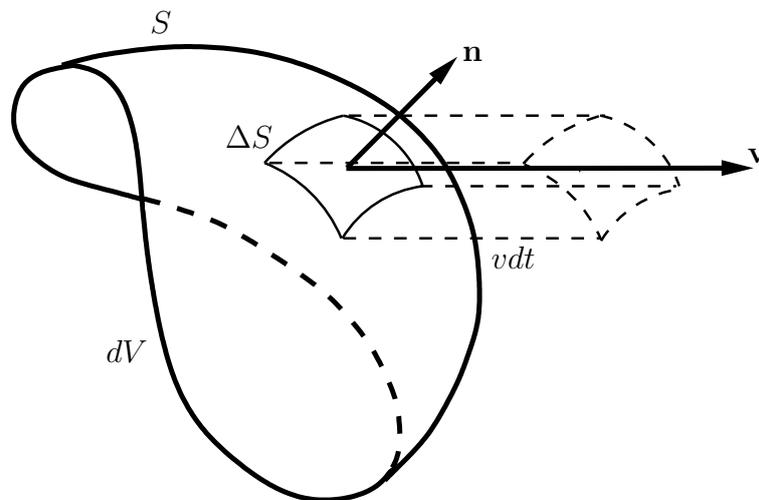

COMPLEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

Appunti dalle lezioni del Prof. Giovanni FROSALI
redatti da ANNA TANCREDI

IV PARTE: MECCANICA DEI CONTINUI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "U.DINI"

FIRENZE - 31 MAGGIO 2018

Indice

Introduzione	iii
0.1 La Meccanica del continuo	iii
1 Cinematica	1
1.1 I sistemi continui	1
1.2 Relazioni cinematiche e relative proprietà	2
1.2.1 Variazione di volume	5
1.3 Approccio lagrangiano - Approccio euleriano	5
1.4 La derivata materiale	10
1.5 Esempi	13
2 Principi ed Equazioni Fondamentali	15
2.1 Introduzione	15
2.2 Equazione di continuità	15
2.3 Il Teorema del Trasporto	21
2.4 Equazioni fondamentali	23
2.4.1 Forze	23
2.4.2 Statica e Dinamica	25
2.5 Il tensore degli sforzi di Cauchy	26
2.5.1 Equazioni indefinite di equilibrio e della dinamica	29
2.6 Appendice	31
2.6.1 L'accelerazione di Lagrange	31
2.6.2 Vorticità	32
3 I fluidi	33
3.1 Statica e dinamica dei fluidi	35
3.1.1 I fluidi perfetti	35
3.2 Trinomio di Bernoulli	39
3.3 Il campo delle velocità	44
3.4 Fluidi viscosi	46
3.4.1 Critica dei fluidi perfetti	46
3.4.2 Fluidi viscosi	47
3.5 Equazioni di moto per un fluido viscoso	50
3.5.1 Equazioni di Navier-Stokes	51

3.5.2	Fluidi particolari	52
3.6	Moto di Poiseuille.	53
3.7	Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes	57
3.8	L'approssimazione di strato limite	60
3.9	L'equazione dello strato limite	64
3.10	Flussi con strato limite	67
4	Elasticità lineare	69
4.1	Misure di deformazione	69
4.1.1	Formula di variazione di lunghezza relativa	70
4.1.2	Il tensore della deformazione finita	71
4.2	Misura delle deformazioni infinitesime	71
4.2.1	Direzioni principali e valori principali	73
4.3	Materiali elastici lineari	74
4.3.1	Legame costitutivo per materiali elastici, lineari, omogenei ed isotropi	75
4.3.2	Legame costitutivo inverso e moduli elastici	77
4.4	Equazioni di Navier	79
	Bibliografia	81

Introduzione

0.1 La Meccanica del continuo

La Meccanica del continuo è una branca della fisica che si occupa di studiare il moto, lo stato di sforzo e le deformazioni di sistemi continui, analizzando le relazioni esistenti tra variabili cinematiche e dinamiche. Il moto ed i fenomeni relativi a tali sistemi possono essere descritti attraverso due modalità intercambiabili e complementari: descrizione lagrangiana o materiale e descrizione euleriana o spaziale.

Quali caratteristiche deve avere un sistema per poter essere definito continuo? Osservando gli oggetti nello spazio che ci circonda, quali sono i criteri che ci spingono a classificare un corpo come continuo? Un cubetto di acciaio, l'acqua contenuta in un bicchiere, il gas racchiuso in una bombola ... sono sistemi continui? Osservando un corpo ad occhio nudo, con una lente di ingrandimento o con un microscopio ad alta risoluzione, cambia ciò che vediamo.

Se pensiamo ai corpi secondo scale microscopiche possiamo figurarli, in generale, come agglomerati di atomi e molecole tenuti insieme da particolari legami ed ordinati secondo un caratteristico reticolo cristallino. Gli atomi a loro volta, pensando in scala ancora più piccola, sono costituiti dal nucleo di protoni e neutroni e dalle relative orbite elettroniche. Intuiamo come la materia, osservata in questa scala microscopica, non sia definibile continua.

Accettando invece il concetto di continuità della materia, ignoriamo la sua composizione discreta e consideriamola come un mezzo in grado di occupare completamente (ovvero senza lasciare spazi vuoti) ed uniformemente lo spazio. Per chiarire tale concetto, un gas rarefatto non può essere modellato come un continuo dato che le sue molecole sono molto distanti tra loro (si pensi ad esempio all'alta atmosfera). Focalizzando l'oggetto attraverso una scala macroscopica, ignoreremo la composizione discreta della materia e risulterà naturale definire il sistema osservato **continuo**; adottando tale punto di vista assumeremo inoltre che il corpo o il mezzo occupi completamente ed uniformemente lo spazio in cui è immerso, senza lasciare spazi vuoti.

Quindi, alla luce di queste considerazioni, perchè sia possibile attribuire la caratteristica di *continuità* ad un corpo, esso va osservato in *scala macroscopica*: le sue dimensioni devono essere quindi molto maggiori di quelle del raggio atomico, in accordo con il punto di vista adottato in buona parte degli studi

ingegneristici.

Al contrario, osservando il sistema attraverso una scala microscopica, la materia si rivelerà composta da agglomerati di molecole ed atomi tenuti insieme da particolari legami; scendendo ancora nel microscopico, potremo perfino osservare la struttura dell'atomo. In questo caso non risulterà naturale trascurare ed ignorare la composizione discreta della materia.

La Meccanica del continuo si occupa quindi dello studio dei fenomeni fisici, in particolare del comportamento cinematico e meccanico, dei sistemi continui (solidi e fluidi) da un punto di vista macroscopico.

Riassumendo, i sistemi solidi, liquidi o gassosi sono definibili continui se:

- sono osservati attraverso una scala macroscopica;
- le loro dimensioni sono molto maggiori del raggio atomico;
- non sono sistemi rarefatti.

Definiamo a questo punto le caratteristiche che contraddistinguono tali sistemi:

- Deformabilità: sotto l'azione di forze, ogni sistema continuo può cambiare forma e/o volume; le particelle che lo compongono a causa del moto e/o della deformazione possono andare ad occupare nuove posizioni nello spazio (cambiamento di configurazione);
- Omogeneità: il materiale che costituisce il continuo avrà identiche proprietà in ogni sua parte;
- Isotropia: il materiale di cui è composto il continuo presenterà stesse caratteristiche meccaniche in ogni direzione.

Assumendo tale *modello* per i corpi continui, potremo studiare qualsiasi parte contenuta nel sistema stesso, poiché conserverà le caratteristiche del corpo originario. Saremo inoltre in grado di associare ad ogni punto della regione di spazio occupato dal corpo, grandezze di campo come la velocità e la densità.

In seguito affronteremo due temi principali: la derivazione delle equazioni fondamentali valide per tutti i mezzi continui, le quali si basano sulle leggi universali della fisica come la conservazione della massa, i principi della conservazione dell'energia e del momento, e le equazioni costitutive che caratterizzano il comportamento di specifiche classi di materiali continui idealizzati, come i solidi perfettamente elastici ed i fluidi viscosi. Queste equazioni sollevano i punti focali intorno ai quali vertono e si sviluppano gli studi di elasticità, plasticità, viscoelasticità e la meccanica dei fluidi.

Le equazioni fondamentali della meccanica dei continui possono avere due formulazioni matematiche equivalenti: la prima è una forma di tipo globale o integrale, derivata dall'applicazione dei principi basilari ad un volume finito del materiale, la seconda è un approccio tipo di campo, basato su equazioni risultanti dall'applicazione dei principi ad un volumetto infinitesimo. Nella pratica è comodo dedurre le equazioni di campo dalla forma globale.

Capitolo 1

Cinematica

1.1 I sistemi continui

Si definisce continuo quel sistema costituito da un insieme di punti materiali, ovvero da un numero elevato di particelle ed individuato attraverso la porzione continua B di spazio che esso occupa. Tale porzione di spazio è chiamata configurazione del sistema ed è delimitata dalla superficie ∂B , che supponiamo sufficientemente regolare.

Nello studio della Cinematica dei corpi continui risulta di fondamentale importanza distinguere le numerose particelle e con questo intento si assegna ad ogni elemento materiale un'**etichetta** che rappresenta ciascuna particella.

Per chiarire il concetto, pensiamo ad un insieme di esseri umani, ognuno caratterizzato da nome, cognome, data di nascita...ogni essere umano ha una propria identità, che ne permette il riconoscimento univoco. Sinteticamente, si può pensare che l'identità di ogni singolo individuo sia rappresentata attraverso la carta d'identità contenente una sequenza unica di dati.

Per distinguere ed identificare le varie particelle, adotteremo una tecnica molto simile: il documento di base di tutte le particelle, ovvero la carta d'identità, sarà la lettera ξ , mentre il nome, cognome e tutti i dati significativi di una particella saranno rappresentati attraverso il pedice k . Il documento ξ ed i dati k costituiranno l'etichetta ξ_k della particella. Quindi in un corpo costituito da n particelle potremo distinguere un'elemento materiale dall'altro grazie all'etichetta ξ_k caratteristica di ogni particella: $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$.

Nota 1.1.1. Nella teoria del continuo, quando parliamo di particella, ci riferiamo ad un elemento materiale, ovvero alla parte più piccola in cui è suddivisibile un corpo senza perderne le caratteristiche originarie. Da sottolineare che, mentre nella meccanica dei corpi rigidi ad ogni punto materiale è assegnata una massa, ad ogni particella di continuo si assegna invece una densità, ovvero una massa per un elemento infinitesimo dello spazio (riprenderemo tale concetto nel Capitolo 2.).

Ogni punto materiale, ovvero ogni particella ξ_k può essere messa in corrispondenza biunivoca con i punti di una regione regolare dello spazio fisico.

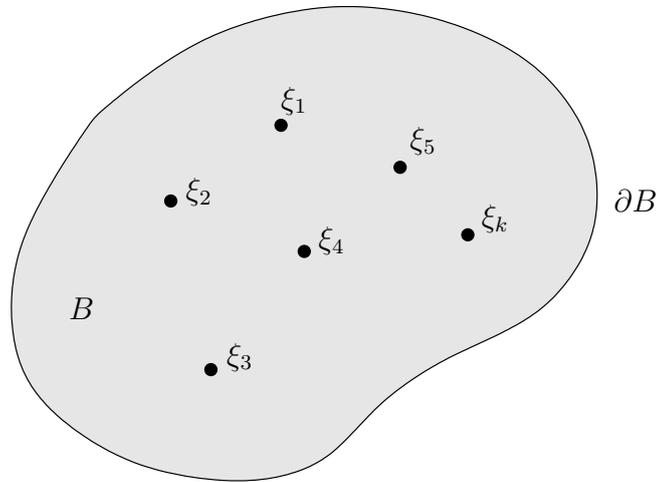


Figura 1.1: Sistema continuo.

Specificando la posizione di tutte le particelle costituenti il corpo B rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, definiamo la *configurazione* C_t del corpo in quell'istante di tempo t .

Convenzionalmente la configurazione del corpo corrispondente all'istante che noi assumiamo iniziale è chiamata **configurazione di riferimento** C_0 del continuo o configurazione indeformata, mentre la configurazione assunta in un istante generico t è chiamata **configurazione attuale** C_t o configurazione deformata.

Il cambiamento di configurazione consiste in generale in uno spostamento rigido del corpo e/o nella deformazione del corpo stesso (cambiamento di dimensione, di forma).

In particolare la configurazione di riferimento C_0 è la configurazione rispetto alla quale si stimano gli spostamenti ed in generale può anche non essere mai stata realmente occupata dal corpo, ma solo concettualmente (configurazione virtuale).

1.2 Relazioni cinematiche e relative proprietà

Introduciamo la **funzione posizione** κ

$$\mathbf{x} = \kappa(\boldsymbol{\xi}_k, t) \quad \boldsymbol{\xi}_k \in C_0 \quad (1.1)$$

tale mappa è una funzione vettoriale che associa ad ogni particella del corpo C_0 un punto dello spazio individuato attraverso il vettore \mathbf{x} in un determinato istante di tempo t . La funzione κ rappresenta la descrizione del movimento del corpo (che diremo materiale nel seguito).

- B : corpo continuo

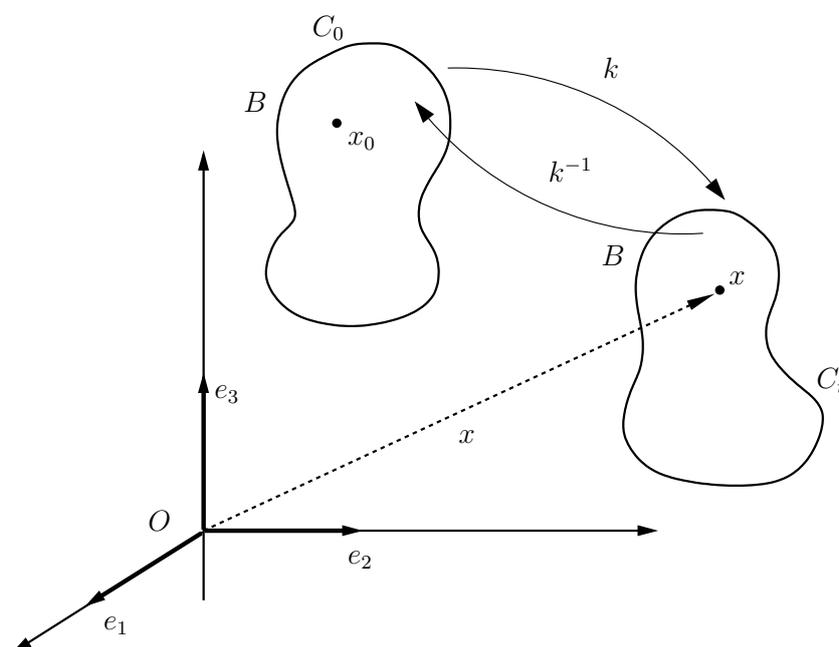


Figura 1.2: Sistema continuo.

- C_0 : configurazione di riferimento
- C_t : configurazione attuale
- \mathbf{x} : vettore che individua il punto dello spazio occupato dalla particella nell'istante di tempo t rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con origine in O
- $\boldsymbol{\kappa}$: funzione posizione
- $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$: funzione inversa della posizione.

La funzione posizione $\boldsymbol{\kappa}$ in generale deve soddisfare le proprietà matematiche di: biunivocità, continuità, derivabilità (con derivata continua) ed invertibilità locale.

Dal punto di vista fisico $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}_k, t)$ deve essere una funzione tale da rappresentare il seguente comportamento a livello di particelle di continuo:

- particelle vicine si manterranno vicine durante il moto e/o la deformazione del corpo;
- un punto dello spazio non può essere occupato da più di una particella.

Nota 1.2.1. Negli urti nei gas può accadere che nello stesso istante di tempo due o più particelle si trovino ad occupare la stessa posizione: non è quindi possibile utilizzare tale modello. La teoria che studia la dinamica dei gas si chiama teoria cinetica e l'equazione fondamentale è quella di Boltzmann.

Per semplificare le notazioni, d'ora in avanti quando indicheremo una particella qualsiasi ometteremo l'etichetta k , anche per non confondere con l'indice delle componenti e manterremo tale indice solo quando vorremo indicare una precisa particella. Quindi per semplicità useremo la **funzione posizione** nella forma generica

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in C_0. \quad (1.2)$$

Spesso si preferisce scrivere la (1.2) come

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in C_0, \quad (1.3)$$

utilizzando lo stesso nome sia per la variabile dipendente che per la funzione. Noi faremo ricorso a tale forma quando ne sarà chiaro il significato dal contesto.

