrano i valori delle grandezze di interesse relativi alle particelle che transitano in quel punto nei diversi istanti di tempo.

- **Approccio lagrangiano - approccio euleriano:** è possibile passare dall'approccio lagrangiano a quello euleriano (e viceversa), sfruttando la funzione posizione e la sua inversa, attraverso la composizione (1.14).
- **Derivata materiale** di una grandezza (scalare o vettoriale) in rappresentazione materiale (lagrangiana) o spaziale (euleriana): rappresenta la variazione nel tempo della grandezza di interesse con misure effettuate da un osservatore che viaggia a cavallo della particella.

**Nota 1.4.1.** Con riferimento all'Appendice (2.4) scriviamo l'accelerazione in una espressione che verrà utilizzata spesso nello studio dei sistemi continui. L'espressione  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  può essere riscritta come

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$$

e l'accelerazione di una particella fluida, come derivata sostanziale di  $\mathbf{v}$ , si scrive

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}.$$

## 1.5 Esempi

**Esercizio 1.5.1.** *Scrivere l'espressione euleriana e lagrangiana della densità  $\rho(P)$  in un  $P$  di una asta omogenea che si dilata con legge lineare.*

*Soluzione 1.1.* Fissiamo il punto  $P$ , la legge di moto del punto è data da

$$x = x(\xi, t) = \xi + vt$$

allora in forma lagrangiana

$$\rho_L = \rho_L(\xi, t) = \rho(\xi + vt, t).$$

La sua variazione è data da

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\xi + vt, t) + v \frac{\partial \rho}{\partial x}(\xi + vt, t).$$

**Esercizio 1.5.2.** *Scrivere l'espressione euleriana e lagrangiana della densità  $\rho(P)$  in un  $P$  di una asta omogenea che si dilata con legge quadratica.*

*Soluzione 1.2.* La legge di moto del punto  $P$  è data da

$$x = x(\xi, t) = \xi + \frac{1}{2} at^2,$$

con  $a$  costante, allora in forma lagrangiana

$$\rho_L = \rho_L(\xi, t) = \rho\left(\xi + \frac{1}{2} at^2, t\right).$$

La sua variazione è data da

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\xi + \frac{1}{2} at^2, t\right) + at \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\xi + \frac{1}{2} at^2, t\right).$$



## Capitolo 2

# Principi ed Equazioni Fondamentali

### 2.1 Equazione di continuità

Ogni corpo materiale  $B$ , così come ogni sua parte  $S$ , è caratterizzato da una grandezza scalare, la *massa*, fisicamente associata alla tendenza del corpo a resistere ai cambiamenti di moto. In generale la massa può essere funzione delle variabili spaziali e del tempo.

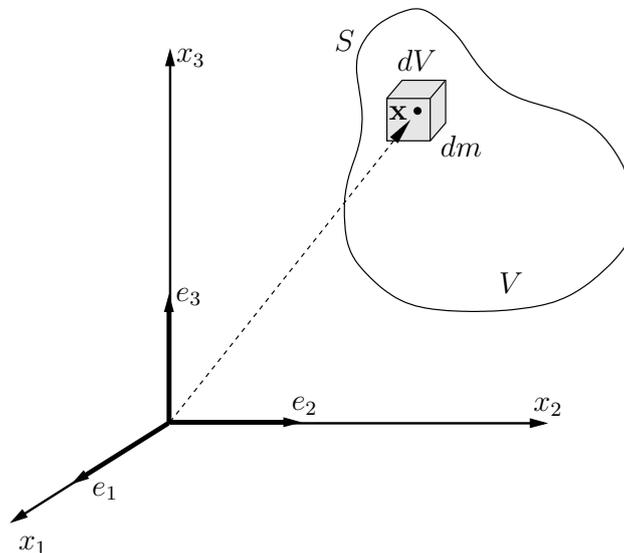


Figura 2.1

Fissato un punto dello spazio individuato dal vettore  $\mathbf{x}$  nella configurazione attuale del corpo  $S$ , identifichiamo un volumetto infinitesimo  $dV$  centrato in tale punto, nell'istante di tempo  $t$ .

Si definisce **densità euleriana**  $\rho(\mathbf{x}, t)$  il rapporto tra massa  $dm$  e volume  $dV$

dell'elemento infinitesimo del corpo continuo nell'istante di tempo  $t$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV} \quad (2.1)$$

Da precisare che la densità  $\rho(\mathbf{x}, t)$  è una densità euleriana, definita nella configurazione attuale (rappresentazione spaziale), ovvero un campo scalare:  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ . La massa  $m$  dell'intero corpo è data da

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.2)$$

**Nota 2.1.1.** La densità di un corpo continuo può anche essere definita nella configurazione di riferimento  $C_0$ ; tale densità  $\rho_0$  è data dal rapporto tra la massa  $dm_0$  ed il volume  $dV_0$  occupato da un elemento infinitesimo, intorno al punto  $\xi_0$ , nella configurazione  $C_0$

$$\rho_0 = \rho_0(\xi_0, t). \quad (2.3)$$

La massa dell'intero corpo è quindi data da:

$$m = \int_{V_0} \rho_0(\xi_0, t_0) dV_0 \quad (2.4)$$

#### PRINCIPIO 2.1.1. Il principio di conservazione della massa

Il principio di conservazione della massa afferma che la massa di un corpo, e di una sua parte qualsiasi, è invariante durante di moto (si dice **invariante di moto**) e rimane costante in ogni configurazione.

Applicando il principio di conservazione della massa e utilizzando la rappresentazione spaziale euleriana, si ricava l'espressione dell'equazione di continuità. Dato che la massa non varia durante il moto, la sua derivata sarà nulla

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (2.5)$$

Esaminiamo le **cause** in grado di produrre una **variazione di massa**:

- variazione della densità  $\rho$ ;
- flusso di massa attraverso la superficie del corpo ;
- sorgenti di massa o pozzi.

Assumendo che non siano presenti effetti corrosivi o fenomeni di crescita, possiamo escludere la terza causa.

La variazione di massa  $\frac{dm}{dt}$  è quindi data essenzialmente dalla prima e dalla seconda causa

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \text{flusso attraverso la superficie}. \quad (2.6)$$

Il flusso di massa è dato dalla quantità di particelle che in un determinato intervallo di tempo fluisce attraverso la superficie che delimita il volume occupato dal continuo.

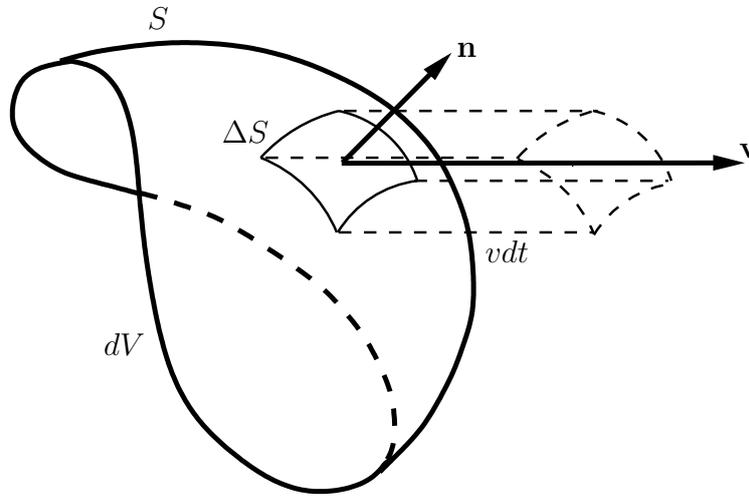


Figura 2.2

- $\mathbf{v}$  rappresenta il vettore velocità delle particelle
- $\Delta S$  è la porzione di superficie considerata
- $\mathbf{n}$  è la normale alla superficie
- $\Delta t$  l'intervallo di tempo

Perchè le particelle siano coinvolte realmente nel flusso è necessario che la loro velocità abbia componente normale alla superficie attraversata non nulla. Inoltre è possibile distinguere un flusso uscente da un flusso entrante, ovvero si ha

- $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$  in caso di massa uscente;
- $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$  in caso di massa entrante.

Il nostro scopo è quantificare la massa che nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  fluisce attraverso la superficie  $\Delta S$ , in modo da descrivere il flusso. La quantità di massa che si trova all'interno del parallelepipedo è data da

$$\Delta m = \rho \Delta S v_n \Delta t \quad (2.7)$$

dove  $v_n$  rappresenta la componente normale della velocità ( $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ). Quindi il flusso di massa attraverso la superficie in un intervallo di tempo  $\Delta t$  è dato da

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \Delta S v_n. \quad (2.8)$$

Siamo adesso in grado di riscrivere la (2.6) sostituendo l'espressione appena trovata del flusso di massa

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.9)$$

Grazie al *teorema della divergenza* possiamo riscrivere l'espressione del flusso in termini di integrale di volume

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.10)$$

e sostituire l'espressione nella (2.9) ottenendo

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (2.11)$$

da cui, dovendo valere la (2.11) qualunque sia il volume  $V$  ed essendo continua la funzione integranda, segue l'**equazione di continuità** scritta in forma euleriana

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.12)$$

Nel caso in cui la densità sia costante, il materiale viene detto *incomprimibile* e dalla (2.12) segue che

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.13)$$

**Nota 2.1.2.** Come vedremo più tardi possiamo riscrivere direttamente l'equazione di continuità in forma lagrangiana. Vogliamo qui osservare che nella (2.12) compare la derivata locale  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Se riscriviamo il termine di divergenza come

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v}, \quad (2.14)$$

allora la (2.12) prende la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ovvero, utilizzando la derivata sostanziale

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.15)$$

Per concludere verifichiamo la relazione (2.14), nel modo seguente

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Dalla legge della conservazione della massa, che afferma che la massa deve rimanere costante in ogni configurazione, possiamo derivare l'equazione di continuità anche da un semplice confronto tra l'espressione di  $m$  nella configurazione di riferimento e quella nella configurazione attuale.