Soddisfatte le proprietà di continuità e biunivocità, la funzione posizione $\boldsymbol{\kappa}$ può essere invertita

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in C(t), \quad (1.4)$$

che spesso si preferisce scrivere come

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in C(t). \quad (1.5)$$

Dal punto di vista matematico tale operazione è possibile se

$$J(\boldsymbol{\xi}, t) = \det(\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}, t)) \neq 0, \quad (1.6)$$

dove con $\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}, t)$ si è indicato la matrice jacobiana, detta **gradiente di deformazione**, i cui elementi sono

$$F_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (1.7)$$

(nelle deformazioni reali di un corpo si può richiedere che $J > 0$).

Torniamo al gradiente di deformazione. Sia $d\boldsymbol{\xi}$ il vettore spostamento del punto $\boldsymbol{\xi}$ (elemento infinitesimo indeformato), avente componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$, al tempo t nel sistema deformato il vettore spostamento $d\mathbf{x}$ del punto trasformato \mathbf{x} ha componenti (dx_1, dx_2, dx_3) (elemento infinitesimo deformato)

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix},$$

o in forma compatta

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}, t)d\boldsymbol{\xi} \quad \text{ovvero} \quad dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = \sum_{j=1}^3 F_{ij} d\xi_j. \quad (1.8)$$

1.2.1 Variazione di volume

Per comprendere meglio il significato del gradiente di deformazione conviene vedere come varia un volume di un elemento materiale in seguito ad una deformazione.

Consideriamo lo spostamento $d\boldsymbol{\xi}$ della particella $\boldsymbol{\xi}$. Siano $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ i lati del parallelepipedo prima di subire una deformazione, e quindi il volume infinitesimo $dV_0 = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

In seguito alla deformazione, il volumetto avrà i lati obliqui caratterizzati dai vettori $(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3)$ corrispondenti ai versori $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ (trasformati di $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$).

Calcoliamo il volume del parallelepipedo deformato con la nota formula del prodotto vettoriale misto

$$dV(t) = d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3 \cdot d\mathbf{x}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

In conclusione il rapporto fra i volumetti è dato dal determinante del gradiente di deformazione, ovvero

$$\frac{dV(t)}{dV_0} = J(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (1.9)$$

1.3 Approccio lagrangiano - Approccio euleriano

La caratteristica di invertibilità è di fondamentale importanza nello studio della Meccanica dei continui, poichè rende immediato il passaggio da una configurazione all'altra del corpo, dalla C_0 alla C_t e viceversa; ovvero, grazie all'invertibilità della funzione posizione, diventa possibile studiare il continuo ed il suo comportamento cinematico e meccanico, adottando due approcci intercambiabili, ovvero due diversi punti di vista: **approccio lagrangiano** e **approccio euleriano**.

- **Approccio lagrangiano:** la descrizione del fenomeno associato al sistema continuo avviene ponendo l'attenzione sui singoli elementi materiali, cioè le particelle del continuo, individuati attraverso la loro etichetta $\boldsymbol{\xi}$ ed inseguiti nel moto.
- **Approccio Euleriano:** la descrizione del fenomeno avviene da un punto specifico dello spazio, nel quale si troverà l'osservatore e per il quale in ogni istante di tempo transiteranno diverse particelle.

Data la generica particella ξ , appartenente alla regione dello spazio C_0 , detta configurazione di riferimento, e la funzione vettoriale che ci fornisce la posizione $\kappa(\xi, t)$ dell'elemento ξ all'istante t , allora la configurazione al tempo t è

$$C_t = C(t) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \kappa(\xi, t), \xi \in C_0\}$$

e possiamo definire la velocità della particella \mathbf{x} di etichetta ξ al tempo t come la derivata rispetto a t della posizione $\kappa(\xi, t)$ lasciando costante la ξ (derivata parziale rispetto a t), ovvero

- la **velocità lagrangiana**

$$\mathbf{v}_L = \frac{\partial \kappa(\xi, t)}{\partial t}, \quad (1.10)$$

e conseguentemente

- l'**accelerazione lagrangiana**

$$\mathbf{a}_L = \frac{\partial^2 \kappa(\xi, t)}{\partial t^2}. \quad (1.11)$$

Le funzioni

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_L(\xi, t) \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_L = \mathbf{a}_L(\xi, t) \quad (1.12)$$

danno la velocità e l'accelerazione di una particella all'istante attuale in funzione delle sue coordinate iniziali. Danno quindi una rappresentazione del tipo lagrangiano o materiale dei campi delle velocità e delle accelerazioni. In generale possiamo dire che un campo, qualunque sia la sua natura, è di tipo lagrangiano tutte le volte che le variabili da cui dipende, in aggiunta al tempo, sono le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 della particella ξ nella configurazione di riferimento.

ESEMPIO 1.3.1. *Campo in rappresentazione lagrangiana.* Si consideri il moto caratterizzato da

$$x_1 = \frac{\xi_2}{1 + 2t}, \quad x_2 = \xi_2 + 3\xi_3 t^2, \quad x_3 = \xi_1 t + \xi_2 \quad (1.13)$$

La rappresentazione lagrangiana dei campi di velocità e accelerazione è data da

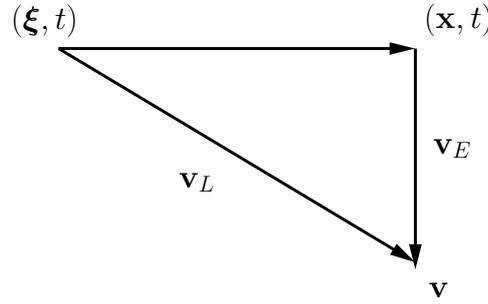
$$\begin{aligned} v_1(\xi, t) &= -\frac{2\xi_2}{(1+2t)^2}, & v_2(\xi, t) &= 6\xi_3 t, & v_3(\xi, t) &= \xi_1 \\ a_1(\xi, t) &= \frac{8\xi_2}{(1+2t)^3}, & a_2(\xi, t) &= 6\xi_3, & a_3(\xi, t) &= 0. \end{aligned}$$

Nota 1.3.1. Si noti che le definizioni (1.10) e (1.11) coincidono con quelle date nella Meccanica dei sistemi di N particelle. Differentemente accade spesso nelle pratiche sperimentali: in questi casi la velocità e l'accelerazione delle particelle di un sistema continuo vengono misurate per mezzo di strumenti che operano in prossimità di una certa postazione fissa P . Si pensi alla velocità del vento, essendo in questo caso l'aria che si sta muovendo, misurata da un anemometro posto nello stesso punto, per esempio sul tetto di un edificio.

Se fissiamo un punto \mathbf{x} dello spazio, per il quale transitano le diverse particelle $\boldsymbol{\xi}$, e facciamo variare $\boldsymbol{\xi}$, utilizzando la funzione inversa della funzione posizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ con la quale sono a conoscenza del punto \mathbf{x} nel quale si trova la particella $\boldsymbol{\xi}$, la (1.10) fornisce il campo di velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Tale campo dà la velocità della particella di continuo che all'istante t occupa la posizione \mathbf{x} (essendo tale particella in moto, ci si riferisce ad essa anche come alla particella che transita per il punto \mathbf{x}). Per ricavare la velocità e



l'accelerazione in descrizione euleriana è sufficiente sostituire le (1.5) nelle (1.12) ottenendo (vedi il diagramma in figura)

- la **velocità euleriana** o campo di velocità

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_L(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t); \quad (1.14)$$

- l'**accelerazione euleriana** o campo di accelerazione

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_L(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

In quel che abbiamo fatto sopra, ci siamo riferiti a questa descrizione come al **campo di velocità** del continuo. In altre parole ci siamo concentrati su ciò che succede nel punto fissato dello spazio \mathbf{x} , caratteristico dell'approccio euleriano.

ESEMPIO 1.3.2. Campo in rappresentazione euleriana. Si consideri il moto caratterizzato da (1.13), e si determinino le relazioni inverse, date da

$$\xi_1 = \frac{x_3 - (1 + 2t)x_1}{t}, \quad \xi_2 = (1 + 2t)x_1, \quad \xi_3 = \frac{x_2 - (1 + 2t)x_1}{3t^2}. \quad (1.16)$$

La rappresentazione euleriana dei campi di velocità e accelerazione è data da

$$v_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{2x_1}{1 + 2t}, \quad v_2(\mathbf{x}, t) = \frac{2x_2 - 2(1 + 2t)x_1}{t}, \quad v_3(\mathbf{x}, t) = \frac{x_3 - (1 + 2t)x_1}{t},$$

$$a_1(\mathbf{x}, t) = \frac{8x_1}{(1 + 2t)^2}, \quad a_2(\mathbf{x}, t) = \frac{2(x_2 - (1 + 2t)x_1)}{t^2}, \quad a_3(\mathbf{x}, t) = 0.$$

La differenza sostanziale tra velocità (o accelerazione) lagrangiana ed euleriana deriva essenzialmente dalla diversa filosofia di descrizione:

- \mathbf{v}_L rappresenta la velocità di una certa particella inseguita nel suo moto, si ottiene quindi derivando la funzione posizione $\boldsymbol{\kappa}$ nel tempo fissata la particella $\boldsymbol{\xi}$.
- \mathbf{v}_E rappresenta il campo di velocità in un punto fissato dello spazio individuato dal vettore \mathbf{x} , si ottiene quindi derivando $\boldsymbol{\kappa}$ rispetto al tempo al variare della $\boldsymbol{\xi}$.

Nota 1.3.2. Si noti che \mathbf{x} sta ad indicare il punto dove si trova la particella P di cui $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ misura la velocità locale. Per es. $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t')$ con $t' > t$ è la velocità, misurata in \mathbf{x} , della particella che transita per \mathbf{x} all'istante t' , e che chiamiamo P' . Analogamente, $\mathbf{v}(\mathbf{x}', t)$ può essere la velocità di una particella P'' che passa per $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ all'istante t .

In queste note noi abbiamo utilizzato l'etichetta iniziale $\boldsymbol{\xi}$, per distinguere una particella P dalla particella P' nello stesso punto locale \mathbf{x} ma in tempi diversi.

Posti davanti ai due approcci, sorge spontaneo domandarsi in quali casi convenga usare una rappresentazione piuttosto che l'altra.

Pensando ad un fluido, data la sua natura non geometrica, l'idea di una configurazione specifica perde di significato; inoltre da un punto di vista pratico, in un fluido in movimento diventa estremamente difficoltoso l'inseguimento delle particelle. Per questo motivo in fluidodinamica si adotta l'approccio euleriano: fissati alcuni punti dello spazio costituenti il volume di controllo del fluido, si registra in ogni punto \mathbf{x} ed in ogni istante t il valore delle grandezze di interesse.

Nella descrizione euleriana ha quindi senso calcolare le quantità e le loro variazioni in funzione del tempo, mantenendo fissa nello spazio la posizione dell'osservatore.

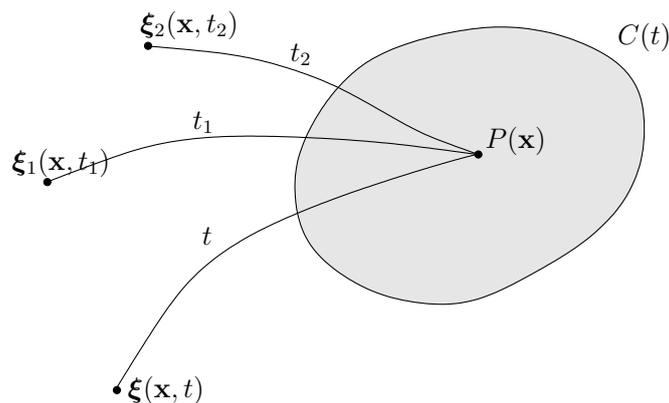


Figura 1.3

Nota 1.3.3. Con riferimento alla figura (1.3), fissato il punto P , questa posizione all'istante t corrisponde al punto che inizialmente si trova in $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$. Ad istanti diversi ad esempio t_1 e

t_2 , i valori delle coordinate lagrangiane dei punti del sistema continuo che si avvicinano a quella posizione saranno in genere diversi, $\xi_1(\mathbf{x}, t_1)$ e $\xi_2(\mathbf{x}, t_2)$. In questo caso è evidente che le derivate $\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x}, t_i)}{\partial t}$ non sono velocità.

Nota 1.3.4. Occorre fare attenzione a non confondere le variazioni temporali delle misurazioni di velocità

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.17)$$

con l'accelerazione (1.15).

L'accelerazione non si ottiene derivando parzialmente la $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ rispetto al tempo. Infatti scriviamo la (1.17) come limite del rapporto incrementale

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \text{ con } \mathbf{x} \text{ fissato.}$$

In questo rapporto le velocità sono in due tempi vicini, ma non sono della stessa particella, perché a tempi diversi nel punto \mathbf{x} passano due particelle diverse $\xi_1 = \xi_1(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ e $\xi_2 = \xi_2(\mathbf{x}, t)$.

Come vedremo più precisamente in seguito, l'accelerazione è invece data da

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \kappa_i(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

Consideriamo adesso una funzione scalare qualsiasi, ad esempio la temperatura ϑ , attribuibile al corpo continuo.

Nella descrizione lagrangiana, la quantità associata alla grandezza ϑ coinciderà con il valore di ϑ che istante per istante appartiene al singolo elemento materiale, alla singola particella ξ inseguita nel suo moto

$$\vartheta = \vartheta(\xi, t). \quad (1.18)$$

Per l'osservatore euleriano, invece, il valore della temperatura ϑ in ogni istante coinciderà con quello della particella ξ che in quell'istante transita per il punto fissato \mathbf{x}

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{x}, t). \quad (1.19)$$

Nota 1.3.5. Si noti che dal punto matematico occorrerebbe usare simboli diversi per le temperature espresse in (1.18) e (1.19). Poiché nella pratica ciò non avviene, è necessario fare attenzione in modo da riconoscere le differenze dal contesto.

Il legame esistente tra questi due differenti approcci allo studio, nonché tra le differenti formulazioni di ϑ , si ottiene osservando che per un determinato punto dello spazio \mathbf{x} nell'istante di tempo t transita una certa particella, per esempio ξ , per la quale vale la relazione $\mathbf{x} = \kappa(\xi, t)$. Ovvero dato un punto dello spazio \mathbf{x} in ogni istante di tempo t , siamo in grado di prevedere quale particella ξ transiterà per quel punto grazie all'inversa delle funzione posizione $\xi = \kappa^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

Allo stesso modo data una particella ξ , attraverso la funzione posizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, potremo risalire esattamente al punto dello spazio in cui si trova nell'istante t .

Grazie alla funzione posizione \mathbf{x} ed alla sua inversa $\mathbf{x}^{-1} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}$ possiamo passare dalla rappresentazione lagrangiana a quella euleriana e viceversa.

$$\begin{aligned}\vartheta_L &= \vartheta(\boldsymbol{\xi}, t) \rightarrow [\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \vartheta = \vartheta(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t) \rightarrow \vartheta = \vartheta_E(\mathbf{x}, t), \\ \vartheta_E &= \vartheta(\mathbf{x}, t) \rightarrow [\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)] \rightarrow \vartheta = \vartheta(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \rightarrow \vartheta = \vartheta_L(\boldsymbol{\xi}, t).\end{aligned}$$

Si faccia attenzione all'uso indifferenziato del simbolo θ nelle due rappresentazioni lagrangiana ed euleriana, uso che, come sarà ancora più chiaro nel paragrafo successivo, risulterà specificato dal contesto.

1.4 La derivata materiale

La derivata materiale o particellare o sostanziale o lagrangiana è una derivata totale che indica in generale la variazione nel tempo di una grandezza, ad esempio la temperatura ϑ , riferita ad una specifica particella del sistema continuo.

Tale derivata può essere pensata come la variazione della grandezza di interesse misurata da un osservatore che viaggia a cavallo della particella considerata. La derivata può essere espressa sia in forma lagrangiana che in forma euleriana. Se la grandezza è data nella descrizione lagrangiana, la derivata materiale coincide con la derivata parziale rispetto al tempo; ovvero la variazione di ϑ dal punto di vista lagrangiano è data da

$$\frac{d\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}, \quad (1.20)$$

poichè le $\boldsymbol{\xi}$ sono etichette, codici identificativi costanti nel tempo.

Se, invece, la grandezza è data nella sua formulazione spaziale (euleriana), la derivata materiale sarà data da

$$\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \quad \text{con } x_i = \kappa_i(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (1.21)$$

dato che le particelle cambiano posizione nel tempo (si noti che, d'ora in avanti, si omette la sommatoria sull'indice i quando gli stessi indici sono ripetuti).

- $\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt}$ è la **derivata materiale o lagrangiana (o sostanziale)** (in un punto prefissato del sistema di coordinate lagrangiane durante il moto);
- $\frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ e $\frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}$ sono **derivate euleriane** (localmente nel punto fissato $P \equiv \mathbf{x}$ al tempo t);
- $\frac{dx_i}{dt}$ è una componente del campo di velocità misurato dall'osservatore euleriano.

L'equazione (1.21) può essere scritta sostituendo a $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ il campo di velocità $v(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{d\vartheta(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}, t).$$

Il primo termine a secondo membro rappresenta la variazione della grandezza ϑ nella posizione \mathbf{x} , per tale motivo può essere definito come termine che dà la variazione locale della ϑ ; il secondo deriva invece dal cambiamento di posizione delle particelle nello spazio.

Nota 1.4.1. Vediamo cosa significa quando si dice che la derivata lagrangiana corrisponde alla derivata totale.

Sia ϑ una grandezza ed indichiamo con ϑ_E e ϑ_L le loro due rappresentazioni

$$\vartheta_E(\mathbf{x}, t) = \vartheta(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad \vartheta_L(\boldsymbol{\xi}, t) = \vartheta(\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t), t).$$

La variazione temporale della grandezza ϑ si può analizzare in due modi

- $\frac{\partial\vartheta_L}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t)$ in un prefissato punto P_0 del sistema di coordinate al tempo $t = 0$, durante il moto;
- $\frac{\partial\vartheta_E}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ in un punto $P = \mathbf{x}$ fissato localmente al tempo t .

La relazione che intercorre fra le derivate lagrangiana ed euleriana è la seguente

$$\frac{\partial\vartheta_L}{\partial t} = \frac{d\vartheta_E}{dt} = \frac{\partial\vartheta_E}{\partial t} + \nabla\vartheta_E \cdot \mathbf{v}.$$

Si ricordi la relazione (1.20). Si noti poi quando l'argomento delle funzioni è $(\boldsymbol{\xi}, t)$ oppure (\mathbf{x}, t) .

Siamo quindi in grado di dedurre l'**operatore derivata materiale** per grandezze espresse nella descrizione di tipo spaziale euleriana

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

dove l'operatore ∇ applicato ad una grandezza, nel nostro caso ϑ , ne determina il gradiente. (in questo senso la derivata materiale lagrangiana corrisponde alla derivata totale (vedi gli Esempi successivi)).

Utilizzando l'operatore derivata materiale ricaviamo l'espressione dell'accelerazione $a(\mathbf{x}, t)$ data nella descrizione spaziale (euleriana), derivando la velocità euleriana $v(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.22)$$

con

$$[\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(x, t)]_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Riassumendo si ha

- **ξ etichetta:** identifica la particella del continuo.
- **$\mathbf{x} = \kappa(\xi, t)$: funzione posizione:** rappresenta la posizione occupata dalla particella ξ nell'istante di tempo t .
- **$\xi = \kappa^{-1}(\mathbf{x}, t)$: funzione inversa della posizione** fissato un punto dello spazio fornisce l'etichetta della particella che in quell'istante transita per il punto.
- **Approccio lagrangiano:** l'osservatore insegue la particella nel suo moto, osservando e registrando i valori delle grandezze di interesse relative a quella particella allo scorrere del tempo .
- **Approccio euleriano:** fissato un punto dello spazio, si registrano i valori delle grandezze di interesse relativi alle particelle che transitano in quel punto nei diversi istanti di tempo.
- **Approccio lagrangiano - approccio euleriano:** è possibile passare dall'approccio lagrangiano a quello euleriano (e viceversa), sfruttando la funzione posizione e la sua inversa, attraverso la composizione (1.20).
- **Derivata materiale** di una grandezza (scalare o vettoriale) in rappresentazione materiale (lagrangiana) o spaziale (euleriana): rappresenta la variazione nel tempo della grandezza di interesse con misure effettuate da un osservatore che viaggia a cavallo della particella.

Nota 1.4.2. Con riferimento all'Appendice (2.6) scriviamo l'accelerazione in una espressione che verrà utilizzata spesso nello studio dei sistemi continui. L'espressione $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ può essere riscritta come

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$$

e l'accelerazione (1.22) di una particella fluida, come derivata sostanziale di \mathbf{v} , si scrive

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Nota 1.4.3. La (1.23) ha un aspetto vagamente minaccioso. Basta tuttavia osservare che, per calcolare $\mathbf{a}(P, t)$, l'accelerazione della particella che passa per P all'istante t , è necessario

- 1) misurare $\mathbf{v}(P, t)$ e $\mathbf{v}(P', t')$, con $P' = P + \Delta P$ e $t' = t + \Delta t$, ove P' è la postazione raggiunta dalla particella all'istante t' ;
- 2) calcolare il rapporto incrementale $\frac{\mathbf{v}(P', t') - \mathbf{v}(P, t)}{\Delta t}$;
- 3) trovare il limite di tale rapporto per $t \rightarrow 0$.

1.5 Esempi

Esercizio 1.5.1. *Scrivere l'espressione euleriana e lagrangiana della densità $\rho(P)$ in un P di una asta omogenea che si dilata con legge lineare.*

Soluzione 1.1. Fissiamo il punto P , la legge di moto del punto è data da

$$x = x(\xi, t) = \xi + vt$$

allora in forma lagrangiana

$$\rho_L = \rho_L(\xi, t) = \rho(\xi + vt, t).$$

La sua variazione è data da

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\xi + vt, t) + v \frac{\partial \rho}{\partial x}(\xi + vt, t).$$

Esercizio 1.5.2. *Scrivere l'espressione euleriana e lagrangiana della densità $\rho(P)$ in un P di una asta omogenea che si dilata con legge quadratica.*

Soluzione 1.2. La legge di moto del punto P è data da

$$x = x(\xi, t) = \xi + \frac{1}{2}at^2,$$

con a costante, allora in forma lagrangiana

$$\rho_L = \rho_L(\xi, t) = \rho\left(\xi + \frac{1}{2}at^2, t\right).$$

La sua variazione è data da

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\xi + \frac{1}{2}at^2, t\right) + at \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\xi + \frac{1}{2}at^2, t\right).$$

Notiamo che

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(\xi, t) = \frac{d\rho}{dt}(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) \cdot at + \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t).$$

Capitolo 2

Principi ed Equazioni Fondamentali

2.1 Introduzione

Nello studio della meccanica dei continui sono di fondamentale importanza le **leggi di bilancio** che esprimono la conservazione di alcune quantità fisiche. In analogia alla meccanica dei sistemi di punti è naturale aspettarsi la validità delle leggi di conservazione della massa, della quantità di moto, del momento della quantità di moto e dell'energia. Si dirà che tali leggi di bilancio sono formulate in termini integrali quando la relazione riguarda, ad esempio, la conservazione di una certa quantità fisica del continuo nel suo intero, mentre la legge sarà formulata in termini differenziali quando la conservazione della quantità fisica del continuo sarà valutata in un elemento infinitesimo del continuo. Le leggi di conservazione sono fondamentali, soprattutto in forma integrale, per derivare le equazioni fondamentali della meccanica del continuo.

2.2 Equazione di continuità

Ogni corpo materiale B , così come ogni sua parte S , è caratterizzato da una grandezza scalare, la *massa*, fisicamente associata alla tendenza del corpo a resistere ai cambiamenti di moto. In generale la massa può essere funzione delle variabili spaziali e del tempo.

Fissato un punto dello spazio individuato dal vettore \mathbf{x} nella configurazione attuale del corpo S , identifichiamo un volumetto infinitesimo dV centrato in tale punto, nell'istante di tempo t .

Si definisce **densità euleriana** $\rho(\mathbf{x}, t)$ il rapporto tra massa dm e volume dV dell'elemento infinitesimo del corpo continuo nell'istante di tempo t

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV} \quad (2.1)$$

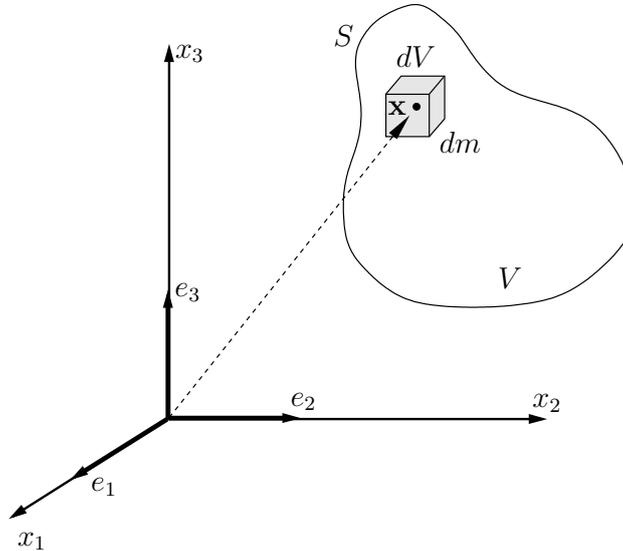


Figura 2.1

Da precisare che la densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ è una densità euleriana, definita nella configurazione attuale (rappresentazione spaziale), ovvero un campo scalare: $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$. La massa m dell'intero corpo è data da

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.2)$$

La densità di un corpo continuo può anche essere definita nella configurazione di riferimento C_0 ; tale densità ρ_0 è data dal rapporto tra la massa dm_0 ed il volume dV_0 occupato da un elemento infinitesimo, intorno al punto $\boldsymbol{\xi}$, nella configurazione C_0

$$\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{\xi}, t_0). \quad (2.3)$$

La massa dell'intero corpo è quindi data da:

$$m = \int_{V_0} \rho_0(\boldsymbol{\xi}, t_0) dV_0. \quad (2.4)$$

PRINCIPIO 2.2.1. Il principio di conservazione della massa

Il principio di conservazione della massa afferma che la massa di un corpo, e di una sua parte qualsiasi, è invariante durante di moto (si dice **invariante di moto**) e rimane costante in ogni configurazione.

Si consideri un volume fissato V qualsiasi del nostro corpo. Applicando il principio di conservazione della massa e utilizzando la rappresentazione spaziale euleriana, si ricava l'espressione dell'equazione di continuità. Dato che la massa non varia durante il moto, la sua derivata sarà nulla

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (2.5)$$

Esaminiamo le **cause** in grado di produrre una **variazione di massa**:

- variazione della densità ρ ;
- flusso di massa attraverso la superficie del corpo ;
- sorgenti di massa o pozzi.

Assumendo che non siano presenti effetti corrosivi o fenomeni di crescita, possiamo escludere la terza causa.

La variazione di massa $\frac{dm}{dt}$ è quindi data essenzialmente dalla prima e dalla seconda causa

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \text{flusso attraverso la superficie.} \quad (2.6)$$

Il flusso di massa è dato dalla quantità di particelle che in un determinato intervallo di tempo fluisce attraverso la superficie che delimita il volume occupato dal continuo.

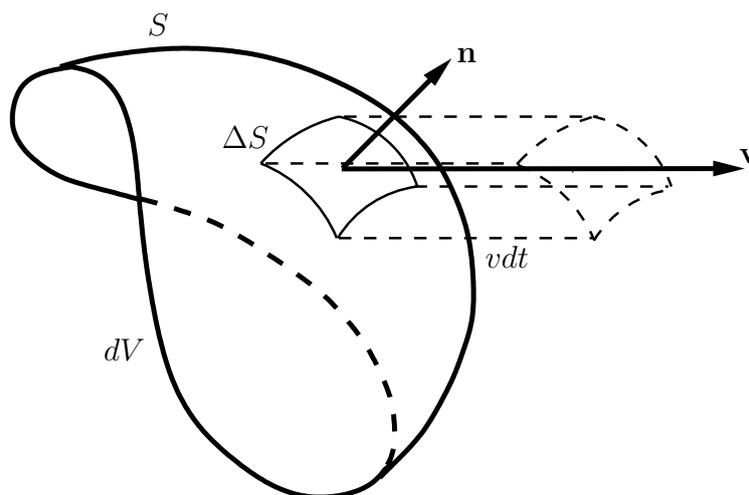


Figura 2.2

- \mathbf{v} rappresenta il vettore velocità delle particelle
- ΔS è la porzione di superficie considerata
- \mathbf{n} è la normale alla superficie
- Δt l'intervallo di tempo

Perchè le particelle siano coinvolte realmente nel flusso è necessario che la loro velocità abbia componente normale alla superficie attraversata non nulla. Inoltre è possibile distinguere un flusso uscente da un flusso entrante, ovvero si ha

- $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ in caso di massa uscente;
- $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ in caso di massa entrante.

Il nostro scopo è quantificare la massa che nell'intervallo di tempo Δt fluisce attraverso la superficie ΔS , in modo da descrivere il flusso. La quantità di massa che si trova all'interno del parallelepipedo in figura è data da

$$\Delta m = \rho \Delta S v_n \Delta t \quad (2.7)$$

dove v_n rappresenta la componente normale della velocità ($v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$). Quindi il flusso di massa attraverso la superficie in un intervallo di tempo Δt è dato da

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \Delta S v_n. \quad (2.8)$$

Siamo adesso in grado di riscrivere la (2.6) sostituendo l'espressione appena trovata del flusso di massa

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.9)$$

Grazie al *teorema della divergenza* possiamo riscrivere l'espressione del flusso in termini di integrale di volume

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.10)$$

e sostituire l'espressione nella (2.9) ottenendo

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (2.11)$$

da cui, dovendo valere la (2.11) qualunque sia il volume V ed essendo continua la funzione integranda, segue l'**equazione di continuità scritta in forma euleriana**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.12)$$

Nel caso in cui la densità sia costante, il materiale viene detto *incomprimibile* e dalla (2.12) segue che

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.13)$$

Nota 2.2.1. Come vedremo più tardi possiamo riscrivere direttamente l'equazione di continuità in una forma alternativa. Vogliamo qui osservare che nella (2.12) compare la derivata locale $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Se riscriviamo il termine di divergenza come

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v}, \quad (2.14)$$

allora la (2.12) prende la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ovvero, utilizzando la derivata sostanziale

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.15)$$

Per concludere verifichiamo la relazione (2.14), nel modo seguente

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Altra derivazione.

Dalla legge della conservazione della massa, che afferma che la massa deve rimanere costante in ogni configurazione, possiamo derivare l'equazione di continuità anche da un semplice confronto tra l'espressione di m nella configurazione di riferimento e quella nella configurazione attuale.

Eguagliamo quindi la (2.2) e la (2.4),

$$m(V_0) = \int_{V_0} \rho_0(\boldsymbol{\xi}, t_0) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = m(V) \quad (2.17)$$

e teniamo presente la funzione posizione $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t)$ e la sua inversa $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t)$, che ci permetteranno di passare da un approccio all'altro (lagrangiano \iff euleriano).

Effettuando la composizione abbiamo

$$\int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \rho[\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t), t] J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_0 \quad (2.18)$$

dove J è il determinante della matrice di trasformazione dalle variabili euleriane alle variabili lagrangiane ed è una funzione che opera dal campo delle matrici ai numeri reali.

Nota 2.2.2. Riportiamo a titolo di esempio l'espressione di J per un problema con due gradi di libertà

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t) &\Rightarrow [x_1 = \kappa_1(\xi_1, \xi_2, t), x_2 = \kappa_2(\xi_1, \xi_2, t)] \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

ovvero

$$J = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right).$$

Sostituiamo adesso il membro di destra della (2.18) nella (2.17) e raccogliendo otteniamo

$$\int_{V_0} [\rho[\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, t), t] J(\boldsymbol{\xi}, t) - \rho_0(\boldsymbol{\xi}, t_0)] dV_0 = 0$$

Data l'arbitrarietà di V_0 si ha l'espressione che lega la densità euleriana (di campo, $C(t)$) alla densità lagrangiana (di particella, C_0)

$$\rho J = \rho_0$$

più esplicitamente

$$\rho[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t]J(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}, t_0).$$

Dato che $\dot{\rho}_0 = 0$ concludiamo che

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = 0, \quad (2.20)$$

dove $\rho = \rho[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t]$ e $J = J(\boldsymbol{\xi}, t)$, chiamata **equazione di continuità in forma lagrangiana** o materiale, dato che è espressa in termini delle variabili $\boldsymbol{\xi}$. Si noti che la derivata rispetto al tempo è quella totale, e quindi va tenuto conto della dipendenza di ρ dal tempo sia tramite il punto \mathbf{x} che esplicitamente.

Esercizio 2.2.1. Ricavare l'equazione di continuità nella forma euleriana a partire dalla forma (2.20).

Soluzione 2.1. Eseguendo la derivata in (2.20) si ha

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}J + \rho \frac{dJ}{dt} = 0,$$

se teniamo conto della seguente relazione (vedi Nota (2.2.4))

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$$

e sostituiamo, si ha

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = J \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = 0,$$

Ma dato che J è sempre $\neq 0$, otteniamo

$$\frac{d\rho}{dt}(\mathbf{x}, t) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ovvero, esplicitamente

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{con } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Esplicitando la derivata totale, $\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v}$ e tenendo conto che $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ si arriva alla forma (2.12) ottenuta sopra. ovvero l'**equazione di continuità nella forma euleriana**

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{con } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Nota 2.2.3. Sistemi continui incompressibili. Nel caso in cui il sistema sia incompressibile, ovvero $\rho = \text{cost}$, si ha di conseguenza che $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Un moto caratterizzato dall'aver $\text{div } \mathbf{v} = 0$ si dice **moto solenoidale**. Come sarà più chiaro quando parleremo dei sistemi fluidi, i moti solenoidali sono caratterizzati dalla proprietà che la massa attraverso una sezione di un tubo di flusso nell'unità di tempo è indipendente dalla sezione stessa (legge di Castelli).