Eguagliamo quindi la (2.2) e la (2.4),

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(\boldsymbol{\xi}_0, t_0) dV_0$$

e teniamo presente la funzione posizione  $\mathbf{x} = \kappa(\boldsymbol{\xi}, t)$  e la sua inversa  $\boldsymbol{\xi} = \kappa^{-1}(\mathbf{x}, t)$ , che ci permetterà di passare da un approccio all'altro (lagrangiano

$\iff$  euleriano).

Effettuando la composizione abbiamo

$$\int_V \rho[\kappa^{-1}(\mathbf{x}, t), t] dV = \int_{V_0} \rho(\boldsymbol{\xi}_0, t) \mathbf{J} dV_0$$

dove  $J$  è il determinante della matrice di trasformazione dalle variabili euleriane alle variabili lagrangiane ed è una funzione che opera dal campo delle matrici ai numeri reali.

Riportiamo a titolo di esempio l'espressione di  $J$  per un problema con due gradi di libertà

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \kappa(\boldsymbol{\xi}_k, t) &\Rightarrow [x_x = \kappa_1(\xi_1, \xi_2, t), x_y = \kappa_2(\xi_1, \xi_2, t)] \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_y}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ovvero

$$J = \left( \frac{\partial x_x}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_x}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_y}{\partial \xi_1} \right).$$

Sostituiamo adesso il membro di destra della (2.1) con il membro di sinistra della (2.1) e raccogliendo otteniamo

$$\int_{V_0} [\rho(\boldsymbol{\xi}_0, t) \mathbf{J} - \rho_0(\boldsymbol{\xi}_0, t)] dV_0 = 0$$

Data l'arbitrarietà di  $V_0$  si ha l'espressione che lega la densità euleriana (di campo,  $C(t)$  alla densità lagrangiana (di particella,  $C_0$ )

$$\rho J = \rho_0$$

e dato che  $\dot{\rho}_0 = 0$  concludiamo che

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

chiamata **equazione di continuità** in forma lagrangiana o materiale.

**Esercizio 2.1.1.** *Ricavare l'equazione di continuità nella forma lagrangiana. a partire dalla forma (2.18)*

*Soluzione 2.1.* Derivando la (2.18) si ha

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} = 0$$

se teniamo conto della seguente relazione (che lasciamo al lettore da provare per esercizio)

$$\frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} J$$

e sostituiamo, si ha

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = J \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = 0.$$

Ma dato che  $J$  è sempre  $\neq 0$ , otteniamo l'equazione di continuità nella forma lagrangiana

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

## 2.2 Equazioni fondamentali

### 2.2.1 Forze

Consideriamo un corpo continuo  $\mathcal{C}$  che occupi un certo dominio spaziale all'istante di tempo  $t$  e prendiamo una sua parte  $B$ , che supponiamo contenuta in  $\mathcal{C}$ , con frontiera regolare  $\partial B$ ; il continuo è caratterizzato da una densità di massa  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Ci domandiamo quali siano le forze che agiscono sul continuo  $B$ . Tra le forze agenti su  $B$  potremo individuarne alcune attribuibili all'interazione a distanza tra il continuo ed il resto dell'universo ed altre che si manifestano per contatto sulla superficie  $\partial B$ : alle prime si dà il nome di **forze di massa**, le seconde sono chiamate **forze di superficie**.

1. **Forze di massa.** Vengono caratterizzate mediante l'introduzione di un campo di densità di forza: *forza specifica di volume*

$$\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(P, t) \quad (2.19)$$

mediante la quale può esprimersi la forza di volume risultante su  $S$  in una qualsiasi configurazione  $C(t)$  del sistema continuo

$$\mathbf{F}(t) = \int_{C(t)} \mathbf{f}_V(P, t) dV. \quad (2.20)$$

Possiamo inoltre definire una *forza specifica di massa*

$$\mathbf{f}_m(P, t) = \mathbf{f}_V(P, t) / \rho(P, t) \quad (2.21)$$

e facendo l'integrale su tutto il corpo calcolare la forza di volume totale

$$\mathbf{F}(t) = \int_{C(t)} \rho(P, t) \mathbf{f}_m(P, t) dV. \quad (2.22)$$

**ESEMPIO 2.2.1.** *Un esempio tipico di forza di volume è il peso. In questo caso la forza specifica di massa coincide con l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  e la forza specifica di volume con il peso specifico  $\rho \mathbf{g}$ .*

2. **Forze di superficie e Stato di tensione.** Per precisare il concetto di forza di superficie si consideri un punto di  $\partial B$  e sia  $\mathbf{n}$  il versore normale alla superficie nel punto considerato. A tale punto ed al versore  $\mathbf{n}$  si associa una densità superficiale di forza  $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$ , detto *sforzo specifico* (per unità di superficie), mediante il quale è possibile esprimere la forza di superficie risultante agente su  $B$  attraverso  $\partial B$

$$\Phi(t) = \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma \quad (2.23)$$

La componente  $\Phi(P, \mathbf{n}, t) \cdot \mathbf{n}$  è detta sforzo specifico di trazione se positiva o di compressione se negativa, mentre la componente appartenente al piano normale ad  $\mathbf{n}$  è detta sforzo specifico di taglio.

In base alla (2.23) siamo in grado di calcolare la forza di superficie su qualsiasi parte del continuo purchè si conosca in ogni istante ed in ogni punto del continuo l'insieme degli sforzi specifici  $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$  relativi alla totalità dei versori  $\mathbf{n}$ , ovvero lo *stato di tensione superficiale del sistema*.

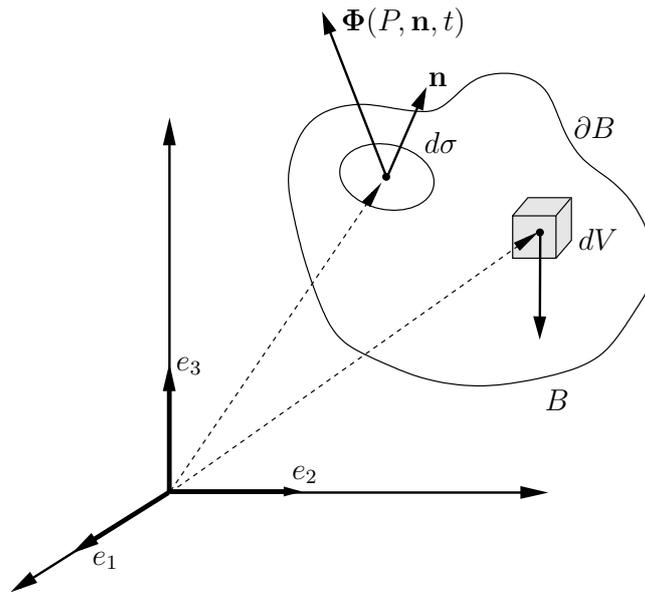


Figura 2.3

Nello spirito del principio di azione e reazione il vettore  $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$  è assoggettato alla condizione

$$\Phi(P, -\mathbf{n}, t) = -\Phi(P, \mathbf{n}, t). \quad (2.24)$$

**Nota 2.2.1.** La (2.24) può essere provata rigorosamente applicando la prima equazione della dinamica ad un parallelepipedo infinitesimo (vedi [ABM]).

### 2.2.2 Statica e Dinamica

#### Equazioni cardinali della statica

Innanzitutto osserviamo che quando un sistema continuo è in equilibrio, allora dovrà essere in equilibrio anche ogni sua parte. Sia  $\mathcal{C}$  un sistema materiale continuo in equilibrio in una configurazione qualsiasi, sotto l'azione di un assegnato campo  $\mathbf{f}_m(P, t)$  di forze specifiche di massa e di una assegnata distribuzione di sforzi specifici  $\Phi(P, \mathbf{n})$  sulla superficie. Il sistema di forze agenti dall'esterno su ogni parte di  $\mathcal{C}$  risulta equilibrato se valgono le seguenti uguaglianze (omettiamo il tempo  $t$ ):

$$\int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}) d\sigma = 0, \quad 1^a \text{ equazione cardinale} \quad (2.25)$$

$$\int_B (P-O) \wedge \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} (P-O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n}) d\sigma = 0, \quad 2^a \text{ equazione cardinale} \quad (2.26)$$

per ogni  $B \in \mathcal{C}$  e dove  $O$  è un punto arbitrario. Queste equazioni sono chiamate **equazioni cardinali della statica**. La prima e la seconda equazione cardinale stabiliscono che la risultante delle forze ed il momento risultante agenti su un sistema continuo in equilibrio sono nulle.

Si osservi che, mentre la densità superficiale di forza  $\Phi(P, \mathbf{n})$  è nota sulla frontiera del corpo  $\partial B$ , lo stato di tensione nei punti interni di  $B$  è incognito. Il problema statico consiste quindi nella determinazione:

- di eventuali configurazioni di equilibrio,
- della densità  $\rho(P)$  in ciascun punto di  $B$ ,
- dello stato di tensione in ciascun punto di  $B$ .

Le equazioni cardinali non sono sufficienti per la risoluzione di questo problema, dato che esse non contengono alcuna informazione sulla *struttura* del sistema continuo e più precisamente sul modo in cui il sistema si deforma in relazione allo stato di tensione.

Lo schema va dunque completato con l'aggiunta delle cosiddette *equazioni costitutive* caratteristiche del materiale del corpo.

Con analogia al caso discreto possiamo introdurre i concetti di quantità di moto dell'intero sistema continuo, sommando le quantità di moto  $\rho \mathbf{v} dV$  degli elementi materiali contigui a  $P$

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) \mathbf{v}(P, t) dV,$$

di momento della quantità di moto dell'intero sistema continuo

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) (P - O) \wedge \mathbf{v}(P, t) dV,$$

e di energia cinetica totale

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) v^2(P, t) dV.$$

Durante il moto ogni parte del sistema continuo si può pensare come composta da elementi (infinitesimi) materiali di massa  $\rho dV$ , contigui al punto  $P$ , che si muovono a partire da una configurazione iniziale con velocità  $\mathbf{v}$  ed accelerazione  $\mathbf{a}$ . Per il *principio di conservazione della massa*, durante il moto di  $P$ , pur variando in generale sia densità  $\rho$  che l'elemento  $dV$ , il prodotto  $\rho dV$ , massa dell'elemento materiale contiguo a  $P$ , non può variare col tempo.