Nota 2.2.4. In seguito all'azione della funzione posizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ il volume dV_0 viene trasformato nel tempo t in $V(t)$, con $dV(t) = JdV_0$. In termini finiti la misura di $V_t = V(t)$ è data da

$$\text{mis } V_t = \int_{V_t} dV = \int_{V_0} J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_0$$

Vediamo ora come varia

$$\frac{d}{dt} \text{mis } V_t = \int_{V_0} \frac{dJ(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} dV_0 = \int_{V_0} \frac{1}{J} \frac{dJ(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} J dV_0 = \int_{V_t} \frac{1}{J} \frac{dJ(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t)}{dt} dV.$$

Questa variazione può essere ottenuta anche integrando il flusso di particelle sul bordo

$$\frac{d}{dt} \text{mis } V_t = \frac{1}{\rho} \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V_t} \text{div } \mathbf{v} dV.$$

Uguagliando si ha

$$\frac{1}{J} \frac{dJ(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t)}{dt} = \text{div } \mathbf{v},$$

ovvero

$$\frac{dJ(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t)}{dt} = J \text{div } \mathbf{v},$$

in termini euleriani.

2.3 Il Teorema del Trasporto

L'equazione di continuità può essere vista come un caso particolare di un teorema più generale conosciuto col nome di Teorema del Trasporto (si dovrà scegliere come funzione φ la funzione densità di massa).

Sia $\Omega(t) \subseteq \mathcal{C}(t)$ una parte del sistema continuo costituita, $\forall t \in [t_0, T)$, sempre dalle stesse particelle (che, per visualizzare, possono essere pensate colorate di un colore diverso dalle rimanenti particelle del sistema) Notiamo che, poiché ogni particella (\mathbf{x}, dm) mantiene invariato la sua massa dm , dalla definizione di $\Omega(t)$ segue che la massa totale $m_{\Omega(t)}$, contenuta in $\Omega(t)$, non dipende dal tempo, ovvero

$$\frac{d}{dt} m_{\Omega(t)} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0, \quad \forall t \in [t_0, T). \quad (2.21)$$

Supponiamo poi che $\varphi(\mathbf{x}, t)$ sia un'opportuna quantità fisica del sistema continuo (per esempio, la densità di massa $\rho(\mathbf{x}, t)$, l'energia cinetica per unità di massa $\frac{1}{2}v^2(\mathbf{x}, t)$, etc.) e che interessi valutare in che modo si evolve (o si trasporta con Ω) l'integrale

$$\bar{\varphi}(t) = \int_{\Omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV, \quad t \in [t_0, T), \quad (2.22)$$

che rappresenta il valor globale di φ relativamente alla porzione $\Omega(t)$. Si noti che, se $\varphi(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$, la (2.21) mostra che $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0$. Osserviamo inoltre che l'integrale al secondo membro della (2.22) dipende da t tramite il dominio d'integrazione $\Omega(t)$ e tramite la funzione integranda $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Siamo in grado ora di mostrare il seguente teorema, conosciuto col nome di **Teorema di trasporto** che esprime la legge di variazione nel tempo della quantità $\bar{\varphi}(t)$, definita da (2.22).

Teorema 2.3.1. *Sia $\varphi(\mathbf{x}, t)$ una quantità fisica del sistema, indichiamo con $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t)$ il valore dato dall'integrale (2.22), allora si ha*

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right] dV, \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.23)$$

Si ricordi che $\Omega(t) \subset \mathcal{C}(t)$ è costituito, al variare di t , sempre dalle stesse particelle.

Dimostrazione. Sia $\varphi(\mathbf{x}, t)$ una grandezza fisica di tipo scalare (ma il teorema può essere dimostrato in generale per una grandezza tensoriale di ordine qualsiasi) e se ne esprima la derivata materiale

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega^0} \varphi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J dV_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.24)$$

dove Ω^0 è il volume fissato nella configurazione di riferimento. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) &= \int_{\Omega^0} \left[\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J \right] dV_0 = \int_{\Omega^0} \left[\dot{\varphi}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J + \varphi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \dot{J} \right] dV_0 \\ &= \int_{\Omega^0} [\dot{\varphi}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) + \varphi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \operatorname{div} \mathbf{v}] J dV_0. \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che $\dot{J} = J v_{x,x} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$. Tornando ora alle coordinate locali si ha

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} [\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \varphi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}] dV,$$

e tenendo conto della definizione di derivata materiale

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{v} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV. \quad (2.25)$$

Usando la relazione (vedi Nota 2.2.1 con $\rho = \varphi$)

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{v} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.26)$$

si ottiene la relazione (2.23) del Teorema del Trasporto,

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right] dV. \quad (2.27)$$

□

Facendo uso del teorema della divergenza, la (2.23) esprime il tasso temporale di variazione della quantità $\bar{\varphi}$ come somma della quantità creata nel volume V , più la quantità che entra attraverso la superficie, ovvero

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (2.28)$$

2.4 Equazioni fondamentali

2.4.1 Forze

Consideriamo un corpo continuo \mathcal{C} che occupi un certo dominio spaziale all'istante di tempo t e prendiamo una sua parte B , che supponiamo contenuta in \mathcal{C} , con frontiera regolare ∂B ; il continuo è caratterizzato da una densità di massa $\rho(\mathbf{x}, t)$. Ci domandiamo quali siano le forze che agiscono sul continuo B . Tra le forze agenti su B potremo individuarne alcune attribuibili all'interazione a distanza tra il continuo ed il resto dell'universo ed altre che si manifestano per contatto sulla superficie ∂B : alle prime si dà il nome di **forze di massa**, le seconde sono chiamate **forze di superficie**.

1. **Forze di massa.** Vengono caratterizzate mediante l'introduzione di un campo di densità di forza: *forza specifica di volume*

$$\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(P, t) \quad (2.29)$$

mediante la quale può esprimersi la forza di volume risultante sulla parte del corpo in una qualsiasi configurazione $B(t)$ del sistema continuo

$$\mathbf{F}(t) = \int_{B(t)} \mathbf{f}_V(P, t) dV. \quad (2.30)$$

Possiamo inoltre definire una *forza specifica di massa*

$$\mathbf{f}_m(P, t) = \mathbf{f}_V(P, t) / \rho(P, t) \quad (2.31)$$

e facendo l'integrale su tutto il corpo calcolare la forza di volume totale sulla parte del corpo

$$\mathbf{F}(t) = \int_{B(t)} \rho(P, t) \mathbf{f}_m(P, t) dV. \quad (2.32)$$

ESEMPIO 2.4.1. *Un esempio tipico di forza di volume è il peso. In questo caso la forza specifica di massa coincide con l'accelerazione di gravità \mathbf{g} e la forza specifica di volume con il peso specifico $\rho\mathbf{g}$.*

2. **Forze di superficie e Stato di tensione.** Per precisare il concetto di forza di superficie si consideri un punto di ∂B e sia \mathbf{n} il versore normale alla superficie nel punto considerato. A tale punto ed al versore \mathbf{n} si associa una densità superficiale di forza $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$, detto *sforzo specifico* (per unità di superficie), mediante il quale è possibile esprimere la forza di superficie risultante agente su B attraverso ∂B

$$\Phi(t) = \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma \quad (2.33)$$

La componente $\Phi(P, \mathbf{n}, t) \cdot \mathbf{n}$ è detta sforzo specifico di trazione se positiva o di compressione se negativa, mentre la componente appartenente al piano normale ad \mathbf{n} è detta sforzo specifico di taglio.

In base alla (2.33) siamo in grado di calcolare la forza di superficie su qualsiasi parte del continuo purchè si conosca in ogni istante ed in ogni punto del continuo l'insieme degli sforzi specifici $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$ relativi alla totalità dei versori \mathbf{n} , ovvero lo *stato di tensione superficiale del sistema*.

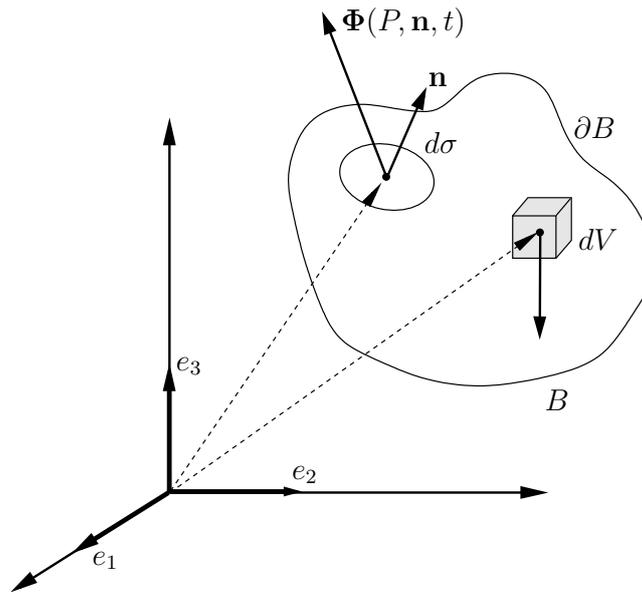


Figura 2.3

Nello spirito del principio di azione e reazione il vettore $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$ è assoggettato alla condizione

$$\Phi(P, -\mathbf{n}, t) = -\Phi(P, \mathbf{n}, t). \quad (2.34)$$

Nota 2.4.1. La (2.34) può essere provata rigorosamente applicando la prima equazione della dinamica ad un parallelepipedo infinitesimo (vedi [Belleni]).

2.4.2 Statica e Dinamica

Equazioni cardinali della statica

Innanzitutto osserviamo che quando un sistema continuo è in equilibrio, allora dovrà essere in equilibrio anche ogni sua parte. Sia \mathcal{C} un sistema materiale continuo in equilibrio, ad un istante di tempo fissato, in una configurazione qualsiasi, sotto l'azione di un assegnato campo $\mathbf{f}_m(P)$ di forze specifiche di massa e di una assegnata distribuzione di sforzi specifici $\Phi(P, \mathbf{n})$ sulla superficie. Il sistema di forze agenti dall'esterno su ogni parte di \mathcal{C} risulta equilibrato se valgono le seguenti uguaglianze (omettiamo il tempo t):

$$\int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}) d\sigma = 0, \quad 1^a \text{ equazione cardinale} \quad (2.35)$$

$$\int_B (P-O) \wedge \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} (P-O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n}) d\sigma = 0, \quad 2^a \text{ equazione cardinale} \quad (2.36)$$

per ogni $B \in \mathcal{C}$ e dove O è un punto arbitrario. Queste equazioni sono chiamate **equazioni cardinali della statica**. La prima e la seconda equazione cardinale stabiliscono che la risultante delle forze ed il momento risultante agenti su un sistema continuo in equilibrio sono nulle.

Si osservi che, mentre la densità superficiale di forza $\Phi(P, \mathbf{n})$ è nota sulla frontiera del corpo ∂B , lo stato di tensione nei punti interni di B è incognito. Il problema statico consiste quindi nella determinazione:

- di eventuali configurazioni di equilibrio,
- della densità $\rho(P)$ in ciascun punto di B ,
- dello stato di tensione in ciascun punto di B .

Le equazioni cardinali non sono sufficienti per la risoluzione di questo problema, dato che esse non contengono alcuna informazione sulla *struttura* del sistema continuo e più precisamente sul modo in cui il sistema si deforma in relazione allo stato di tensione.

Lo schema va dunque completato con l'aggiunta delle cosiddette *equazioni costitutive* caratteristiche del materiale del corpo.

Con analogia al caso discreto possiamo introdurre i concetti di quantità di moto dell'intero sistema continuo, sommando le quantità di moto $\rho \mathbf{v} dV$ degli elementi materiali contigui a P

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) \mathbf{v}(P, t) dV,$$

di momento della quantità di moto dell'intero sistema continuo

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) (P - O) \wedge \mathbf{v}(P, t) dV,$$

e di energia cinetica totale

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \rho(P, t) v^2(P, t) dV .$$

Durante il moto ogni parte del sistema continuo si può pensare come composta da elementi (infinitesimi) materiali di massa ρdV , contigui al punto P , che si muovono a partire da una configurazione iniziale con velocità \mathbf{v} ed accelerazione \mathbf{a} . Per il *principio di conservazione della massa*, durante il moto di P , pur variando in generale sia la densità ρ che l'elemento dV , il prodotto ρdV , massa dell'elemento materiale contiguo a P , non può variare col tempo.

Equazioni cardinali della dinamica

Il problema della dinamica si formula in modo analogo estendendo ai sistemi continui l'uso delle forze di inerzia.

PRINCIPIO 2.4.1. *Il Principio di D'Alembert afferma che le equazioni della dinamica si ottengono da quelle della statica sostituendo alle forze applicate la differenza tra le forze applicate stesse e quelle inerziali.*

Applicando tale principio otteniamo dunque le **equazioni cardinali della dinamica**

$$\int_B \rho(P, t) [\mathbf{f}_m(P, t) - \mathbf{a}(P, t)] dV + \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = 0 \quad (2.37)$$

$$\int_B (P - O) \wedge \rho(P, t) [\mathbf{f}_m(P, t) - \mathbf{a}(P, t)] dV + \int_{\partial B} (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = 0 \quad (2.38)$$

dove le forze specifiche di massa $\mathbf{f}_m(P, t)$ sono assegnate, gli sforzi Φ su ∂B sono noti, mentre sono da determinare: il moto del sistema, la funzione $\rho(P, t)$ e lo stato di tensione.

Si ricordi che le equazioni cardinali si riferiscono ad una qualsiasi parte del continuo \mathcal{C} ed in generale risultano necessarie ma non sufficienti.

2.5 Il tensore degli sforzi di Cauchy

Nel paragrafo (2.4.1) abbiamo introdotto la densità superficiale di forza $\Phi(P, \mathbf{n}, t)$, caratterizzando le forze che le particelle del continuo, al di fuori ed all'interno della frontiera ∂B del corpo, esercitano reciprocamente attraverso la superficie ∂B .

La conoscenza dello sforzo in un punto P del sistema continuo dipende dalla normale \mathbf{n} , e quindi in generale la conoscenza dello stato di tensione del sistema in P risulta dipendere da una infinità (alla seconda) di parametri. In realtà un teorema dovuto a Cauchy consente di esprimere lo sforzo specifico

$\Phi(P, \mathbf{n}, t)$ in P relativo all'elemento di superficie caratterizzato dalla normale \mathbf{n} tramite la conoscenza degli sforzi relativi a tre direzioni fra loro ortogonali.