### Equazioni cardinali della dinamica

Il problema della dinamica si formula in modo analogo estendendo ai sistemi continui l'uso delle forze di inerzia.

**PRINCIPIO 2.2.1.** *Il Principio di D'Alembert afferma che le equazioni della dinamica si ottengono da quelle della statica sostituendo alle forze applicate la differenza tra le forze applicate stesse e quelle inerziali.*

Applicando tale principio otteniamo dunque le **equazioni cardinali della dinamica**

$$\int_B \rho(P, t) [\mathbf{f}_m(P, t) - \mathbf{a}(P, t)] dV + \int_{\partial B} \mathbf{\Phi}(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = 0 \quad (2.27)$$

$$\int_B (P - O) \wedge \rho(P, t) [\mathbf{f}_m(P, t) - \mathbf{a}(P, t)] dV + \int_{\partial B} (P - O) \wedge \mathbf{\Phi}(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = 0 \quad (2.28)$$

dove le forze specifiche di massa  $\mathbf{f}_m(P, t)$  sono assegnate, gli sforzi  $\mathbf{\Phi}$  su  $\partial B$  sono noti, mentre sono da determinare: il moto del sistema, la funzione  $\rho(P, t)$  e lo stato di tensione.

Si ricordi che le equazioni cardinali si riferiscono ad una qualsiasi parte del continuo  $\mathcal{C}$  ed in generale risultano necessarie ma non sufficienti.

## 2.3 Il tensore degli sforzi di Cauchy

Nel paragrafo (2.2.1) abbiamo introdotto la densità superficiale di forza  $\mathbf{\Phi}(P, \mathbf{n}, t)$ , caratterizzando le forze che le particelle del continuo, al di fuori ed all'interno della frontiera  $\partial B$  del corpo, esercitano reciprocamente attraverso la superficie  $\partial B$ .

La conoscenza dello sforzo in un punto  $P$  del sistema continuo dipende dalla normale  $\mathbf{n}$ , e quindi in generale la conoscenza dello stato di tensione del sistema in  $P$  risulta dipendere da una infinità (alla seconda) di parametri. In realtà un teorema dovuto a Cauchy consente di esprimere lo sforzo specifico

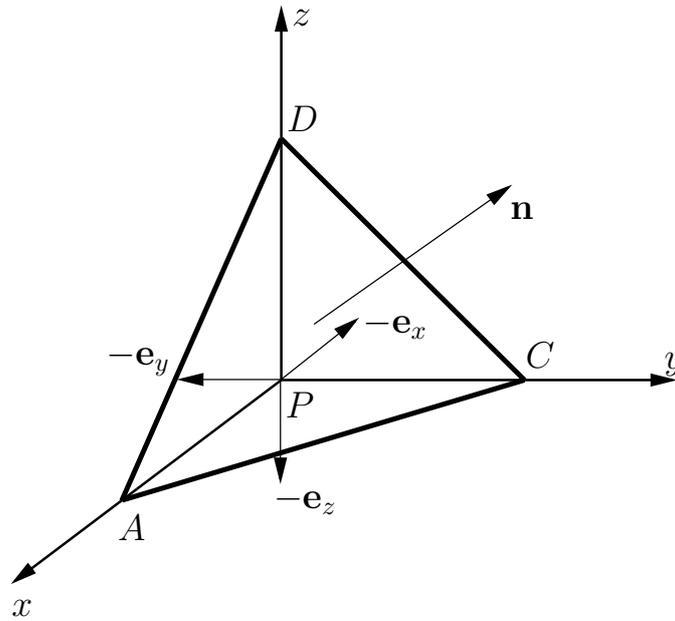
$\Phi(P, \mathbf{n}, t)$  in  $P$  relativo all'elemento di superficie caratterizzato dalla normale  $\mathbf{n}$  tramite la conoscenza degli sforzi relativi a tre direzioni fra loro ortogonali.

La dipendenza del vettore  $\Phi$  dalla direzione della normale  $\mathbf{n}$  è determinata dal **Teorema di Cauchy**:

**Teorema 2.1.** *In ogni punto del continuo è definito un tensore simmetrico, detto tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$ , tale che lo sforzo  $\Phi(P, \mathbf{n})$  è dato da*

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \mathbb{T}(P)\mathbf{n}. \quad (2.29)$$

Per dimostrare la (2.29), consideriamo nel sistema continuo  $\mathcal{C}$  un tetraedro infinitesimo  $\tau = ABCP$ , con il vertice nel punto  $P$  e gli spigoli uscenti da questo punto, paralleli agli assi coordinati e di lunghezza  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . La faccia del tetraedro  $ABC$  è caratterizzata dal versore normale (esterno alla faccia)  $\mathbf{n}$  ed ha area  $d\sigma$ . Ogni faccia  $d\sigma_i$  giace su un piano coordinato ed ha come versore



**Figura 2.4:** Tetraedro

normale esterno il vettore corrispondente  $-\mathbf{e}_i$ , mentre la direzione normale alla giacitura della quarta faccia  $d\sigma$  del tetraedro è data da  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z \quad (2.30)$$

dove

$$n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \text{con } i = x, y, z. \quad (2.31)$$

Supponendo che  $\tau$  sia sufficientemente piccolo da assumere che le forze di massa e di superficie siano costanti, effettuiamo il bilancio delle forze agenti

sul tetraedro in equilibrio

$$\rho \mathbf{f}_m dV + \Phi(P, \mathbf{n})d\sigma + \Phi(P, -\mathbf{e}_x)d\sigma_x + \Phi(P, -\mathbf{e}_y)d\sigma_y + \Phi(P, -\mathbf{e}_z)d\sigma_z = 0 \quad (2.32)$$

e considerando il principio di azione e reazione (2.24) e le seguenti uguaglianze

$$d\sigma_x = n_x d\sigma, \quad d\sigma_y = n_y d\sigma, \quad d\sigma_z = n_z d\sigma,$$

possiamo riscrivere l'espressione del bilancio delle forze (2.32) come

$$\rho \mathbf{f}_m dV + \Phi(P, \mathbf{n})d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z d\sigma = 0. \quad (2.33)$$

Dividiamo entrambi i membri per  $d\sigma$

$$\rho \mathbf{f}_m \frac{dV}{d\sigma} + \Phi(P, \mathbf{n}) - \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x - \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y - \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z = 0 \quad (2.34)$$

Essendo il termine  $\mathbf{f}_m \rho \frac{dV}{d\sigma}$  trascurabile, otteniamo la relazione

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z, \quad (2.35)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Phi_x(P, \mathbf{n}) &= \Phi_x(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_x(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_x(P, \mathbf{e}_z)n_z, \\ \Phi_y(P, \mathbf{n}) &= \Phi_y(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_y(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_y(P, \mathbf{e}_z)n_z, \\ \Phi_z(P, \mathbf{n}) &= \Phi_z(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_z(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_z(P, \mathbf{e}_z)n_z, \end{aligned}$$

che rappresentano lo sforzo specifico relativo ad un elemento di superficie comunque orientato in funzione degli sforzi specifici che si esercitano sui tre piani normali agli assi di riferimento. I termini  $\Phi(P, \mathbf{e}_x)$ ,  $\Phi(P, \mathbf{e}_y)$  e  $\Phi(P, \mathbf{e}_z)$  rappresentano rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna del **tensore degli sforzi di Cauchy**  $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \Phi_x(P, \mathbf{e}_x) & \Phi_x(P, \mathbf{e}_y) & \Phi_x(P, \mathbf{e}_z) \\ \Phi_y(P, \mathbf{e}_x) & \Phi_y(P, \mathbf{e}_y) & \Phi_y(P, \mathbf{e}_z) \\ \Phi_z(P, \mathbf{e}_x) & \Phi_z(P, \mathbf{e}_y) & \Phi_z(P, \mathbf{e}_z) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Abbiamo quindi verificato l'uguaglianza  $\Phi(P, \mathbf{n}) = \mathbb{T}\mathbf{n}$ . Il tensore degli sforzi di Cauchy ha comunemente l'espressione

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

oppure

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

I termini sulla diagonale principale sono chiamati sforzi normali  $\sigma_{ii}$  di compressione e trazione, mentre i termini  $\tau_{ij}$  intorno alla diagonale rappresentano gli sforzi di taglio.

Il tensore degli sforzi di Cauchy è un tensore simmetrico, come si può dimostrare considerando il bilancio dei momenti.

### 2.3.1 Equazioni indefinite di bilancio

Vediamo adesso come poter riscrivere la prima equazione di equilibrio in forma differenziale utilizzando il tensore di Cauchy

$$\begin{aligned} \int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma &= \int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \mathbb{T}(P) \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_B (\rho(P) \mathbf{f}_m(P) + \operatorname{div} \mathbb{T}) dV \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di Gauss  $\int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = \int_B \operatorname{div} \mathbb{T}$ . Sfruttando quindi l'arbitrarietà di  $B$  possiamo scrivere la prima equazione cardinale della statica nella forma

$$\rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T} = 0. \quad (2.39)$$

Ragionando in termini di potenza ed invarianza si arriverebbe alla stessa forma delle equazioni di bilancio.