La dipendenza del vettore Φ dalla direzione della normale \mathbf{n} è determinata dal **Teorema di Cauchy**:

Teorema 2.1. *In ogni punto del continuo è definito un tensore simmetrico, detto tensore degli sforzi \mathbb{T} , tale che lo sforzo $\Phi(P, \mathbf{n})$ è dato da*

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \mathbb{T}(P)\mathbf{n}. \quad (2.39)$$

Per dimostrare la (2.39), consideriamo nel sistema continuo \mathcal{C} un tetraedro infinitesimo $\tau = ABCP$, con il vertice nel punto P e gli spigoli uscenti da questo punto, paralleli agli assi coordinati e di lunghezza dx , dy e dz . La faccia del tetraedro ABC è caratterizzata dal versore normale (esterno alla faccia) \mathbf{n} ed ha area $d\sigma$. Ogni faccia $d\sigma_i$ giace su un piano coordinato ed ha come versore

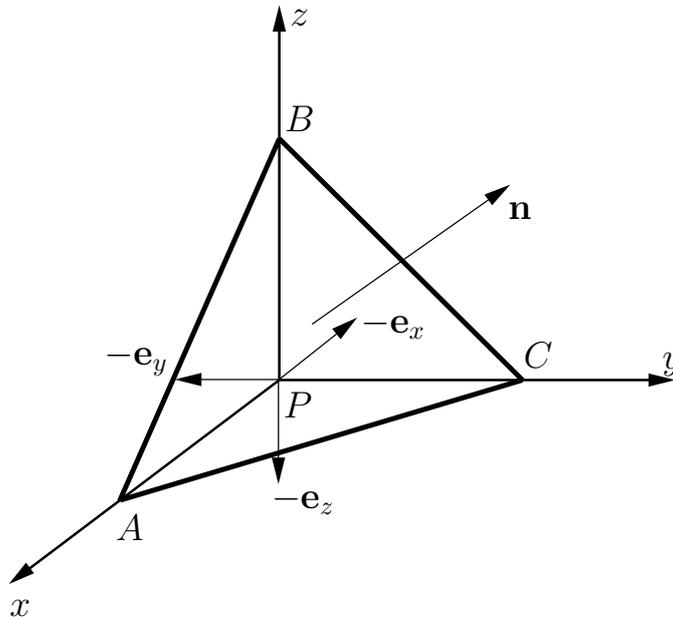


Figura 2.4: Tetraedro

normale esterno il vettore corrispondente $-\mathbf{e}_i$, mentre la direzione normale alla giacitura della quarta faccia $d\sigma$ del tetraedro è data da \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z \quad (2.40)$$

dove

$$n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \text{con } i = x, y, z. \quad (2.41)$$

Supponendo che τ sia sufficientemente piccolo da assumere che le forze di massa e di superficie siano costanti, effettuiamo il bilancio delle forze agenti

sul tetraedro in equilibrio

$$\rho \mathbf{f}_m dV + \Phi(P, \mathbf{n})d\sigma + \Phi(P, -\mathbf{e}_x)d\sigma_x + \Phi(P, -\mathbf{e}_y)d\sigma_y + \Phi(P, -\mathbf{e}_z)d\sigma_z = 0 \quad (2.42)$$

e considerando il principio di azione e reazione (2.34) e le seguenti uguaglianze

$$d\sigma_x = n_x d\sigma, \quad d\sigma_y = n_y d\sigma, \quad d\sigma_z = n_z d\sigma,$$

possiamo riscrivere l'espressione del bilancio delle forze (2.42) come

$$\rho \mathbf{f}_m dV + \Phi(P, \mathbf{n})d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y d\sigma - \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z d\sigma = 0. \quad (2.43)$$

Dividiamo entrambi i membri per $d\sigma$

$$\rho \mathbf{f}_m \frac{dV}{d\sigma} + \Phi(P, \mathbf{n}) - \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x - \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y - \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z = 0 \quad (2.44)$$

Essendo il termine $\mathbf{f}_m \rho \frac{dV}{d\sigma}$ trascurabile, otteniamo la relazione

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \Phi(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z)n_z, \quad (2.45)$$

ovvero

$$\begin{cases} \Phi_x(P, \mathbf{n}) = \Phi_x(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_x(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_x(P, \mathbf{e}_z)n_z, \\ \Phi_y(P, \mathbf{n}) = \Phi_y(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_y(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_y(P, \mathbf{e}_z)n_z, \\ \Phi_z(P, \mathbf{n}) = \Phi_z(P, \mathbf{e}_x)n_x + \Phi_z(P, \mathbf{e}_y)n_y + \Phi_z(P, \mathbf{e}_z)n_z, \end{cases} \quad (2.46)$$

che rappresentano lo sforzo specifico relativo ad un elemento di superficie comunque orientato in funzione degli sforzi specifici che si esercitano sui tre piani normali agli assi di riferimento. I termini $\Phi(P, \mathbf{e}_x)$, $\Phi(P, \mathbf{e}_y)$ e $\Phi(P, \mathbf{e}_z)$ rappresentano rispettivamente gli sforzi relativi al primo, al secondo ed al terzo piano coordinato ortogonale.

Sinteticamente, definendo

$$\sigma_{ji} = \Phi_i(P, \mathbf{e}_j) = \Phi(P, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i,$$

da (2.46) si ha

$$\Phi_i(P, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 \Phi_i(P, \mathbf{e}_j) n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j.$$

Passando dalle componenti ai vettori

$$\Phi(P, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_j,$$

dove $\sigma_{ij} = \Phi(P, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j$. Abbiamo quindi verificato l'uguaglianza $\Phi(P, \mathbf{n}) = \mathbb{T} \mathbf{n}$ dove il **tensore degli sforzi di Cauchy** \mathbb{T} ha comunemente l'espressione

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x(P, \mathbf{e}_x) & \Phi_y(P, \mathbf{e}_x) & \Phi_z(P, \mathbf{e}_x) \\ \Phi_x(P, \mathbf{e}_y) & \Phi_y(P, \mathbf{e}_y) & \Phi_z(P, \mathbf{e}_y) \\ \Phi_x(P, \mathbf{e}_z) & \Phi_y(P, \mathbf{e}_z) & \Phi_z(P, \mathbf{e}_z) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

oppure

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

I termini sulla diagonale principale sono chiamati sforzi normali σ_{ii} di compressione e trazione, mentre i termini τ_{ij} intorno alla diagonale rappresentano gli sforzi di taglio.

Il tensore degli sforzi di Cauchy è un tensore simmetrico, come si può dimostrare considerando il bilancio dei momenti (vedi paragrafo successivo).

La principale conseguenza del Teorema di Cauchy, è che la conoscenza dello **stato di tensione** in un sistema continuo si riduce alla conoscenza di soli 3 vettori (pari a 9 scalari), corrispondenti agli sforzi relativi a tre faccette in P a due a due ortogonali.

2.5.1 Equazioni indefinite di equilibrio e della dinamica

Vediamo adesso come poter riscrivere la prima equazione di equilibrio in forma differenziale utilizzando il tensore di Cauchy

$$\begin{aligned} \int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}) d\sigma &= \int_B \rho(P) \mathbf{f}_m(P) dV + \int_{\partial B} \mathbb{T}(P) \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_B (\rho(P) \mathbf{f}_m(P) + \operatorname{div} \mathbb{T}) dV \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di Gauss $\int_{\partial B} \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma = \int_B \operatorname{div} \mathbb{T}$. Sfruttando quindi l'arbitrarietà di B possiamo scrivere la prima equazione cardinale della statica nella forma

$$\rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T} = 0, \quad (2.49)$$

detta **equazione indefinita di bilancio o di equilibrio**. Ragionando in termini di potenza ed invarianza si arriverebbe alla stessa forma delle equazioni di bilancio.

Utilizzando il risultato appena ottenuto, *possiamo riscrivere le equazioni della dinamica* in una nuova forma attraverso il tensore degli sforzi di Cauchy

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{f}_m - \mathbf{a}) + \operatorname{div} \mathbb{T} &= 0, \\ \rho \mathbf{a} &= \rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Esprimendo l'accelerazione \mathbf{a} come derivata del campo di velocità seconda la descrizione lagrangiana abbiamo

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T}, \quad (2.50)$$

oppure esprimendo \mathbf{a} attraverso la descrizione euleriana e dividendo per ρ otteniamo l'espressione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbb{T} \quad (2.51)$$

equivalente a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbb{T}, \quad (2.52)$$

detta, **equazione indefinita della dinamica**.

Teorema 2.2. *Il tensore degli sforzi \mathbb{T} è un tensore simmetrico, ovvero*

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T}. \quad (2.53)$$

Partiamo dalla seconda equazione della statica (2.36) per il nostro corpo B , e poniamo l'attenzione sul secondo termine

$$G = \int_{\partial B} (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{n}, t) d\sigma. \quad (2.54)$$

Utilizzando il Teorema di Cauchy, questo secondo termine G si può riscrivere come

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} (P - O) \wedge [\Phi(P, \mathbf{e}_x) n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y) n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z) n_z] d\sigma \\ &= \int_{\partial B} [(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) n_x + (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) n_y + (P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z) n_z] d\sigma \\ &= \int_B \left[\frac{\partial [(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x)]}{\partial x} + \frac{\partial [(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y)]}{\partial y} + \frac{\partial [(P - O) \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)]}{\partial z} \right] dV \\ &= \int_B (P - O) \wedge \left[\frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_z)}{\partial z} \right] dV \\ & \quad + \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV. \end{aligned}$$

Sostituendo nella 2^a equazione cardinale della statica e sfruttando l'equazione indefinita d'equilibrio, si ottiene

$$\begin{aligned} & \int_B (P - O) \wedge \left[\rho(P) \mathbf{f}_m(P) + \frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi(P, \mathbf{e}_z)}{\partial z} \right] dV \\ & \quad + \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV \\ &= \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di B , tenendo conto del tensore degli sforzi, utilizzando la scritte con 2 pedici per le sue componenti, si ha

$$\begin{aligned} & \int_B [\mathbf{e}_x \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \wedge \Phi(P, \mathbf{e}_z)] dV \\ &= \Phi_{xy} \mathbf{e}_z - \Phi_{xz} \mathbf{e}_y - \Phi_{yx} \mathbf{e}_z + \Phi_{yz} \mathbf{e}_x + \Phi_{zx} \mathbf{e}_y - \Phi_{zy} \mathbf{e}_x = 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx}, \quad \Phi_{xz} = \Phi_{zx}, \quad \Phi_{yz} = \Phi_{zy}$$

ovvero

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ji}, \quad \text{per tutti gli } i, j. \quad (2.55)$$

Possiamo così riscrivere il tensore degli sforzi in forma simmetrica

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Nota 2.5.1. Considerazioni sul tensore degli sforzi. Abbiamo già parlato della proprietà di simmetria del tensore degli sforzi T . Questo implica, per il teorema spettrale per le matrici reali simmetriche, che tale tensore è diagonalizzabile secondo un sistema di coordinate ortonormali. I tre autovalori di \mathbb{T} sono reali e la base ortonormale è generata dagli autovettori del tensore \mathbb{T} che rappresentano un sistema principale.

Le direzioni degli autovettori sono quelle che hanno lo sforzo tutto normale.

2.6 Appendice

2.6.1 L'accelerazione di Lagrange

Nel formalismo tensoriale, ponendo $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ e utilizzando l'operatore *nabla* per il gradiente, si ha

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad (\nabla \mathbf{v})^T = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

ed anche

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) v_j \mathbf{e}_j = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i,$$

e

$$(\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) v_j \mathbf{e}_j = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Verifichiamo

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v},$$

infatti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \mathbf{e}_i \\
 &= (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v} + [(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T] \mathbf{v} \\
 &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j \mathbf{e}_i + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) v_j \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

Riscriviamo quindi l'accelerazione (materiale) (1.22) nella forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}.$$

2.6.2 Vorticità

Come si vede in fluidodinamica, in alcune zone di un sistema fluido, a causa delle pareti o di ostacoli, nascono dei movimenti turbolenti che sono caratterizzati dalla vorticità.

La vorticità ω è definita tramite il rotore della velocità:

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Se si introduce la velocità di rotazione dell'elemento fluido Ω , allora si può provare che

$$\omega = \Omega.$$

Un fluido è detto *irrotazionale* se $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, ed in questo caso la circolazione del vettore velocità è nulla. Definiamo la circolazione tramite la circuitazione del vettore velocità lungo una linea chiusa e orientata C .

Quando invece un fluido è rotazionale, allora la circolazione non nulla è calcolata dal flusso del vettore vorticità attraverso la superficie delimitata da una linea chiusa C .

Capitolo 3

I fluidi

I fluidi sono stati fin dall'antichità oggetto di interesse scientifico oltre che naturale e tecnico. Secondo la storia conosciuta il primo a captare la somiglianza tra aria ed acqua fu il grande filosofo Aristotele (Calcidica 384 a.C.- Calcide 322 a.C.), il quale attribuì ad esse una proprietà comune chiamata *sottigliezza*, l'antenata della densità.

Se l'idea aristotelica aveva centrato il concetto qualitativo, il primo a pervenire ad una corretta e sorprendente teoria sul comportamento dei fluidi fu lo scienziato siracusano Archimede (Siracusa 287 a.C. circa - Siracusa 212 a.C.), precursore della scienza idrostatica.

Si narra che le sue grandi scoperte siano legate ad un curioso aneddoto: il tiranno di Siracusa Gerone II, sospettando che la sua corona, appena forgiata dall'orafo di corte, non fosse stata realizzata con oro puro, decise di rivolgersi al mondo scientifico di cui Archimede era massimo esponente. Il mito vuole che lo scienziato, ormai rassegnato a non trovare soluzione, abbia cercato pace presso le terme pubbliche, dove si accorse di un fatto che fino a quel giorno era passato inosservato: immergendo il corpo nella vasca, il livello dell'acqua si alzava. Grazie a tale semplice intuizione, il genio siracusano poté formulare

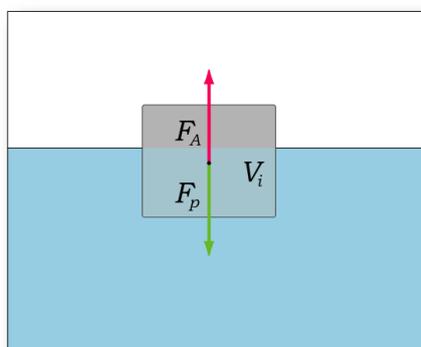


Figura 3.1: Il principio di Archimede sul galleggiamento dei corpi

i famosi **Principi di Archimede**: *”Qualsiasi solido più leggero di un fluido, se collocato nel fluido, si immergerà in misura tale che il peso del solido sarà uguale al peso del fluido spostato. Un solido più pesante di un fluido, se collocato in esso, discenderà in fondo al fluido e se si peserà il solido nel fluido, risulterà più leggero del suo vero peso, e la differenza di peso sarà uguale al peso del fluido spostato.”*

Tale scoperta rese possibile la misura della densità della corona confrontando semplicemente gli spostamenti di liquido in seguito all’immersione, in un recipiente colmo d’acqua, del cimelio e di un blocco d’oro puro di pari peso: ma lo stesso peso non corrispondeva a quanto pare allo stesso volume. Se

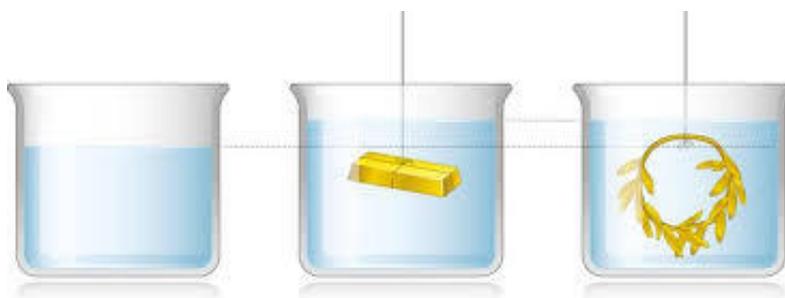


Figura 3.2: La corona spostava una quantità maggiore di acqua rispetto al blocco d’oro: l’orefice aveva sostituito una parte di oro con argento e il volume della corona risultava maggiore.

Archimede con il trattato *Sui Galleggianti* aveva gettato le basi della scienza idrostatica, precursore della scienza fluidodinamica fu senza dubbio Leonardo da Vinci, pittore, filosofo ed ingegnere. Leonardo infatti, osservando il corso dei fiumi, il flusso nei canali e la forma dei vortici, capì che, per quanto potesse sembrare caotico, il movimento dell’acqua seguiva schemi prevedibili.

”L’acqua scorre sempre più velocemente quando è costretta attraverso una strozzatura e l’aumento della velocità dell’acqua è proporzionale al restringimento della sezione del canale di passaggio.” Questa straordinaria scoperta

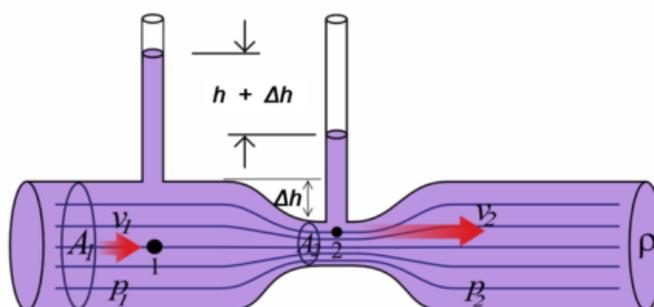


Figura 3.3: Legge di Bernoulli

fu in seguito chiamata: **Principio di continuità**. Altro grande passo nello studio della fluidodinamica venne compiuto con il medico e matematico Daniel Bernoulli (Groninga 1700 - Basilea 1782), il quale dedicò tutta la vita allo studio dei fluidi avanzando e provando importanti teorie. Egli fu il primo a trovare un metodo semplice ed efficace per misurare la pressione di un fluido che scorre in un vaso sanguigno ed, in generale, in un canale; riuscì inoltre a trovare la relazione che lega pressione e velocità in un fluido in movimento. Molti studiosi hanno contribuito alla crescita delle conoscenze riguardanti i fluidi e le loro applicazioni ingegneristiche; ne sono stati ricordati solo alcuni allo scopo di evidenziare i principi cardine dell'idrostatica e della fluidodinamica.

3.1 Statica e dinamica dei fluidi

I fluidi, liquidi o gassosi, sono dei sistemi continui *incapaci di sostenere sforzi di taglio in condizioni di riposo*; l'azione di tali sforzi è infatti responsabile della continua deformazione subita dai fluidi.

Facendo un semplice confronto tra il comportamento di un corpo solido ed un corpo fluido, per esempio un sasso e l'acqua, osserveremo che tutte le parti del sasso, se colpito da una pala, si muoveranno simultaneamente, mentre l'acqua, colpita dalla stessa pala, schizzerà dappertutto.

Definizione 3.1. *Si dicono fluidi i sistemi continui nei quali in condizioni statiche sono presenti soltanto sforzi di compressione.*

Quindi un fluido è caratterizzato dall'assenza di forze di taglio e questo comporta una proprietà molto interessante, conosciuta come Teorema di Pascal.

3.1.1 I fluidi perfetti

Teorema 3.1. Teorema di Pascal. (Definizione di fluido perfetto). *In un fluido incomprimibile uno stato di pressione prodotto in qualunque sua parte viene trasmesso inalterato in ogni suo punto e in ogni sua direzione.*

Con questo teorema, Pascal definì fluidi perfetti quei sistemi continui nei quali sono presenti soltanto forze di pressione in ogni direzione.

Alla classe dei fluidi perfetti, appartengono i gas ed alcuni fluidi (come l'acqua), ma possono essere considerati perfetti, in buona approssimazione, tutti i fluidi con bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ne consegue che in un fluido, essendo assenti sforzi di taglio, sono presenti solo direzioni principali, per le quali la struttura del tensore degli sforzi \mathbb{T} è diagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Proprietà 3.1. *In un fluido in equilibrio il tensore degli sforzi è diagonale.*

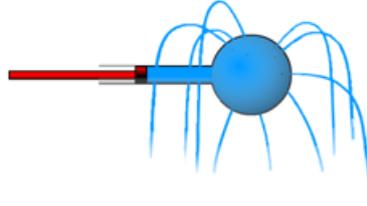


Figura 3.4:

Dalla definizione di fluido secondo Pascal, si può provare il cosiddetto Teorema di Pascal, conosciuto con questo nome in letteratura, nella seguente forma.

Teorema 3.2. Teorema di Pascal. *In un fluido in equilibrio, il tensore degli sforzi ha la forma*

$$\mathbb{T}(P, t) = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove p è uno scalare positivo detto **pressione**, cioè gli sforzi sono tutti uguali.

Dimostrazione. Usiamo il teorema di Cauchy con il tempo t fissato,

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = \Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z.$$

Sostituendo in $\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$ si ha

$$\Phi(P, \mathbf{e}_x, t)n_x + \Phi(P, \mathbf{e}_y, t)n_y + \Phi(P, \mathbf{e}_z, t)n_z = -p(P, \mathbf{n}, t) \mathbf{n}$$

Utilizzando nel primo membro la definizione di fluido e nel secondo membro l'espressione del vettore \mathbf{n} , l'espressione sopra può essere riscritta come

$$-p(P, \mathbf{e}_x, t)n_x \mathbf{e}_x - p(P, \mathbf{e}_y, t)n_y \mathbf{e}_y - p(P, \mathbf{e}_z, t)n_z \mathbf{e}_z = -p(P, \mathbf{n}, t)(n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z).$$

Uguagliando i due membri si ottiene per ogni direzione \mathbf{n}

$$p(P, \mathbf{n}, t) = p(P, \mathbf{e}_x, t) = p(P, \mathbf{e}_y, t) = p(P, \mathbf{e}_z, t),$$

da cui

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = -p(P, t) \mathbf{n}. \quad \square$$

Un esperimento molto semplice, ma capace di illustrare efficacemente lo stato di pressione di un corpo in un fluido, consiste nell'immergere totalmente un uovo in acqua: si osserva che la forma del tuorlo rimane invariata.

Un corpo immerso in un fluido è sottoposto ad una pressione di compressione, lungo le direzioni principali, di uguale intensità, ovvero si trova in uno stato di

pressione idrostatica. Ne consegue che non è presente uno stato di tensione deviatorico, ovvero il corpo non subirà cambiamenti di forma ma solo di volume. Di stessa natura è lo stato di pressione a cui sono sottoposte le bolle di sapone, internamente ed esternamente, mentre fluttuano nell'aria; esse infatti rimangono sferiche.

Equazione di stato

La pressione p , la densità ρ e la temperatura θ in un fluido sono legate tramite l'equazione di stato.

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (3.2)$$

Equazione fondamentale della statica

Grazie al Teorema di Pascal sappiamo che le forze esercitate all'interno di un fluido a riposo sono esclusivamente forze di pressione, ovvero un fluido perfetto è caratterizzato dall'assenza di sforzi di taglio.

Tenendo conto del Teorema di Pascal, possiamo scrivere l'equazione indefinita di equilibrio

$$\rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \mathbb{T} = \rho \mathbf{f}_m + \operatorname{div} \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p = 0$$

e quindi l'**equazione fondamentale della statica dei fluidi** ha la forma

$$\rho \mathbf{f}_m = \nabla p.$$

Nel caso della presenza del solo peso, l'equazione della statica si riduce a

$$\rho \mathbf{g} = \nabla p.$$

Si osservi che la pressione è stata introdotta con il segno meno affinché risulti positiva per sforzi di compressione.

Equazione fondamentale della dinamica

Continuiamo a chiamare perfetto anche in condizioni dinamiche un fluido il cui tensore degli sforzi \mathbb{T} rimanga diagonale anche durante il movimento.

Fanno parte di questa classe tutti quei fluidi che in buona approssimazione hanno bassa viscosità e gradienti di velocità non elevati. Ricaviamo adesso l'**equazione di moto per un fluido perfetto** applicando la seconda legge di Newton

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p \quad (3.3)$$

essendo \mathbf{a} il vettore accelerazione, ρ la densità del fluido ed \mathbf{f}_m le forze specifiche di massa.

Dividendo per la densità ρ , otteniamo l'espressione del vettore accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

che può essere riscritta sotto forma di derivata materiale in rappresentazione euleriana

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.4)$$

Questa equazione, detta **equazione indefinita della dinamica**, contiene cinque incognite, che possono essere ridotte assumendo valida l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.5)$$

ed introducendo inoltre la **funzione di stato** F che regola il legame tra la pressione p (pressione idrodinamica), la temperatura θ e la densità ρ del fluido in movimento

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (3.6)$$

Per risolvere completamente il problema di un fluido in movimento è comunque necessario determinare un'ultima relazione. L'informazione mancante riguarda in particolare la densità ρ , infatti fino ad ora sono state fatte considerazioni del tutto indipendenti dalla natura del fluido; è necessario quindi fornire un'ulteriore informazione di carattere fisico che espliciti il *legame tra pressione e densità*; questo può essere possibile attraverso un'approssimazione del fenomeno fisico. Esistono infatti alcune situazioni particolari, a dire il vero molto frequenti, che permettono di semplificare il modello del fluido:

- **Fluidi barotropici:** quando l'equazione di stato (3.6) è indipendente dalla temperatura θ , il fluido si trova sottoposto a trasformazioni isoterme oppure adiabatiche (che avvengono senza scambi di calore con l'ambiente esterno, ovvero il sistema è isolato termicamente) e la densità può essere espressa in funzione della pressione

$$p = p(\rho) \Rightarrow \rho = \rho(p). \quad (3.7)$$

Da sottolineare il fatto che nella (3.7) non si ha dipendenza dalla temperatura ed è utilizzabile esclusivamente nelle trasformazioni adiabatiche.

- **Fluidi barotropici con influenza della temperatura:** qualora non fosse possibile trascurare la temperatura, il fluido si considera ancora barotropico, ma si deve fare uso delle leggi della termodinamica e dell'equazione del trasporto del calore per definire l'incognita temperatura.
- **Fluidi incomprimibili:** la densità di un fluido è costante

$$\rho = \text{costante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0$$

e dall'equazione di continuità ricaviamo la relazione

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Questo accade nei liquidi che sono considerati incompressibili, ed in generale con buona approssimazione la densità viene considerata costante nei moti in aria a bassa velocità, circa 0,3 Mach.

Nota 3.1.1. Si ricordi che il numero di Mach (Ma) è il rapporto della velocità di un corpo in un fluido e la velocità del suono nel fluido: Questo numero permette di stabilire l'importanza degli effetti di comprimibilità di un fluido. Come abbiamo già detto, se il numero di Mach è minore di 0,3 l'errore che si commette considerando la densità costante è trascurabile.

Possiamo ricapitolare che il problema di un fluido perfetto in movimento è determinato attraverso le seguenti relazioni fondamentali:

- l'equazione di moto (3.4) ;
- l'equazione di continuità (3.5);
- la funzione di stato (3.6);
- una relazione di approssimazione del fenomeno fisico.

Il sistema di equazioni che si ottiene è noto con il nome di **equazioni di Eulero** dalle quali, nel caso di fluidi incompressibili, si ottengono le equazioni di Bernoulli.

3.2 Trinomio di Bernoulli

Nel caso in cui la forza di massa sia la gravità e in cui il fluido sia incompressibile introduciamo il trinomio di Bernoulli

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}.$$

Più in generale possiamo scrivere

$$B = \frac{1}{2}v^2 - U + \mathcal{P},$$

dove U è l'energia potenziale delle forze conservative e dove \mathcal{P} è l'energia potenziale delle pressioni, cioè la primitiva della funzione $\frac{1}{\rho(p)}$, ovvero

$$\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho(p)} dp + \mathcal{P}_0 \quad (3.8)$$

dove \mathcal{P}_0 è la costante di integrazione. Si noti che la pressione dipende dal punto e dal tempo, quindi $\mathcal{P}(P, t) = \mathcal{P}(p(P, t))$.

Moti stazionari. Un moto si dice stazionario se la velocità del fluido, pur potendo variare da punto a punto, rimane costante nel tempo in ciascun punto. Il fatto che \mathbf{v} sia localmente costante si traduce in $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$.

Teorema 3.3. *Nei moti stazionari (o permanenti) di un fluido perfetto barotropico, sottoposto a forze conservative, il trinomio di Bernoulli si mantiene costante in ogni punto P del fluido durante il moto.*

Dimostrazione. In caso di forze conservative l'equazione di moto $\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \nabla p$ diventa

$$\mathbf{a} = \nabla(U - \mathcal{P})$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= \nabla(U - \mathcal{P}) \cdot \frac{dP}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{d}{dt} (U - \mathcal{P}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue la costanza di B

$$B = \frac{1}{2} v^2(t) - \mathcal{U}(t) + \mathcal{P}(P(t)) = \text{costante}, \quad \forall t$$

dove $\mathcal{U}(t) = U(P(t))$.

Nel corso della dimostrazione si è tenuto conto che per i fluidi barotropici da (3.8) si ha

$$\nabla \mathcal{P} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho(p)} \nabla p. \quad \square$$

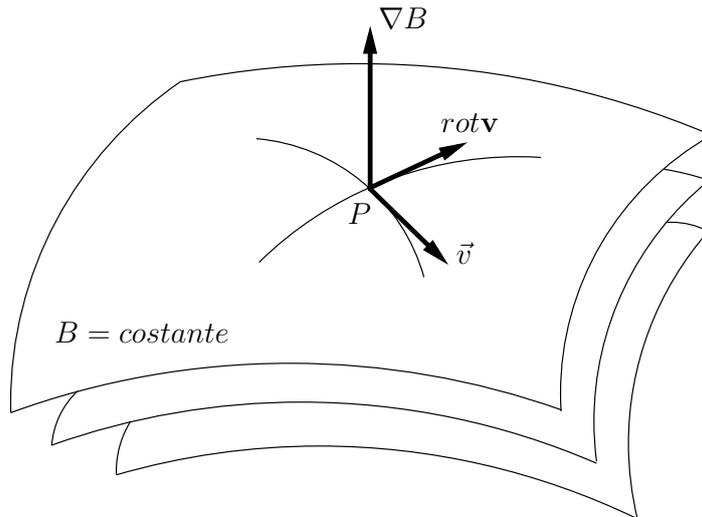


Figura 3.5: Superficie di Bernoulli.

Nota 3.2.1. Il trinomio di Bernoulli rappresenta l'energia totale per unità di massa (energia specifica) del fluido. $\frac{1}{2}v^2$ è l'energia cinetica per unità di massa, $-U$ è l'energia potenziale per unità di massa dovuta alle forze di massa (forze esterne, ad es. forza peso), \mathcal{P} corrisponde all'energia potenziale per unità di massa dovuta alla pressione (forze interne).

A volte il trinomio di Bernoulli, per i moti stazionari, si scrive come costanza della somma della pressione dinamica, della pressione di gravità e della pressione cinetica.

Il lettore dovrebbe essersi accorto che il teorema precedente è stato enunciato seguendo il punto di vista lagrangiano. Passiamo ora alla formulazione euleriana del trinomio di Bernoulli.

Teorema 3.4. (di Bernoulli). *In un moto di un fluido perfetto, barotropico, soggetto a forze di massa conservative, in moto stazionario, le superfici isoenergetiche*

$$B(P) = \text{costante},$$

sono simultaneamente superficie di corrente e di vortice (quindi anche di flusso).

Dimostrazione. Scriviamo l'accelerazione in forma euleriana nell'equazione di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= \nabla (U - \mathcal{P}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) \end{aligned}$$

Nel caso di moti stazionari, cioè $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, l'equazione di Eulero si riduce a

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) = 0,$$

ovvero

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla B,$$

dove

$$B = \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P}.$$

Il ∇B è ortogonale sia a \mathbf{v} che al $\text{rot } \mathbf{v}$ (vedi Figura (3.5)). Le superfici

$$B(P) = \text{costante},$$

caratterizzate dall'essere ortogonali al ∇B , sono insieme superfici di flusso e di vortice, ed anche di corrente perché il moto è stazionario. Si noti che $B(P) = \text{costante}$ è indipendente dal tempo, ma diverso da superficie a superficie. \square

Ricordiamo alcune definizioni. Sia $P \rightarrow \mathbf{v}(P, t) = (v_1, v_2, v_3)$ il campo di velocità. Le linee di flusso sono quelle linee che sono tangenti alla velocità del fluido, esse corrispondono alle curve ottenute integrando $\frac{v_1}{dx_1} = \frac{v_2}{dx_2} = \frac{v_3}{dx_3}$. Per ovvie ragioni fisiche le linee di flusso non si possono incrociare fra loro. La superficie di flusso si ottiene considerando tutte le linee di flusso che passano

per una curva fissata. Se la curva è chiusa la superficie prende il nome di tubo di flusso.

Se il moto è stazionario, cioè \mathbf{v} non dipende esplicitamente dal tempo, allora le linee di flusso non variano nel tempo e prendono il nome di linee di corrente. Analogamente si hanno le superfici di corrente ed i tubi di corrente.

Nota 3.2.2. Proprietà delle linee di corrente:

- (i) per ogni punto Q passa al più una linea di corrente (perché $\mathbf{v}(Q)$ e $\mathbf{a}(Q)$ sono univocamente determinati);
- (ii) tutte le particelle del sistema, che transitano per Q , hanno traiettorie coincidenti con γ_Q (che quindi è come se fosse un binario per tali particelle).

Le linee tangenti al campo vettoriale del $\text{rot } \mathbf{v}$ si chiamano linee di vortice. Analogamente si hanno le superfici di vortice. Quando le curve per cui passano le linee di flusso e quelle di corrente sono chiuse si hanno i tubi di flusso

Proprietà 3.2. *Le linee di flusso di un moto stazionario coincidono con le traiettorie dei punti del sistema.*

Moti irrotazionali

Dal Teorema di Bernoulli (3.4) segue direttamente

Corollario 3.1. *Se $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, ovvero il moto è non vorticoso, allora il trinomio di Bernoulli $B(P)$ è lo stesso in tutti i punti.*

Per il Teorema di Stokes, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ equivale a $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = 0$ per \forall curva γ in \mathbb{R}^3 . Pertanto per i moti irrotazionali non esistono linee di vortice chiuse (dette vortici) su cui $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} \neq 0$, ovvero su cui la circolazione è diversa da zero.

ESEMPIO 3.2.1. Liquido pesante Si consideri un fluido incompressibile e pesante, il trinomio assume la forma

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho},$$

che essendo costante si può scrivere come somma di tre quote

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}, \quad (3.9)$$

dove $\gamma = \rho g$ è il peso specifico. Ogni addendo è dimensionalmente una lunghezza, cioè

- $\frac{v^2}{2g}$ è la **quota cinetica**. La quota cinetica è la quota da cui si deve lasciar cadere un grave perché acquisti la velocità v ;
- z è la **quota effettiva**, in cui si trova il punto ;
- $\frac{p}{\gamma}$ è la **quota piezometrica**. La quota piezometrica è l'altezza di una colonna del fluido che produce sul fondo la pressione p .

Il trinomio nella forma (3.9) è detto trinomio di Bernoulli nella forma degli idraulici.

Riassumendo, nel moto stazionario di un liquido pesante la somma delle tre quote è costante sulle superfici di corrente e di vortice se $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, in ogni punto P se $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.

ESEMPIO 3.2.2. Teorema di Torricelli. Si consideri un recipiente che contiene un liquido, la cui superficie libera si trovi ad altezza h rispetto al fondo del recipiente, dove è praticato un foro da cui fuoriesce il liquido. Il liquido nel recipiente è mantenuto alla stessa altezza facendo attenzione che il moto risulti stazionario e senza vortici. Calcoliamo la velocità di uscita del liquido dal foro.