Utilizzando il risultato appena ottenuto, possiamo riscrivere le equazioni della dinamica in una nuova forma attraverso il tensore degli sforzi di Cauchy

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{f}_m - \mathbf{a}) + \operatorname{div} \mathbb{T} &= 0, \\ \rho \mathbf{a} &= \rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Esprimendo l'accelerazione  $\mathbf{a}$  come derivata del campo di velocità seconda la descrizione lagrangiana abbiamo

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T}, \quad (2.40)$$

oppure esprimendo  $\mathbf{a}$  attraverso la descrizione euleriana e dividendo per  $\rho$  otteniamo l'espressione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbb{T} \quad (2.41)$$

equivalente a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbb{T}. \quad (2.42)$$

**Teorema 2.2.** *Il tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  è un tensore simmetrico, ovvero*

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T}. \quad (2.43)$$

Partiamo dalla seconda equazione della statica (2.26) per il nostro corpo  $B$ , e poniamo l'attenzione sul secondo termine

$$G = \int_{\partial B} (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma. \quad (2.44)$$

Utilizzando il Teorema di Cauchy, questo secondo termine  $G$  si può riscrivere come

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} (P - O) \wedge [\Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z] d\sigma \\ &= \int_{\partial B} [(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x + (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y + (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z] d\sigma \\ &= \int_B \left[ \frac{\partial[(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x)]}{\partial x} + \frac{\partial[(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y)]}{\partial y} + \frac{\partial[(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)]}{\partial z} \right] dV \\ &= \int_B (P - O) \wedge \left[ \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_y)}{\partial y} + \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_z)}{\partial z} \right] dV \\ & \quad + \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV. \end{aligned}$$

Sostituendo nella 2<sup>a</sup> equazione cardinale della statica e sfruttando l'equazione indefinita d'equilibrio, si ottiene

$$\begin{aligned} & \int_B (P - O) \wedge \left[ \rho(P)\mathbf{f}_m(P) + \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_y)}{\partial y} + \frac{\partial\Phi(P, \mathbf{e}_z)}{\partial z} \right] dV \\ & \quad + \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV \\ &= \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $B$ , tenendo conto del tensore degli sforzi, utilizzando la scritte con 2 pedici per le sue componenti, si ha

$$\begin{aligned} & \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV \\ &= \Phi_{xy}\mathbf{e}_z - \Phi_{xz}\mathbf{e}_y - \Phi_{yx}\mathbf{e}_z + \Phi_{yz}\mathbf{e}_x + \Phi_{zx}\mathbf{e}_y - \Phi_{zy}\mathbf{e}_x = 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx}, \quad \Phi_{xz} = \Phi_{zx}, \quad \Phi_{yz} = \Phi_{zy}$$

ovvero

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ji}, \quad \text{per tutti gli } i, j. \quad (2.45)$$

Possiamo così riscrivere il tensore degli sforzi in forma simmetrica

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

**Nota 2.3.1. Considerazioni sul tensore degli sforzi.** Abbiamo già parlato della proprietà di simmetria del tensore degli sforzi  $T$ . Questo implica, per il teorema spettrale per le matrici reali simmetriche, che tale tensore è diagonalizzabile secondo un sistema di coordinate ortonormali. I tre autovalori di  $\mathbb{T}$  sono reali e la base ortonormale è generata dagli autovettori del tensore  $\mathbb{T}$  che rappresentano un sistema principale.

Le direzioni degli autovettori sono quelle che hanno lo sforzo tutto normale.

## 2.4 Appendice di calcolo tensoriale

Nel formalismo tensoriale, ponendo  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  e utilizzando l'operatore *nabla* per il gradiente, si ha

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Verichiamo

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \\ &= (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v} + ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \mathbf{e}_j + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_j \mathbf{e}_j \\ &= \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}. \end{aligned}$$

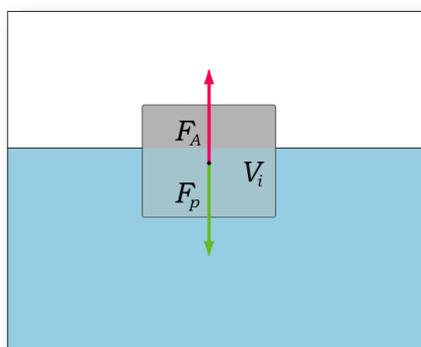
## Capitolo 3

# I fluidi

I fluidi sono stati fin dall'antichità oggetto di interesse scientifico oltre che naturale e tecnico. Secondo la storia conosciuta il primo a captare la somiglianza tra aria ed acqua fu il grande filosofo Aristotele (Calcidica 384 a.C.- Calcide 322 a.C.), il quale attribuì ad esse una proprietà comune chiamata *sottigliezza*, l'antenata della densità.

Se l'idea aristotelica aveva centrato il concetto qualitativo, il primo a pervenire ad una corretta e sorprendente teoria sul comportamento dei fluidi fu lo scienziato siracusano Archimede (Siracusa 287 a.C. circa - Siracusa 212 a.C.), precursore della scienza idrostatica.

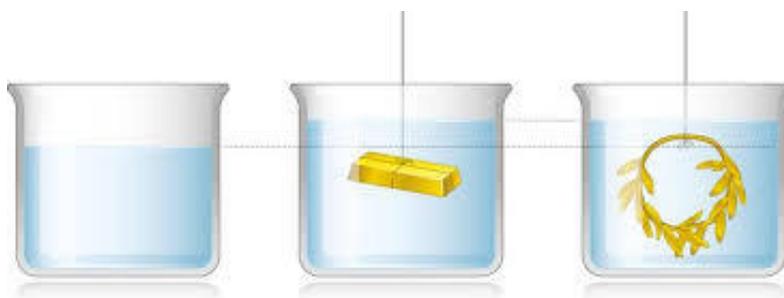
Si narra che le sue grandi scoperte siano legate ad un curioso aneddoto: il tiranno di Siracusa Gerone II, sospettando che la sua corona, appena forgiata dall'orafo di corte, non fosse stata realizzata con oro puro, decise di rivolgersi al mondo scientifico di cui Archimede era massimo esponente. Il mito vuole che lo scienziato, ormai rassegnato a non trovare soluzione, abbia cercato pace presso le terme pubbliche, dove si accorse di un fatto che fino a quel giorno era passato inosservato: immergendo il corpo nella vasca, il livello dell'acqua si alzava. Grazie a tale semplice intuizione, il genio siracusano poté formulare



**Figura 3.1:** Il principio di Archimede sul galleggiamento dei corpi

i famosi **Principi di Archimede**: *”Qualsiasi solido più leggero di un fluido, se collocato nel fluido, si immergerà in misura tale che il peso del solido sarà uguale al peso del fluido spostato. Un solido più pesante di un fluido, se collocato in esso, discenderà in fondo al fluido e se si peserà il solido nel fluido, risulterà più leggero del suo vero peso, e la differenza di peso sarà uguale al peso del fluido spostato.”*

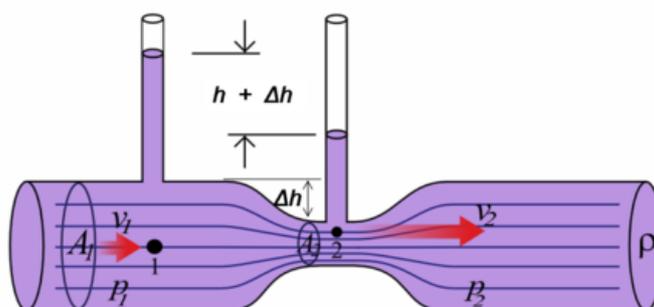
Tale scoperta rese possibile la misura della densità della corona confrontando semplicemente gli spostamenti di liquido in seguito all’immersione, in un recipiente colmo d’acqua, del cimelio e di un blocco d’oro puro di pari peso: ma lo stesso peso non corrispondeva a quanto pare allo stesso volume. Se



**Figura 3.2:** La corona spostava una quantità maggiore di acqua rispetto al blocco d’oro: l’orefice aveva sostituito una parte di oro con argento

Archimede con il trattato *Sui Galleggianti* aveva gettato le basi della scienza idrostatica, precursore della scienza fluidodinamica fu senza dubbio Leonardo da Vinci, pittore, filosofo ed ingegnere. Leonardo infatti, osservando il corso dei fiumi, il flusso nei canali e la forma dei vortici, capì che, per quanto potesse sembrare caotico, il movimento dell’acqua seguiva schemi prevedibili.

*”L’acqua scorre sempre più velocemente quando è costretta attraverso una strozzatura e l’aumento della velocità dell’acqua è proporzionale al restringimento della sezione del canale di passaggio.”* Questa straordinaria scoperta



**Figura 3.3:** Legge di Bernoulli

fu in seguito chiamata: **Principio di continuità**. Altro grande passo nello studio della fluidodinamica venne compiuto con il medico e matematico Daniel Bernoulli (Groninga 1700 - Basilea 1782), il quale dedicò tutta la vita allo studio dei fluidi avanzando e provando importanti teorie. Egli fu il primo a trovare un metodo semplice ed efficace per misurare la pressione di un fluido che scorre in un vaso sanguigno ed, in generale, in un canale; riuscì inoltre a trovare la relazione che lega pressione e velocità in un fluido in movimento. Molti studiosi hanno contribuito alla crescita delle conoscenze riguardanti i fluidi e le loro applicazioni ingegneristiche; ne sono stati ricordati solo alcuni allo scopo di evidenziare i principi cardine dell'idrostatica e della fluidodinamica.

### 3.1 Statica e dinamica dei fluidi

I fluidi, liquidi o gassosi, sono dei sistemi continui incapaci di sostenere sforzi di taglio in condizioni di riposo; l'azione di tali sforzi è infatti responsabile della continua deformazione subita dai fluidi.

Facendo un semplice confronto tra il comportamento di un corpo solido ed un corpo fluido, per esempio un sasso e l'acqua, osserveremo che tutte le parti del sasso, se colpito da una pala, si muoveranno simultaneamente, mentre l'acqua, colpita dalla stessa pala, schizzerà dappertutto.

**Definizione 3.1.** *Si dicono fluidi i sistemi continui nei quali in condizioni statiche sono presenti soltanto sforzi di compressione.*

Quindi un fluido è caratterizzato dall'assenza di forze di taglio e questo comporta una proprietà molto interessante, conosciuta come Teorema di Pascal.

#### 3.1.1 I fluidi perfetti

**Teorema 3.1. Teorema di Pascal.** *In un fluido incomprimibile uno stato di pressione prodotto in qualunque sua parte viene trasmesso inalterato in ogni suo punto e in ogni sua direzione.*

Con questo teorema, Pascal definì fluidi perfetti come sistemi continui nei quali sono presenti soltanto forze di pressione in ogni direzione.

Alla classe dei fluidi perfetti, appartengono i gas ed alcuni fluidi (come l'acqua), ma possono essere considerati perfetti, in buona approssimazione, tutti i fluidi con bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ne consegue che in un fluido, essendo assenti sforzi di taglio, sono presenti solo direzioni principali, per le quali la struttura del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  è diagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

**Proprietà 3.1.** *In un fluido in equilibrio il tensore degli sforzi è diagonale.*

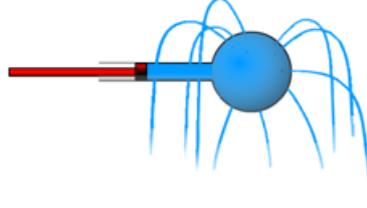


Figura 3.4:

Dalla definizione di fluido secondo Pascal, si può provare il cosiddetto Teorema di Pascal, conosciuto con questo nome in letteratura, nella seguente forma.

**Teorema 3.2. Teorema di Pascal.** *In un fluido in equilibrio, il tensore degli sforzi ha la forma*

$$\mathbb{T}(P, t) = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

dove  $p$  è uno scalare positivo detto **pressione**, cioè gli sforzi sono tutti uguali.

*Dimostrazione.* Usiamo il teorema di Cauchy con il tempo  $t$  fissato,

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = \Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z.$$

Sostituendo in  $\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$  si ha

$$\Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$$

Utilizzando nel primo membro la definizione di fluido e nel secondo membro l'espressione del vettore  $\mathbf{n}$ , l'espressione sopra può essere riscritta come

$$-p(P, \mathbf{e}_x, t)n_x \mathbf{e}_x - p(P, \mathbf{e}_y, t)n_y \mathbf{e}_y - p(P, \mathbf{e}_z, t)n_z \mathbf{e}_z = -p(P, \mathbf{n}, t)(n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z).$$

Uguagliando i due membri si ottiene per ogni direzione  $\mathbf{n}$

$$p(P, \mathbf{n}, t) = p(P, \mathbf{e}_x, t) = p(P, \mathbf{e}_y, t) = p(P, \mathbf{e}_z, t),$$

da cui

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, t) \mathbf{n}.$$

□

Un esperimento molto semplice, ma capace di illustrare efficacemente lo stato di pressione di un corpo in un fluido, consiste nell'immergere totalmente un uovo in acqua: si osserva che la forma del tuorlo rimane invariata.

Un corpo immerso in un fluido è sottoposto ad una pressione di compressione, lungo le direzioni principali, di uguale intensità, ovvero si trova in uno stato di

pressione idrostatica. Ne consegue che non è presente uno stato di tensione deviatorico, ovvero il corpo non subirà cambiamenti di forma ma solo di volume. Di stessa natura è lo stato di pressione a cui sono sottoposte le bolle di sapone, internamente ed esternamente, mentre fluttuano nell'aria; esse infatti rimangono sferiche.

#### Equazione di stato

La pressione  $p$ , la densità  $\rho$  e la temperatura  $\theta$  in un fluido sono legate tramite l'equazione di stato.

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (3.3)$$

#### Equazione fondamentale della statica

Grazie al Teorema di Pascal sappiamo che le forze esercitate all'interno di un fluido a riposo sono esclusivamente forze di pressione, ovvero un fluido perfetto è caratterizzato dall'assenza di sforzi di taglio.

Tenendo conto del Teorema di Pascal (3.1), possiamo scrivere

$$\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbb{T} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f} - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f} - \nabla p = 0$$

e quindi l'**equazione fondamentale della statica dei fluidi** ha la forma

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p. \quad (3.4)$$

Nel caso della presenza del solo peso, l'equazione della statica si riduce a

$$\rho \mathbf{g} = \nabla p. \quad (3.5)$$

Si osservi che la pressione è stata introdotta con il segno meno affinché risulti positiva per sforzi di compressione.

#### Equazione fondamentale della dinamica

Continuiamo a chiamare perfetto anche in condizioni dinamiche un fluido il cui tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  rimanga diagonale anche durante il movimento.

Fanno parte di questa classe tutti quei fluidi che in buona approssimazione hanno bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ricaviamo adesso l'**equazione di moto per un fluido perfetto** applicando la seconda legge di Newton

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p \quad (3.6)$$

essendo  $\mathbf{a}$  il vettore accelerazione,  $\rho$  la densità del fluido ed  $\mathbf{f}_m$  le forze specifiche di massa.

Dividendo per la densità  $\rho$ , otteniamo l'espressione del vettore accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

che può essere riscritta sotto forma di derivata materiale in rappresentazione euleriana

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.7)$$

Questa equazione, detta **equazione indefinita della dinamica**, contiene cinque incognite, che possono essere ridotte assumendo valida l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.8)$$

ed introducendo inoltre la **funzione di stato**  $F$  che regola il legame tra la pressione  $p$  (pressione idrodinamica), la temperatura  $\theta$  e la densità  $\rho$  del fluido in movimento

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (3.9)$$

Per risolvere completamente il problema di un fluido in movimento è comunque necessario determinare un'ultima relazione. L'informazione mancante riguarda in particolare la densità  $\rho$ , infatti fino ad ora sono state fatte considerazioni del tutto indipendenti dalla natura del fluido; è necessario quindi fornire un'ulteriore informazione di carattere fisico che espliciti il *legame tra pressione e densità*; questo può essere possibile attraverso un'approssimazione del fenomeno fisico. Esistono infatti alcune situazioni particolari, a dire il vero molto frequenti, che permettono di semplificare il modello del fluido:

- **Fluidi barotropici:** quando l'equazione di stato (3.9) è indipendente dalla temperatura  $\theta$ , il fluido si trova sottoposto a trasformazioni isoterme oppure adiabatiche e la densità può essere espressa in funzione della pressione

$$p = p(\rho) \Rightarrow \rho = \rho(p). \quad (3.10)$$

Da sottolineare il fatto che nella (3.10) non si ha dipendenza dalla temperatura ed è utilizzabile esclusivamente nelle trasformazioni adiabatiche.

- **Fluidi barotropici con influenza della temperatura:** qualora non fosse possibile trascurare la temperatura, il fluido si considera ancora barotropico, ma si deve fare uso delle leggi della termodinamica e dell'equazione del trasporto del calore per definire l'incognita temperatura.
- **Fluidi incomprimibili:** la densità di un fluido è costante

$$\rho = \text{costante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (3.11)$$

e dall'equazione di continuità ricaviamo la relazione

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.12)$$

Questo accade nei liquidi che sono considerati incompressibili, ed in generale con buona approssimazione la densità viene considerata costante nei moti in aria a bassa velocità, circa 0,3 Mach.

**Nota 3.1.1.** Si ricordi che il numero di Mach ( $Ma$ ) è il rapporto della velocità di un corpo in un fluido e la velocità del suono nel fluido: Questo numero permette di stabilire l'importanza degli effetti di comprimibilità di un fluido. Come abbiamo già detto, se il numero di Mach è minore di 0,3 l'errore che si commette considerando la densità costante è trascurabile.

Possiamo ricapitolare che il problema di un fluido perfetto in movimento è determinato attraverso le seguenti relazioni fondamentali:

- l'equazione di moto (3.7) ;
- l'equazione di continuità (3.8);
- la funzione di stato (3.9);
- una relazione di approssimazione del fenomeno fisico.

Il sistema di equazioni che si ottiene è noto con il nome di **Equazioni di Eulero** dalle quali, nel caso di fluidi incompressibili, si ottengono le equazioni di Bernoulli.

## 3.2 Trinomio di Bernoulli

Introduciamo il trinomio di Bernoulli

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}$$

che possiamo scrivere nella forma più generale

$$B = \frac{1}{2}v^2 - U + \mathcal{P},$$

dove  $\mathcal{P}$  è l'energia potenziale delle pressioni, cioè la primitiva della funzione  $\frac{1}{\rho(p)}$ , ovvero

$$\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho(p)} dp + \mathcal{P}_0$$

dove  $\mathcal{P}_0$  è la costante di integrazione. Si noti che la pressione dipende dal punto e dal tempo, quindi  $\mathcal{P}(P, t) = \mathcal{P}(p(P, t))$ .

**Teorema 3.3.** *Nei moti stazionari (o permanenti, ovvero quando la velocità  $\mathbf{v}$  è localmente costante) di un fluido perfetto barotropico, sottoposto a forze conservative, il trinomio di Bernoulli si conserva in ogni punto del fluido.*

*Dimostrazione.* In caso di forze conservative l'equazione di moto  $\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \nabla p$  diventa

$$\mathbf{a} = \nabla(U - \mathcal{P})$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $\mathbf{v}$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= \nabla(U - \mathcal{P}) \cdot \frac{dP}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{d}{dt} (U - \mathcal{P}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue la costanza di  $B$

$$B = \frac{1}{2} v^2(t) - \mathcal{U}(t) + \mathcal{P}(P(t)) = \text{costante}, \quad \forall t$$

dove  $\mathcal{U}(t) = U(P(t))$ . □

**Nota 3.2.1.** I trinomio di Bernoulli rappresenta l'energia totale per unità di massa del fluido.  $\frac{1}{2}v^2$  è l'energia cinetica,  $U$  quella potenziale della forza peso (forze esterne),  $\mathcal{P}$  corrisponde all'energia potenziale delle forze interne.

Il lettore dovrebbe essersi accorto che il teorema precedente è stato enunciato seguendo il punto di vista lagrangiano.