Sulla superficie libera si ha $B = \frac{p}{\gamma}$, mentre nel punto in cui fuoriesce il liquido si ha $B = \frac{v^2}{2g} - h + \frac{p}{\gamma}$. Quindi utilizzando la costanza del trinomio di Bernoulli (moto stazionario e non vorticoso), si conclude che $v = \sqrt{2gh}$.

ESEMPIO 3.2.3. Tubo di Venturi. Si consideri ancora un fluido in moto stazionario e non vorticoso che si muove in un tubo, come in figura (3.6) La

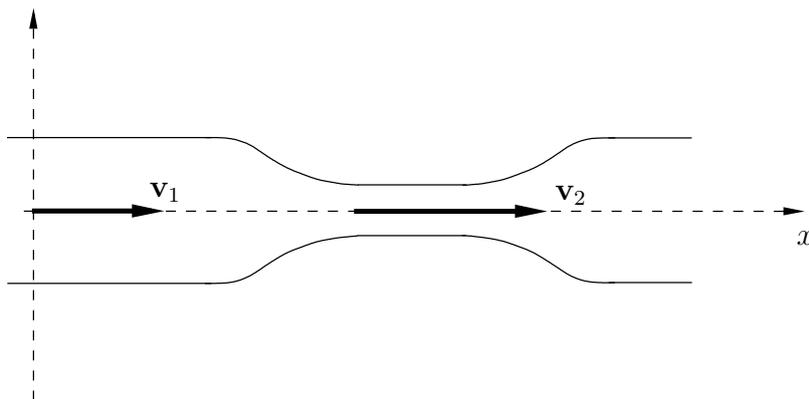


Figura 3.6: Tubo di Venturi.

costanza del flusso attraverso le sezioni del tubo (Legge di Castelli) implica che la velocità sarà più alta nella strozzatura del tubo. Inoltre il trinomio di Bernoulli si mantiene costante e la pressione diminuirà in corrispondenza della stessa strozzatura. Si chiama effetto Venturi la depressione che avviene a valle della strozzatura. È bene osservare che nella strozzatura il moto del fluido dovrà risentire poco di quello che accade nelle regioni di tubo a monte ed a valle, dove le pareti non sono più orizzontali.

Nota 3.2.3. Flussi irrotazionali. Per verificare se un flusso irrotazionale resta tale nel tempo, è necessario avere una legge di variazione per il $\text{rot } \mathbf{v}$. A tal fine calcoliamo il rotore di ogni elemento al primo membro dell'equazione di moto (3.4)

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + g \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0,$$

ovvero tenendo conto della costanza del trinomio di Bernoulli

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

dalle quali si deduce che se il flusso è inizialmente irrotazionale, si mantiene tale durante il moto.

3.3 Il campo delle velocità

Sia $\mathbf{v}(x, t)$ il campo delle velocità nel punto \mathbf{x} del fluido, ricordiamo che abbiamo già introdotto precedentemente il gradiente di velocità

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Sviluppiamo ora in serie fino al 1° ordine nell'intorno del punto \mathbf{x} la velocità, ottenendo

$$v_i(\mathbf{x}') \simeq v_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})(x'_k - x_k), \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

Se decomponiamo il tensore $\nabla \mathbf{v}$, rappresentato dalla matrice (3.10), in parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} + \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T}{2} = \mathbb{D} + \Omega,$$

allora possiamo riscrivere lo sviluppo nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{D}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (3.11)$$

dove le matrici \mathbb{D} ed Ω sono valutate nel punto \mathbf{x} ed operano come al solito con la regola del prodotto righe per colonne.

In particolare vediamo come opera Ω

$$\Omega \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

È noto che ad ogni tensore antisimmetrico si può associare un vettore; nel nostro caso introdotto

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_z$$

si può scrivere

$$\Omega \mathbf{y} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}.$$

Tornando al nostro problema, lo sviluppo al primo ordine (3.11) si scrive come

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbb{D}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (3.12)$$

Definiamo il vettore vorticità

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

e riscriviamo lo sviluppo

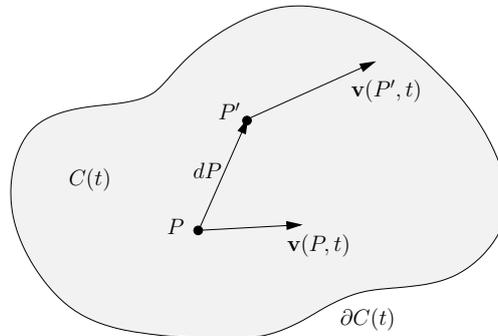
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') \simeq \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{\mathbb{D}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}_{\text{deformazione}}. \quad (3.13)$$

Lo sviluppo al primo ordine si può interpretare come un atto di moto locale dato dalla somma di un atto di moto rigido con velocità di trascinamento $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e di una componente di deformazione.

Il tensore \mathbb{D} è rappresentato da una matrice reale e simmetrica. È ben noto che una tal matrice ammette 3 autovalori reali e 3 autovettori. Nel nuovo riferimento delle direzioni degli autovettori l'intorno del punto \mathbf{x} si accorcia e si allunga nelle direzioni principali; in quelle direzioni l'atto di moto è una deformazione pura.

Si noti che quanto è stato detto si riferisce ad una visione locale del flusso di velocità.

Nota 3.3.1. Per mettere in evidenza il significato del tensore di velocità di deformazione (ovvero della parte simmetrica del gradiente di \mathbf{v}), si possono considerare due punti P e P' vicini del sistema continuo. Scriviamo la relazione fra le velocità dei due punti vicini



$$\mathbf{v}(P', t) = \mathbf{v}(P, t) + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \mathbf{e}_i \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{v}(P, t) + (\nabla \mathbf{v}) dP = \mathbf{v}(P, t) + (\nabla \mathbf{v})(P' - P) \quad (3.15)$$

che possiamo riscrivere come

$$\mathbf{v}(P', t) = \mathbf{v}(P, t) + \Omega(P, t) dP + \mathbb{D}(P, t) dP \quad (3.16)$$

$$= \mathbf{v}(P, t) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P' - P) + \mathbb{D}(P, t) (P' - P). \quad (3.17)$$

3.4 Fluidi viscosi

3.4.1 Critica dei fluidi perfetti

Il modello dei fluidi perfetti che si basa sulle equazioni di Eulero è un modello detto di approssimazione di ordine zero. Nel modello di Eulero non si tengono conto degli sforzi di taglio e ciò ne limita l'applicazione a problemi in cui sono presenti pareti ed ostacoli.

Facciamo un esempio.

ESEMPIO 3.4.1. Si consideri un fluido perfetto incomprimibile fra due piani $z = 0$ e $z = H$ e se ne determini il campo di velocità stazionario con $\mathbf{v} = v_x(x, z)\mathbf{e}_x$ ed in presenza della forza peso. Applichiamo l'equazione di Eulero (stazionaria)

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} \right) \quad (3.18)$$

limitandoci alle due componenti x e z . Calcoliamo intanto

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_y \wedge v_x \mathbf{e}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \mathbf{e}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z, \\ \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Sostituendo in (3.18) si ottiene

$$\begin{aligned} -v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_z &= -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x - v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_z + \nabla (U - \mathcal{P}) \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x &= \nabla (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

ovvero nelle due componenti, tenendo conto dell'espressione di \mathcal{P}

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - \mathcal{P}) = \frac{\partial}{\partial z} \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{p}{\rho} = -gz + c(x).$$

Scriviamo anche l'equazione di incomprimibilità $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, che implica

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

e dalla prima equazione di (3.19), si può ricavare $c(x)$;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \implies \frac{dc}{dx} = 0 \implies c = \text{costante}.$$

Quindi il campo di velocità $v_x(z)$ rimane indeterminato. In questo modello l'assenza degli sforzi di taglio non fa influenzare fra loro i piani $z = \text{costante}$.

3.4.2 Fluidi viscosi

Abbiamo visto che la caratteristica fondamentale di un fluido, liquido o gassoso, è che l'azione degli sforzi di taglio causeranno la sua deformazione. Ne segue che in condizioni statiche il fluido è incapace di sostenere sforzi di taglio. Pertanto il tensore degli sforzi deve essere tale che lo sforzo relativo ad un elemento di superficie in un punto del fluido a riposo è proporzionale alla normale, ma indipendente dalla sua direzione. Ricordando il Teorema di Pascal

$$\Phi(P, \mathbf{n}, t) = \mathbb{T}(P, t) \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n}.$$

dove p_0 è la **pressione idrostatica**.

Si può anche scrivere

$$T_{ij} = -p_0 \delta_{ij}$$

che significa che per un fluido a riposo gli sforzi sono di compressione. Con riferimento al tensore \mathbb{T} , la pressione idrostatica è

$$p_0 = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbb{T} = -\frac{1}{3} T_{ii}.$$

La pressione è poi in relazione con la temperatura θ e la densità ρ tramite l'**equazione di stato**

$$F(p_0, \rho, \theta) = 0.$$

Passiamo a studiare i fluidi in moto. In questo caso gli sforzi di taglio non sono zero, e si scrive

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathfrak{S}_{ij}$$

dove

- \mathfrak{S}_{ij} è il tensore degli sforzi viscoso, che è funzione del moto e che è nullo quando il fluido è a riposo;

- p è la pressione termodinamica, che è data dalla stessa relazione per la pressione idrostatica, cioè

$$F(p, \rho, \theta) = 0,$$

nel caso del moto.

Fino ad ora abbiamo considerato fluidi ideali caratterizzati esclusivamente da forze agenti in direzione normale, dove quindi gli sforzi di taglio erano assenti. Prendiamo adesso in considerazione una classe più ampia e generale di fluidi dove, oltre alle forze agenti in direzione normale, siano presenti anche sforzi di taglio, responsabili del trasferimento dei momenti. In generale quando si verificano cambiamenti di velocità entro brevi distanze, gli sforzi di taglio non possono essere trascurati. I fluidi che presentano tali caratteristiche sono detti **fluidi viscosi**.

Ci chiediamo come possiamo caratterizzare un campo di velocità in modo tale che non appaia in quiete in nessun sistema di riferimento, ovvero non devono esserci riferimenti solidali, e la risposta naturale è che dobbiamo cercare un campo che non deve coincidere col campo di velocità di un moto rigido. Il nuovo tensore degli sforzi deve contenere il tensore dei fluidi perfetti $-p(P, t)\mathbb{I}$ più un termine che si annulli quando il fluido compie un moto rigido. Infatti dobbiamo escludere il moto rigido se vogliamo introdurre gli scorrimenti fra gli strati del fluido, in quanto che i moti rigidi impediscono la nascita di attriti. In questa maniera permettiamo i movimenti di scorrimento ed escludiamo quelli rigidi. In componenti dovrà essere

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathfrak{S}_{ij}.$$

Ricordiamo le proprietà che hanno i moti rigidi e teniamo in mente che \mathfrak{S}_{ij} deve dipendere dalle derivate

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Pensiamo al gradiente del campo delle velocità decomposto in parte simmetrica e antisimmetrica.

1. La parte simmetrica $\frac{\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T}{2}$, che abbiamo chiamato tensore di velocità di deformazione, in componenti

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

ha la proprietà che è nulla per un moto rigido. Il nome di deformazione viene proprio dal fatto che per i moti rigidi la deformazione è zero.

2. Inoltre i moti rigidi sono solenoidali dovendosi conservare i volumi e $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$.

Quindi il tensore che caratterizza i fluidi viscosi dovrà avere un termine contenente \mathbb{D} ed uno contenente $\text{div } \mathbf{v}$, che entrambi si annullano per i moti rigidi.

Per un fluido in moto, p non è più uguale a $\frac{1}{3} \text{tr } \mathbb{T}$ bensì

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{T} - \mathfrak{S})$$

cosicché per un fluido in quiete $\mathfrak{S}_{ii} = 0$ e di conseguenza $p = p_0$.

Vediamo le proprietà che deve avere il **tensore degli sforzi viscoso**. Esse devono essere due

- \mathfrak{S} deve annullarsi per i fluidi in quiete;
- \mathfrak{S}_{ij} deve essere funzione del **tensore di deformazione**, ovvero

$$\mathfrak{S}_{ij} = \mathfrak{S}_{ij}(\mathbb{D}).$$

A seconda del tipo di questo legame, distinguiamo due tipi di fluidi viscosi: **fluidi newtoniani** e **fluidi stokesiani**.

- Un fluido viscoso si dice **newtoniano** se \mathfrak{S}_{ij} è **funzione lineare** di \mathbb{D}_{ij}

$$\mathfrak{S}_{ij} = \mathbb{K}_{ijpq} \mathbb{D}_{pq} \quad (3.20)$$

dove i coefficienti \mathbb{K}_{ijpq} riflettono le proprietà del fluido

- Un fluido viscoso si dice **stokesiano** se \mathfrak{S}_{ij} è **funzione nonlineare** di \mathbb{D}_{ij} .

Tutti i fluidi, come si può verificare con gli esperimenti e come ciò si riflette nella definizione, sono isotropi. Di conseguenza il tensore \mathbb{K}_{ijpq} è **isotropo**.

Quindi noi abbiamo i tensori \mathfrak{S}_{ij} e \mathbb{D}_{pq} simmetrici e \mathbb{K}_{ijpq} che è isotropo, per cui gli 81 coefficienti del tensore isotropo \mathbb{K}_{ijpq} si riducono solo a due.

Introduciamo due nuovi scalari che caratterizzano le proprietà viscosose del fluido: i coefficienti di viscosità

$$\lambda^* \quad \text{e} \quad \mu^*$$

e riscriviamo (3.20) nella seguente forma

$$\mathfrak{S}_{ij} = \lambda^* \delta_{ij} \mathbb{D}_{kk} + 2\mu^* \mathbb{D}_{ij}. \quad (3.21)$$

Vediamo come i coefficienti di viscosità λ^* e μ^* caratterizzano le proprietà viscosose del fluido.

Se il fluido è **newtoniano** lo sforzo normale medio è dato da

$$\frac{1}{3} \mathbb{T}_{ii} = \frac{\mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{22} + \mathbb{T}_{33}}{3}$$

dove

$$\mathbb{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}\mathbb{D}_{kk} + 2\mu^*\mathbb{D}_{ij} \quad (3.22)$$

così

$$\frac{1}{3}\mathbb{T}_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)\mathbb{D}_{ii}$$

dove

$$k^* = \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*) \quad (3.23)$$

è il **coefficiente di viscosità di volume** (o viscosità dilatazionale o seconda viscosità, bulk viscosity). Si noti che questo coefficiente è importante per i fluidi comprimibili, ma è trascurabile per gli incompressibili.

La condizione

$$k^* = \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*) = 0$$

che vale per

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$$

è conosciuta come **condizione di Stokes**. In questo caso per un fluido in quiete

$$p = -\frac{1}{3}\mathbb{T}_{ii}$$

ovvero $\frac{1}{3}$ della traccia del tensore di Cauchy \mathbb{T}_{ij} all'equilibrio è la **pressione** (col segno meno).

3.5 Equazioni di moto per un fluido viscoso

Ripartiamo dall'equazione cardinale della dinamica

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \rho\mathbf{f}_m + \operatorname{div}\mathbb{T} \quad (3.24)$$

e vediamo quali sono le equazioni e le incognite del nostro problema:

- $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$ **Eq. di continuità**
- $\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \rho\mathbf{f}_m + \operatorname{div}\mathbb{T},$ **Eq. di moto (di Eulero)**
- $\mathbb{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}\mathbb{D}_{kk} + 2\mu^*\mathbb{D}_{ij},$ **Eq. costitutiva**
- $p = p(\rho),$ **Eq. di stato**
- $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$ **Tensore di velocità di deformazione.**

Le equazioni in totale sono 17 equazioni scalari nelle incognite \mathbb{T}_{ij} , ρ , v_i , \mathbb{D}_{ij} , e p . Se inseriamo l'equazione costitutiva nell'equazione di Eulero, possiamo formulare le equazioni precedenti in una forma compatta

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div}(-p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \mathbb{D}_{kk} + 2\mu^* \mathbb{D}_{ij}), \quad (3.25)$$

$$\rho \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \operatorname{div}(p \delta_{ij} - \lambda^* \delta_{ij} \mathbb{D}_{kk} - 2\mu^* \mathbb{D}_{ij}), \quad (3.26)$$

$$\rho \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla p - \lambda^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - 2\mu^* \nabla \cdot \mathbb{D}, \quad (3.27)$$

dove si è tenuto conto che

$$\operatorname{div} \delta_{ij} = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbb{D}_{ij} = \nabla \cdot \mathbb{D} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \right) = \frac{1}{2} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{v}) \end{aligned}$$

dove

$$\Delta \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{v}$$

è il laplaciano di \mathbf{v} .