Passiamo ora alla formulazione euleriana del trinomio di Bernoulli.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \nabla (\mathcal{U} - \mathcal{P}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) \quad (3.14)$$

Nel caso di

1. moti stazionari  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ ,
2. irrotazionali  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$

si ha

$$\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) = 0,$$

ovvero

$$B = \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{U} + \mathcal{P} = \text{costante}.$$

**Teorema 3.4.** *In un moto stazionario di un fluido perfetto barotropico soggetto a forze di massa conservative, le superfici energetiche sono simultaneamente superficie di corrente e di vortice.*

Ricordiamo le definizioni. Le linee di flusso sono quelle linee che sono tangenti alla velocità del fluido, esse corrispondono alle curve integrali. Per ovvie ragioni fisiche le linee di flusso non si possono incrociare fra loro. La superficie di flusso si ottiene considerando tutte le linee di flusso che passano per una curva fissata.

Se il moto è stazionario allora le linee di flusso prendono il nome di linee di corrente. Analogamente si hanno le superfici di corrente.

Le linee tangenti al campo vettoriale del rot  $\mathbf{v}$  si chiamano linee di vortice. Analogamente si hanno le superfici di vortice. Quando le curve per cui passano le linee di flusso e quelle di corrente sono chiuse si hanno i tubi di flusso ed i tubi di corrente.

### Moti irrotazionali

L'equazione di Eulero si riduce per i moti stazionari a

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla B.$$

Essendo  $\nabla B$  normale alle superfici  $B = \text{costante}$ , queste superfici sono tangenti sia al vettore  $\mathbf{v}$  che al vettore  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  (se  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ ).

Se ne deduce che  $B$  ha lo stesso valore in tutti i punti del fluido ovvero tutti i punti hanno la stessa energia specifica  $B$ .

ESEMPIO 3.2.1. *Liquido pesante* Si consideri un fluido incompressibile e pesante, il trinomio assume la forma

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho},$$

che essendo costante si può scrivere come somma di tre quote

$$B = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}.$$

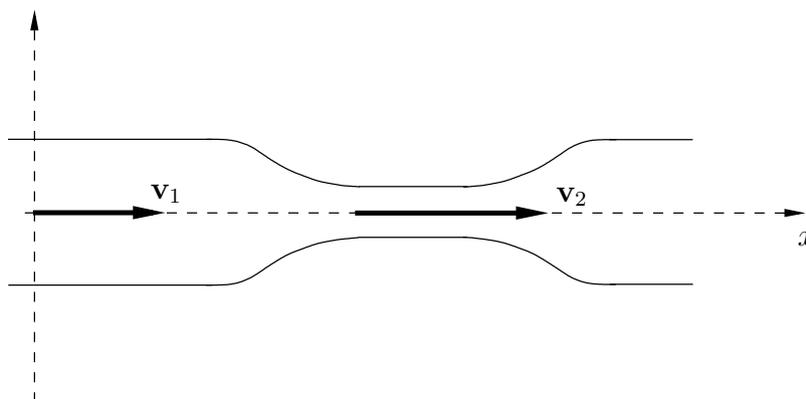
Ogni addendo è dimensionalmente una lunghezza

- $\frac{v^2}{2g}$  è la **quota cinetica**. La quota cinetica è la quota da cui si deve lasciar cadere un grave perché acquisti la velocità  $v$ ;
- $z$  è la **quota effettiva**, in cui si trova il punto ;
- $\frac{p}{\gamma}$  è la **quota piezometrica**. La quota piezometrica è l'altezza di una colonna del fluido che produce sul fondo la pressione  $p$ .

ESEMPIO 3.2.2. *Teorema di Torricelli*. Si consideri un recipiente che contiene un liquido, la cui superficie libera si trovi ad altezza  $h$  rispetto al fondo del recipiente, dove è praticato un foro da cui fuoriesce il liquido. Il liquido nel recipiente è mantenuto alla stessa altezza facendo attenzione che il moto risulti stazionario e senza vortici. Calcoliamo la velocità di uscita del liquido dal foro.

Sulla superficie libera si ha  $B = \frac{p}{\gamma}$ , mentre nel punto in cui fuoriesce il liquido si ha  $B = \frac{v^2}{2g} - h + \frac{p}{\gamma}$ . Quindi utilizzando la costanza del trinomio di Bernoulli (moto stazionario e non vorticoso), si conclude che  $v = \sqrt{2gh}$ .

**ESEMPIO 3.2.3. Tubo di Venturi.** Si consideri ancora un fluido in moto stazionario e non vorticoso che si muove in un tubo, come in figura (3.5) La



**Figura 3.5:** Tubo di Venturi.

costanza del flusso attraverso le sezioni del tubo (Legge di Castelli) implica che la velocità sarà più alta nella strozzatura del tubo. Inoltre il trinomio di Bernoulli si mantiene costante e la pressione diminuirà in corrispondenza della stessa strozzatura. Si chiama effetto Venturi la depressione che avviene a valle della strozzatura. È bene osservare che nella strozzatura il moto del fluido dovrà risentire poco di quello che accade nelle regioni di tubo a monte ed a valle, dove le pareti non sono più orizzontali.

**Nota 3.2.2. Flussi irrotazionali.** Per verificare se un flusso irrotazionale resta tale nel tempo, è necessario avere una legge di variazione per il  $\text{rot } \mathbf{v}$ . A tal fine calcoliamo il rotore di ogni elemento al primo membro dell'equazione di moto (3.7)

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + g \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0,$$

ovvero tenendo conto della costanza del trinomio di Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

dalle quali si deduce che se il flusso è inizialmente irrotazionale, si mantiene tale durante il moto.

### 3.3 Il campo delle velocità

Sia  $\mathbf{v}(x, t)$  il campo delle velocità nel punto  $\mathbf{x}$  del fluido, ricordiamo che abbiamo già introdotto precedentemente il gradiente di velocità

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Sviluppiamo ora in serie fino al 1° ordine nell'intorno del punto  $\mathbf{x}$  la velocità, ottenendo

$$v_i(\mathbf{x}') \simeq v_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})(x'_k - x_k), \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Se decomponiamo il tensore  $\nabla \mathbf{v}$ , rappresentato dalla matrice (3.16), in parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} + \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T}{2} = \mathbb{S} + \Omega$$

allora possiamo riscrivere lo sviluppo nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (3.18)$$

dove le matrici  $\mathbb{S}$  ed  $\Omega$  sono valutate nel punto  $\mathbf{x}$  ed operano come al solito col prodotto righe per colonne.

In particolare vediamo come opera  $\Omega$

$$\Omega \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

È noto che ad ogni tensore antisimmetrico si può associare un vettore; nel nostro caso introdotto

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_z$$

si può scrivere

$$\Omega \mathbf{y} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}. \quad (3.19)$$

Tornando al nostro problema, lo sviluppo al primo ordine (3.18) si scrive come

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (3.20)$$

Definiamo il vettore vorticità

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

e riscriviamo lo sviluppo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{\mathbb{S}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{deformazione}}. \quad (3.21)$$

Lo sviluppo al primo ordine si può interpretare come un atto di moto locale dato dalla somma di un atto di moto rigido con velocità di trascinamento  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  e velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  e di una componente di deformazione.

Il tensore  $\mathbb{S}$  è rappresentato da una matrice reale e simmetrica. È ben noto che una tal matrice ammette 3 autovalori reali e 3 autovettori. Nel nuovo riferimento delle direzioni degli autovettori l'intorno del punto  $\mathbf{x}$  si accorcia e si allunga nelle direzioni principali; in quelle direzioni l'atto di moto è una deformazione pura.

Si noti che quanto è stato detto si riferisce ad una visione locale del flusso di velocità.

## 3.4 Fluidi viscosi

### 3.4.1 Introduzione ai fluidi viscosi

Il modello dei fluidi perfetti che si basa sulle equazioni di Eulero è un modello detto di approssimazione di ordine zero. Nel modello di Eulero non si tengono conto degli sforzi di taglio e ciò ne limita l'applicazione a problemi in cui sono presenti pareti ed ostacoli.

Facciamo un esempio.

**ESEMPIO 3.4.1.** Si consideri un fluido perfetto incomprimibile fra due piani  $z = 0$  e  $z = H$  e se ne determini il campo di velocità stazionario con  $\mathbf{v} = v_x(x, z)\mathbf{e}_x$  ed in presenza della forza peso. Applichiamo l'equazione di Eulero

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) \quad (3.22)$$

limitandoci alle due componenti  $x$  e  $z$ . Calcoliamo intanto

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_y \wedge v_x \mathbf{e}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \mathbf{e}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z, \\ \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Sostituendo in (3.22) si ottiene

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x = \nabla (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

ovvero nelle due componenti, tenendo conto dell'espressione di  $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( -gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \end{cases} . \quad (3.23)$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{p}{\rho} = -gz + c(x).$$

Scriviamo anche l'equazione di incomprimibilità  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , che implica

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

e dalla prima equazione di (3.23), si può ricavare  $c(x)$ ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \implies \frac{dc}{dx} = 0 \implies c = \text{costante}.$$

Quindi il campo di velocità  $v_x(z)$  rimane indeterminato. In questo modello l'assenza degli sforzi di taglio non fa influenzare fra loro i piani  $z = \text{costante}$ .

### 3.4.2 Fluidi viscosi

Fino ad ora abbiamo considerato fluidi ideali caratterizzati esclusivamente da forze agenti in direzione normale e quindi gli sforzi di taglio erano assenti. Prendiamo adesso in considerazione una classe più ampia e generale di fluidi dove, oltre alle forze agenti in direzione normale, siano presenti anche sforzi di taglio, responsabili del trasferimento dei momenti. In generale quando si verificano cambiamenti di velocità entro brevi distanze, gli sforzi di taglio non possono essere trascurati. I fluidi che presentano tali caratteristiche sono detti **fluidi viscosi**.

Ci chiediamo come possiamo caratterizzare un campo di velocità in modo tale che non appaia in quiete in nessun sistema di riferimento e la risposta naturale è che dobbiamo cercare un campo che non deve coincidere col campo di velocità di un moto rigido. Il nuovo tensore degli sforzi deve contenere il tensore dei fluidi perfetti più un termine che si annulli quando il fluido compie un moto rigido. In componenti dovrà essere

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Ricordiamo le proprietà che hanno i moti rigidi e teniamo in mente che  $\sigma_{ij}$  deve dipendere linearmente dalle derivate

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Pensiamo al campo delle velocità decomposto in parte simmetrica e antisimmetrica.

1. La parte simmetrica  $\frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2}$ , che abbiamo chiamato tensore di velocità di deformazione, in componenti

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

ha la proprietà che è nulla per un moto rigido. Il nome di deformazione viene proprio da questo fatto che per i moti rigidi la deformazione è zero.

2. Inoltre i moti rigidi sono solenoidali dovendosi conservare i volumi e  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Nella prossima sezione rivediamo con maggiori dettagli come si può caratterizzare il tensore degli sforzi per i fluidi viscosi.

### 3.5 Equazioni di Navier Stokes

Consideriamo quindi la seguente relazione lineare giustificata dal teorema di Cauchy

$$\text{Forza agente su } S \text{ per unità di area} = -p(x, t)\mathbf{n} + \mathbb{T}(x, t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.24)$$

dove  $\mathbb{T}$  è il tensore degli sforzi con le seguenti proprietà:

1.  $\mathbb{T}$  dipende linearmente dal gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{v}$ , ovvero è collegato a  $\nabla \mathbf{v}$  attraverso una qualche trasformazione lineare in ogni punto;
2.  $\mathbb{T}$  è invariante rispetto a rotazioni rigide, ovvero data una matrice ortogonale  $\mathbb{U}$  risulta

$$\mathbb{T}(\mathbb{U}\nabla \mathbf{v}\mathbb{U}^{-1}) = \mathbb{U}\mathbb{T}(\nabla \mathbf{v})\mathbb{U}^{-1}; \quad (3.25)$$

3.  $\mathbb{T}$  è simmetrico.

Dalla proprietà di simmetria segue l'esclusiva dipendenza di  $\mathbb{T}$  dalla parte simmetrica di  $\nabla \mathbf{v}$ , quindi solo dalla deformazione  $\mathbb{D}$ , poichè

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (3.26)$$

Essendo  $\mathbb{T}$  una funzione lineare di  $\mathbb{D}$ , anche i suoi autovalori saranno funzioni lineari di  $\mathbb{D}$ ; inoltre per la seconda proprietà, scegliendo una matrice ortogonale  $\mathbb{U}$  per permutare due autovalori di  $\mathbb{D}$ , essa permuterà anche i corrispondenti autovalori di  $\mathbb{T}$ .

Segue che le uniche funzioni lineari in grado di soddisfare tali caratteristiche sono della forma

$$T_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\eta d_i \quad (3.27)$$

dove  $T_i$  sono gli autovalori di  $\mathbb{T}$ , mentre  $d_i$  quelli di  $\mathbb{D}$  con  $i = 1, 2, 3$ .  
Ricordando che

$$d_1 + d_2 + d_3 = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3.28)$$

si ottiene la seguente espressione di  $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\eta\mathbb{D} \quad (3.29)$$

dove  $\mathbb{I}$  è la matrice identità.

Tale relazione può essere riscritta nel seguente modo

$$\mathbb{T} = 2\eta \left[ \mathbb{D} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} \right] + \eta_v(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I}. \quad (3.30)$$

Le costanti  $\eta$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il primo ed il secondo **coefficiente di viscosità**, mentre  $\eta_v$

$$\eta_v = \lambda + \frac{2}{3}\eta \quad (3.31)$$

è il **coefficiente di viscosità di volume**.

Per la seconda legge di Newton la variazione del flusso deve essere uguale alla forza applicata su di esso

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} d\mathbf{v} = \int_{\partial V_t} (p \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds$$

e facendo uso del *teorema del trasporto e della divergenza*, otteniamo le **equazioni di Navier-Stokes**

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + (\lambda + \eta)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.32)$$

dove

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{v}$$

è il laplaciano di  $\mathbf{v}$ .

Insieme all'equazione di continuità e all'equazione dell'energia, le equazioni di Navier-Stokes descrivono il moto di un fluido viscoso comprimibile.

Nel caso di un fluido incomprimibile omogeneo ( $\rho = \rho_0 = \text{costante}$ ), le equazioni di Navier-Stokes assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

dove  $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$  è il coefficiente di viscosità cinematica, mentre  $p' = \frac{p}{\rho_0}$ .  
Quindi per i fluidi newtoniani avremo il seguente sistema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}). \end{cases} \quad (3.33)$$

Per la risoluzione del sistema è necessario imporre un'ulteriore condizione: oltre ad assumere  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , situazione in cui il flusso non attraversa il bordo ma si muove solo tangenzialmente ad esso, aggiungiamo la condizione che sulle pareti del solido la velocità tangenziale sia nulla, condizione di non scivolamento

$$\mathbf{v} = 0.$$

**ESEMPIO 3.5.1. Moto di Poiseuille.** Supponiamo di avere due piani infiniti paralleli con un fluido che scorre al loro interno con velocità lungo un'unica direzione. Questo moto è il cosiddetto moto di Poiseuille.

Sia il fluido viscoso pesante incomprimibile in moto stazionario in una regione di lunghezza  $L$  ed altezza  $H$  con i due piani paralleli a quota  $y = 0$  e  $y = H$ . Il fluido a quota  $y = 0$  ha una pressione iniziale  $p_{in}$  nel punto di ascissa  $x = 0$  e una pressione finale  $p_{out}$  nel punto di ascissa  $x = L$ .

Trattiamo il problema in due dimensioni considerando l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  secondo l'asse  $\mathbf{e}_y$ . Il campo è unidimensionale, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\mathbf{v}(x, y) = v_x(x, y)\mathbf{e}_x$$

nell'ipotesi di conoscere i valori della pressione agli estremi della regione.

Essendo il moto incomprimibile e stazionario, deve essere  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , se la soluzione esiste, essendo la velocità lungo un'unica direzione, allora questa soluzione deve essere costante lungo la direzione  $x$  ovvero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \implies v_x = v_x(y). \quad (3.34)$$

L'equazione di moto di Navier-Stokes si riduce a

$$\nabla \left( gy + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\eta \nabla^2 v), \quad (3.35)$$

con le condizioni al contorno  $v(0) = v(H) = 0$ , che corrisponde ad un sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( gy + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

Dalle due ultime due equazioni (dalla seconda in realtà) si ottiene subito

$$p = -\rho gy + g(x), \quad (3.37)$$

con  $g(x)$  funzione incognita. La pressione è funzione lineare della quota come nel caso statico. Sostituiamo ora il valore della pressione nella componente di (3.36) secondo la direzione  $\mathbf{e}_x$ , ottenendo

$$\frac{dg}{dx}(x) = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}(y) = G,$$

pertanto  $\frac{dg}{dx}$  è una funzione costante, che indichiamo con  $G$ , e  $g(x)$  è una funzione lineare affine. Quindi la legge con cui varia la pressione diventa

$$p = -\rho gy + Gx + b,$$

con  $G$  e  $b$  costanti da determinarsi. Imponendo, per  $y = 0$ , in  $x = 0$  e  $x = L$  i valori di pressione  $p_{in}$  e  $p_{out}$  rispettivamente, si ottiene  $b = p_{in}$  e  $G = \frac{\Delta p}{L}$  dove  $\Delta p = p_{out} - p_{in}$ . L'andamento della velocità è dato dall'equazione

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2}(y) = \frac{\Delta p}{\eta L},$$

dopo una prima integrazione si ha

$$\begin{cases} \int_0^y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y') dy' = \int_0^y \frac{\Delta p}{\eta L} dy', \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(0) = \frac{\Delta p}{\eta L} y. \end{cases} \quad (3.38)$$

e dopo una seconda integrazione si ha

$$\begin{cases} \int_y^h \frac{\partial v_x}{\partial y}(y') dy' = \frac{\Delta p}{\eta L} \int_y^h y' dy', \\ v_x(y) - v_x(H) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right). \end{cases} \quad (3.39)$$

$$v(y) = \frac{G}{2\eta} (y^2 - Hy).$$

In conclusione il profilo di velocità fra i due piani paralleli è parabolico. Il modulo dello sforzo di taglio è  $\eta|v'(y)| = G \left| y - \frac{H}{2} \right|$ , ovvero è nullo al centro fra i due piani e massimo alle pareti.

**Esercizio 3.5.1.** *Come esercizio lasciamo allo studente di studiare il problema dell'esempio precedente nel caso di geometria assiale. Si tralasci per semplicità l'accelerazione di gravità.*

**ESEMPIO 3.5.2.** Studiamo il modello precedente nel caso si trascuri l'accelerazione di gravità, nel caso di un canale lungo  $L$  e limitato anch'esso da due piani distanti  $2H$ . Siano  $p_{in}$  e  $p_{out}$  le pressioni in ingresso ed uscita e sia la differenza di pressione  $\Delta p = p_{out} - p_{in} < 0$ .

Con le stesse notazioni, possiamo scrivere il sistema di quattro equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

dove la prima equazione discende dall'equazione di continuità. Dalle ultime due equazioni si ricava che  $p = p(x)$ , ed infine dalla seconda si ottiene l'equazione risultante

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = G = \text{costante},$$

poiché le due funzioni indipendenti di diverse variabili indipendenti. Dalla prima ( $\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \text{costante}$ ) si ricava

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{H}x + p_{in}$$

Nella seconda equazione ( $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = \text{costante} = \frac{\Delta p}{\eta L}$ ) aggiungiamole condizioni di non slittamento sulla parete (velocità nulla sulle pareti)

$$v_x(-H) = v_x(H) = 0.$$

Effettuata l'integrazione si ha

$$v_x(y) = v_x(H) + \frac{\Delta p}{\eta L} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right),$$

e per la condizione di non slittamento si ottiene il profilo parabolico della velocità

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (H^2 - y^2).$$

Vediamo adesso, relativamente a questo esempio, come è possibile adimensionalizzare questo tipo di equazioni.

Scegliendo una lunghezza caratteristica  $L$  ed una velocità caratteristica  $V$ , adimensionalizziamo le grandezze  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $t$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^a &= \frac{\mathbf{v}}{V} \\ \mathbf{x}^a &= \frac{\mathbf{x}}{L} \quad t^a = \frac{tV}{L} \end{aligned}$$

ottenendo così l'equazione di Navier-Stokes per fluidi newtoniani adimensionalizzata

$$\frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + \mathbf{v}^a \cdot \nabla \mathbf{v}^a = -\nabla(p - U) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^a \quad (3.41)$$

dove  $U$  è il potenziale di  $\mathbf{g}$ , mentre  $Re$  è un numero adimensionale detto numero di Reynolds che fisicamente rappresenta il rapporto tra le forze di gravità e le forze viscosive.

La soluzione della (3.41) risulta valida se il numero di Reynolds assume valori piccoli caratteristici dei flussi in regime laminare.

### 3.5.1 Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-stokes

Vediamo alcune proprietà di scalatura delle equazioni di Navier-Stokes introducendo dei parametri adimensionali.

Consideriamo un fluido incomprimibile e supponiamo un dominio rettangolare di lunghezza  $L$  ed altezza  $H$  per il flusso, con moto in direzione della verticale discendente  $x$  in presenza dell'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$ .

L'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes, essendo  $\mathbf{v} = (u_x, u_y)$  sono

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \rho g, \\ \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (3.42)$$

siamo quindi in presenza di

1. tre variabili indipendenti  $x, y, t$ ;
2. tre variabili dipendenti  $u_x, u_y, p$ ;
3. cinque parametri  $L, H, \rho, \eta, g$ .

Altri parametri sono poi introdotti attraverso le condizioni iniziali e le condizioni sul bordo. Assumiamo inoltre che la velocità media all'ingresso del dominio sia uguale a  $V$ .

I termini che compaiono nelle equazioni (3.39) possono essere scalati. Se ad esempio  $L$  ed  $H$  sono dello stesso ordine di grandezza, possiamo scegliere una o l'altra per scalare le variabili  $x$  e  $y$

$$x^a = \frac{x}{L}, \quad y^a = \frac{y}{L}.$$

La velocità può essere invece scalata attraverso la velocità caratteristica del fluido  $V$

$$u_x = \frac{u_x}{V} \quad u_y = \frac{u_y}{V}.$$

A questo punto dobbiamo trovare due unità caratteristiche per adimensionalizzare  $t$  e  $p$ . Il tempo può essere scalato attraverso  $\frac{L}{V}$  oppure  $\frac{L^2}{\nu}$ , con  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , mentre per la pressione  $p$  si possono utilizzare i fattori  $\frac{\eta V}{L}$  o  $\rho V^2$ .

La scelta tra i parametri di scalatura è guidata essenzialmente dalla fisica del flusso: ad esempio per la variabile tempo, è opportuno utilizzare  $\frac{L}{V}$  quando risulta dominante l'effetto convettivo del flusso; se invece è prevalente l'effetto della diffusione rispetto alla vorticità, è meglio utilizzare  $\frac{L^2}{\nu}$ .

Per i fluidi viscosi sceglieremo  $\frac{\eta V}{L}$  per adimensionalizzare la pressione, dato che il moto è dovuto in gran parte alla pressione e ai gradienti dello sforzo di taglio

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

pertanto la pressione può essere vista come uno sforzo viscoso, misurato in unità di  $\frac{\eta V}{L}$ .

Per i fluidi non viscosi questo tipo di scalatura non è appropriato; i flussi infatti sono guidati sia dal gradiente di pressione che dall'inerzia, in accordo con le equazioni di Eulero

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p$$

Da tenere presente che solo una scelta oculata delle scalature conduce a risultati interessanti.

Procediamo effettivamente al processo di adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, adottando i seguenti fattori di scala

$$t^a = \frac{t}{L/V}, \quad p^a = \frac{p}{\eta V/L}.$$

Sostituendo questi fattori nelle equazioni di Navier-Stokes (3.42), si ottengono le **equazioni adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} \frac{\rho V L}{\eta} \left( \frac{\partial u_x^a}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + u_y^a \frac{\partial u_x^a}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^a}{\partial y^2} \right) + \frac{\rho g L^2}{\eta V} \\ \frac{\rho V L}{\eta} \left( \frac{\partial u_y^a}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y^a}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y^a}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Il primo gruppo adimensionale è detto **Numero di Reynolds**

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

dato dal rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

Il secondo gruppo adimensionale è chiamato **Numero di Stokes**

$$St = \frac{\rho g L^2}{\eta V}$$

che rappresenta il rapporto tra le forze di gravità e le forze viscosse.

Riscriviamo dunque le **equazioni di Navier-Stokes adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} Re \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + St \\ Re \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Introduciamo un altro numero adimensionale, l'**aspect ratio**

$$\epsilon = \frac{H}{L},$$

dipendente solo dalla geometria del problema e per questo utilizzato come fattore di scala per prove di laboratorio.

Attraverso le condizioni al bordo ed iniziali, le equazioni adimensionali appena introdotte forniscono la seguente dipendenza funzionale

$$\begin{aligned} p^a &= p^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon), \\ u^a &= u^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon). \end{aligned}$$

Vediamo altri numeri adimensionali di importanza significativa nella meccanica dei fluidi.

Il **Numero di Weber**, rapporto tra le forze di inerzia e le forze di tensione superficiale

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}.$$

Il **Numero di capillarità**, rapporto tra le forze di viscosse e la tensione superficiale o forza capillare.

$$Ca = \frac{\eta V}{\sigma}.$$

Il **Numero di Froude**, rapporto tra le forze di inerzia e quelle di gravità.

$$Fr = \frac{V^2}{gL}.$$

Il **Numero di Eulero**, rapporto tra le forze di pressione e le forze viscosse.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}.$$

Sono valide inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} We &= Re Ca \\ Fr &= Re St \end{aligned}$$

### 3.6 Flussi con strato limite

Consideriamo adesso il caso in cui un fluido si trovi a scorrere in prossimità di una superficie solida. Questa tipologia di flusso è conosciuta come flusso con strato limite e viene comunemente descritta in termini di vorticità; la presenza di vorticità permette infatti di distinguere lo strato limite dal flusso potenziale. Lo strato limite può essere pensato come la vorticità che, formatasi in prossimità di una superficie solida, rimane confinata entro uno sviluppo pseudo-parabolico per effetto della convezione.

Nel caso bidimensionale la vorticità è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k, \quad (3.43)$$

e rappresenta una misura della rotazione di un fluido.

La linea di confine tra strato limite e flusso potenziale è definita attraverso "l'orbita delle particelle di vorticità" generate sulla superficie solida e diffuse lungo lo spessore dello strato limite  $\delta_x$ .

Lungo il bordo dello strato limite, convezione e diffusione assumeranno valori con lo stesso ordine di grandezza, ovvero

$$V \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \cong K^2 \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2}$$

dove  $K$  è una costante. Dalla relazione conseguente

$$\frac{V}{x} \cong K^2 \frac{\nu}{\delta^2(x)}$$

con  $x$  distanza dal bordo di attacco, ricaviamo l'espressione

$$\delta(x) = K \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

che fornisce un ordine di grandezza stimato per lo spessore  $\delta(x)$  dello strato limite.

### 3.7 Equazioni fondamentali per fluidi viscosi

I fluidi non possiedono uno stato naturale nel quale ritornare dopo la rimozione delle forze applicate, inoltre le forze viscosse sono direttamente correlate al campo di velocità, per queste ragioni è consuetudine adottare la descrizione euleriana nella formulazione delle equazioni della Teoria dei fluidi viscosi.

Riportiamo sinteticamente le equazioni fondamentali in forma euleriana che descrivono il comportamento termo-meccanico di un fluido newtoniano:

- equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.44)$$

- equazione di moto:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.45)$$

- equazione costitutiva:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu D_{ij} \quad (3.46)$$

- equazione di Navier Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.47)$$

- equazione dell'energia:

$$\rho \cdot \mathbf{u} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,j} + \rho r \quad (3.48)$$

- equazione della cinetica di stato:

$$p = p(\rho, \theta) \quad (3.49)$$

- equazione di stato del calore:

$$u = u(\rho, \theta) \quad (3.50)$$

- equazione del trasporto del calore:

$$q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (3.51)$$

#### INCISO 3.7.1. Calcolo della velocità del suono $c$

Supponiamo di trovarci in condizioni di adiabaticità, in quanto la vibrazione è un processo veloce che non permette scambio di calore. Dalla legge dei gas perfetti abbiamo

$$PV = RT \quad (3.52)$$

$$PV^\gamma = P_0 \rho^\gamma \quad (3.53)$$

$$P\rho^{-\gamma} = P_0 \rho^{-\gamma} \quad (3.54)$$

$$P = P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma \quad (3.55)$$

La pressione non cresce linearmente con la densità, ma cresce con una sua potenza. Possiamo calcolare la pendenza della curva derivando la (3.55)

$$\left. \frac{P}{\rho} \right|_0 = P_0 \gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \Big|_0 = P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} \quad (3.56)$$

questa derivata ha come dimensione quella di una velocità elevata al quadrato. Infatti dall'equazione di Bernoulli e ricordando che la velocità è quella del suono

$$\rho \frac{c^2}{2} + P + \rho gh = cost \Rightarrow P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} = c^2 \quad (3.57)$$

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0} \gamma} = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.58)$$

La velocità di propagazione dipende solo dal mezzo e non dall'ampiezza e frequenza del segnale, dipende invece dalla temperatura.