Otteniamo

$$\begin{aligned} \rho \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \nabla p - \lambda^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu^* \Delta \mathbf{v}, \\ \rho \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \nabla p - (\lambda^* + \mu^*) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu^* \Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

in componenti

$$\rho \left(f_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \mu^* \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}.$$

3.5.1 Equazioni di Navier-Stokes

Ricapitolando si ha il sistema costituito dall'equazione di continuità, dall'equazione di moto e dall'equazione di stato

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \rho \left(f_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \mu^* \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \\ p = p(\rho). \end{cases}$$

È un sistema non lineare nelle cinque incognite \mathbf{v} , ρ e p .

Se vale la condizione di Stokes

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*,$$

che corrisponde a richiedere, per un fluido newtoniano a riposo, che lo sforzo normale medio sia uguale alla pressione (col segno meno), l'equazione prende la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{3} \mu^* [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 3 \Delta \mathbf{v}],$$

A tali equazioni occorre affiancare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. Le condizioni sul bordo di una superficie fissata richiedono che sia la componente normale che quella tangenziale si annullino a causa dell'effetto "boundary layer" del fluido viscoso.

Queste considerazioni qui sopra valgono per flussi laminari, perché per fluidi turbolenti occorre tenere conto di più altri aspetti.

3.5.2 Fluidi particolari

Fluidi barotropici

Un fluido si dice **barotropico** se $p = p(\rho)$ non dipende dalla temperatura.

In particolare avremo cambiamenti isotermi quando la temperatura si mantiene costante. Avremo cambiamenti adiabatici quando nessuna quantità di calore non lascia e non entra nel fluido.

Fluidi incomprimibili

Se la densità del fluido è **costante**, l'equazione di stato diventa $\rho = \rho_0 =$ costante, che caratterizza i fluidi **incomprimibili**. Allora dall'equazione di continuità $\dot{\rho} = 0$, si ha $\text{div } \mathbf{v} = 0$ per i fluidi incomprimibili. Dal punto di vista fisico, l'incomprimibilità significa che nel fluido non c'è variazione né di densità, né di volume, quando è soggetto ad un cambiamento di pressione.

Per i fluidi incomprimibili, le equazioni di Navier-Stokes diventano

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu^* \Delta \mathbf{v}.$$

Per acqua e olio valgono queste equazioni. Invece la maggior parte dei gas sono comprimibili.

Quindi per i fluidi newtoniani soggetti alla gravità avremo il seguente sistema

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \mu^* \Delta \mathbf{v}). \end{cases} \quad (3.29)$$

Per la risoluzione del sistema è necessario imporre un'ulteriore condizione: oltre ad assumere $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, situazione in cui il flusso non attraversa il bordo ma si muove solo tangenzialmente ad esso, aggiungiamo la condizione che sulle pareti del solido la velocità tangenziale sia nulla, ossia la condizione di non scivolamento

$$\mathbf{v} = 0.$$

Fluidi inviscidi

Abbiamo già incontrato in precedenza questo tipo di fluidi.

Un fluido che non può sostenere sforzi di taglio (anche) quando è in moto è chiamato **inviscido**, o anche **fluido perfetto**. Chiaramente, se i coefficienti λ^* e μ^* sono zero in \mathbb{T}_{ij} , allora l'equazione descrive un fluido perfetto e le equazioni di Navier-Stokes si riducono a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p,$$

che abbiamo già incontrato col nome di **equazioni di Eulero**.

Un gas **ideale** è un fluido perfetto che obbedisce alla legge di gas

$$p = \rho R \theta$$

dove R è una costante che dipende dal gas in esame. Si può concludere osservando che tutti i fluidi reali sono più o meno comprimibili e viscosi.

3.6 Moto di Poiseuille.

ESEMPIO 3.6.1. Moto di Poiseuille. Supponiamo di avere due piani infiniti paralleli con un fluido che scorre al loro interno con velocità lungo un'unica direzione. Questo moto è il cosiddetto moto di Poiseuille.

Sia il fluido viscoso, pesante ed incomprimibile, in moto stazionario in una regione di lunghezza L ed altezza H con i due piani paralleli a quota $y = 0$ e $y = H$. Il fluido a quota $y = 0$ ha una pressione iniziale p_{in} nel punto di ascissa $x = 0$ e una pressione finale p_{out} nel punto di ascissa $x = L$.

Trattiamo il problema in due dimensioni considerando l'accelerazione di gravità \mathbf{g} secondo l'asse \mathbf{e}_y . Il campo è unidimensionale, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\mathbf{v}(x, y) = v_x(x, y)\mathbf{e}_x$$

nell'ipotesi di conoscere i valori della pressione agli estremi della regione.

Essendo il moto incomprimibile e stazionario, deve essere $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, se la soluzione esiste, essendo la velocità lungo un'unica direzione, allora questa soluzione deve essere costante lungo la direzione x , infatti

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \implies \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \implies v_x = v_x(y). \quad (3.30)$$

L'equazione di moto di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -g \mathbf{e}_y + \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \mu^* \Delta \mathbf{v}) .$$

tenendo conto che $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = v_x(y) \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{e}_y = 0$, si riduce a (indichiamo μ^* con η come si fa in diversi testi)

$$\nabla \left(gy + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\eta \Delta v) , \quad (3.31)$$

con le condizioni al contorno $v(0) = v(H) = 0$, che corrisponde ad un sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} , \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(gy + \frac{p}{\rho} \right) = 0 , \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \end{cases} \quad (3.32)$$

Dalle due ultime due equazioni (dalla seconda in realtà) si ottiene subito

$$p = -\rho gy + c(x) , \quad (3.33)$$

con $c(x)$ funzione incognita. La pressione è funzione lineare della quota come nel caso statico. Sostituiamo ora il valore della pressione nella componente di (3.32) secondo la direzione \mathbf{e}_x , ottenendo

$$\frac{dc}{dx}(x) = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}(y) = G ,$$

pertanto $\frac{dc}{dx}$ è una funzione costante, che indichiamo con G , e $c(x)$ è una funzione lineare affine. Quindi la legge con cui varia la pressione diventa

$$p = -\rho gy + Gx + b ,$$

con G e b costanti da determinarsi. Imponendo, per $y = 0$, in $x = 0$ e $x = L$ i valori di pressione p_{in} e p_{out} rispettivamente, si ottiene $b = p_{in}$ e $G = \frac{\Delta p}{L}$ dove $\Delta p = p_{out} - p_{in}$. L'andamento della velocità è dato dall'equazione

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2}(y) = \frac{\Delta p}{\eta L} .$$

Integrando

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{y^2}{2} + Ay + B ,$$

imponendo $v_x(H) = v_x(0) = 0$ si trova

$$B = 0 , \quad A = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{H}{2} ,$$

che implica

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L}(y^2 - Hy).$$

In conclusione il profilo di velocità fra i due piani paralleli è parabolico. Il modulo dello sforzo di taglio è $\eta|v'_x(y)| = G \left|y - \frac{H}{2}\right|$, ovvero è nullo al centro fra i due piani e massimo alle pareti.

ESEMPIO 3.6.2. Studiamo il modello precedente nel caso si trascuri l'accelerazione di gravità, nel caso di un canale lungo L e limitato anch'esso da due piani distanti $2H$. Siano p_{in} e p_{out} le pressioni in ingresso ed uscita e sia la differenza di pressione $\Delta p = p_{out} - p_{in} < 0$.

Con le stesse notazioni, possiamo scrivere il sistema di quattro equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

dove la prima equazione discende dall'equazione di continuità. Dalle ultime due equazioni si ricava che $p = p(x)$, ed infine dalla seconda si ottiene l'equazione risultante

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = G = \text{costante},$$

poiché le due funzioni indipendenti di diverse variabili indipendenti. Dalla prima $\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \text{costante}\right)$ si ricava

$$p(x) = \frac{\Delta p}{L}x + p_{in}$$

Nella seconda equazione $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y) = \text{costante} = \frac{\Delta p}{\eta L}\right)$ aggiungiamole condizioni di non slittamento sulla parete (velocità nulla sulle pareti)

$$v_x(-H) = v_x(H) = 0.$$

Effettuata l'integrazione si ha

$$v_x(y) = v_x(H) + \frac{\Delta p}{\eta L} \left(\frac{H^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right),$$

e per la condizione di non slittamento si ottiene il profilo parabolico della velocità

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (H^2 - y^2).$$

Vediamo adesso, relativamente a questo esempio, come è possibile adimensionalizzare questo tipo di equazioni.

Scegliendo una lunghezza caratteristica L ed una velocità caratteristica V , adimensionalizziamo le grandezze \mathbf{v} , \mathbf{x} , t

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^a &= \frac{\mathbf{v}}{V} , & P^a &= \frac{p}{\rho V^2} \\ \mathbf{x}^a &= \frac{\mathbf{x}}{L} , & t^a &= \frac{tV}{L} , & U^a &= \frac{U}{\rho V^2} \end{aligned}$$

ottenendo così l'equazione di Navier-Stokes per fluidi newtoniani adimensionalizzata

$$\frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + \mathbf{v}^a \cdot \nabla \mathbf{v}^a = -\nabla(p^a - U^a) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}^a \quad (3.35)$$

dove U è il potenziale di \mathbf{g} , mentre $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ è un numero adimensionale detto numero di Reynolds che fisicamente rappresenta il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosse.

La soluzione della (3.35) risulta valida se il numero di Reynolds assume valori caratteristici dei flussi in regime laminare.

ESEMPIO 3.6.3. Moto di Poiseuille in geometria cilindrica. Si consideri il moto di un fluido viscoso che scorre di moto stazionario all'interno di un tubo cilindrico di raggio R , soggetto a forze di massa trascurabili. Per ragioni di simmetria si può supporre che la velocità sia diretta lungo l'asse del cilindro e che dipenda unicamente dalla distanza r dall'asse:

$$\mathbf{v}(P) = v_x(r) \mathbf{e}_x$$

$$p(P) = p(x) ,$$

con $0 \leq r = \sqrt{y^2 + z^2} \leq R$ e $-\infty < x < +\infty$ velocità lungo un'unica direzione. Questo moto è il cosiddetto moto di Poiseuille in geometria cilindrica. Inoltre c'è da aspettarsi che il fluido aderisca alla parete del tubo e quindi la condizione di aderenza si scrive nella forma

$$v_x(r)|_{r=R} = 0 ,$$

e che per ragioni di simmetria la velocità sia massima lungo l'asse del tubo, ovvero

$$\frac{d}{dr} v_x(r)|_{r=0} = 0 .$$

Il moto del fluido attraverso il tubo è stazionario ed incomprimibile

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 .$$

Tenendo conto che

$$\nabla p = \frac{dp}{dx} \mathbf{e}_x$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} = \Delta(v_x(r) \mathbf{e}_x) &= \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x = \left(\frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} + \frac{d^2 v_x}{dr^2} \right) \mathbf{e}_x \\ - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.7 Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes

Vediamo alcune proprietà di scalatura delle equazioni di Navier-Stokes introducendo dei parametri adimensionali.

Consideriamo un fluido incomprimibile e supponiamo un dominio rettangolare di lunghezza L ed altezza H per il flusso, con moto in direzione della verticale discendente x in presenza dell'accelerazione di gravità \mathbf{g} .

L'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes, essendo $\mathbf{v} = (u_x, u_y)$ sono

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \rho g, \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

siamo quindi in presenza di

1. tre variabili indipendenti x, y, t ;
2. tre variabili dipendenti u_x, u_y, p ;
3. cinque parametri L, H, ρ, η, g .

Altri parametri sono poi introdotti attraverso le condizioni iniziali e le condizioni sul bordo. Assumiamo inoltre che la velocità media all'ingresso del dominio sia uguale a V .

I termini che compaiono nelle equazioni (3.37) possono essere scalati. Se ad esempio L ed H sono dello stesso ordine di grandezza, possiamo scegliere una o l'altra per scalare le variabili x e y

$$x^a = \frac{x}{L}, \quad y^a = \frac{y}{L}.$$

La velocità può essere invece scalata attraverso la velocità caratteristica del fluido V

$$u_x^a = \frac{u_x}{V}, \quad u_y^a = \frac{u_y}{V}.$$

A questo punto dobbiamo trovare due quantità caratteristiche per adimensionalizzare t e p . Il tempo può essere scalato attraverso $\frac{L}{V}$ oppure $\frac{L^2}{\nu}$, con

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ coefficiente di viscosità cinematica, mentre per la pressione p si possono utilizzare i fattori $\frac{\eta V}{L}$ o ρV^2 .

La scelta tra i parametri di scalatura è guidata essenzialmente dalla fisica del flusso: ad esempio per la variabile tempo, è opportuno utilizzare $\frac{L}{V}$ quando risulta dominante l'effetto convettivo del flusso; se invece è prevalente l'effetto della diffusione rispetto alla vorticità, è meglio utilizzare $\frac{L^2}{\nu}$.

Per i fluidi viscosi sceglieremo $\frac{\eta V}{L}$ per adimensionalizzare la pressione, dato che il moto è dovuto in gran parte alla pressione e ai gradienti dello sforzo di taglio

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

pertanto la pressione può essere vista come uno sforzo viscoso, misurato in unità di $\frac{\eta V}{L}$.

Per i fluidi non viscosi questo tipo di scalatura non è appropriato; i flussi infatti sono guidati sia dal gradiente di pressione che dall'inerzia, in accordo con le equazioni di Eulero

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p$$

Da tenere presente che solo una scelta oculata delle scalature conduce a risultati interessanti.

Procediamo effettivamente al processo di adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, adottando i seguenti fattori di scala

$$t^a = \frac{t}{L/V}, \quad p^a = \frac{p}{\eta V/L}.$$

Sostituendo questi fattori nelle equazioni di Navier-Stokes (3.37), si ottengono le **equazioni adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} \frac{\rho V L}{\eta} \left(\frac{\partial u_x^a}{\partial t} + u_x^a \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + u_y^a \frac{\partial u_x^a}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p^a}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_x^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^a}{\partial y^2} \right) + \frac{\rho g L^2}{\eta V} \\ \frac{\rho V L}{\eta} \left(\frac{\partial u_y^a}{\partial t} + u_x^a \frac{\partial u_y^a}{\partial x} + u_y^a \frac{\partial u_y^a}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p^a}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u_y^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y^a}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Il primo gruppo adimensionale è detto **Numero di Reynolds**

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

dato dal rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

Il secondo gruppo adimensionale è chiamato **Numero di Stokes**

$$St = \frac{\rho g L^2}{\eta V}$$

che rappresenta il rapporto tra le forze di gravità e le forze viscosse.

Riscriviamo dunque le **equazioni di Navier-Stokes adimensionalizzate**

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + St \\ Re \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Introduciamo un altro numero adimensionale, l'**aspect ratio**

$$\epsilon = \frac{H}{L},$$

dipendente solo dalla geometria del problema e per questo utilizzato come fattore di scala per prove di laboratorio.

Attraverso le condizioni al bordo ed iniziali, le equazioni adimensionali appena introdotte forniscono la seguente dipendenza funzionale

$$\begin{aligned} p^a &= p^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon), \\ u^a &= u^a(x^a, y^a, t^a, Re, St, \epsilon). \end{aligned}$$

Vediamo altri numeri adimensionali di importanza significativa nella meccanica dei fluidi.

Il **Numero di Weber**, rapporto tra le forze di inerzia e le forze di tensione superficiale

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma},$$

dove σ è la tensione superficiale.

Il **Numero di capillarità**, rapporto tra le forze di viscosse e la tensione superficiale o forza capillare.

$$Ca = \frac{\eta V}{\sigma}.$$

Il **Numero di Froude**, rapporto tra le forze di inerzia e quelle di gravità.

$$Fr = \frac{V^2}{\sqrt{gL}}.$$

Il **Numero di Eulero**, rapporto tra le forze di pressione e le forze viscosse.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}.$$

Sono valide inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} We &= Re \ Ca \\ Fr &= Re \ St. \end{aligned}$$

3.8 L'approssimazione di strato limite

Quando un fluido in moto uniforme incontra un corpo, si può individuare una zona intorno al corpo nella quale il fluido è decelerato per attrito, fino a raggiungere velocità nulla sul bordo del corpo. Questa regione in genere risulta sottile e limitata ed è caratterizzata dal bilanciamento dei termini convettivo e diffusivo. Il termine $\nu \Delta \mathbf{v}$ può essere trascurato lontano dall'ostacolo, mentre invece all'interno di questa regione il termine convettivo viene bilanciato da questo termine diffusivo.

La presenza e le caratteristiche di questa regione dipendono dalla viscosità del fluido. In prossimità di un ostacolo gli attriti sono molto elevati e dobbiamo tenere conto della forte viscosità.

La viscosità nel moto dei fluidi è l'analogo dell'attrito nel moto dei solidi. La viscosità caratterizza il fenomeno che crea delle forze tangenziali in seno al fluido che si oppongono al mutuo scorrimento degli strati del fluido, dissipando energia meccanica. Si esprime tramite il coefficiente di viscosità cinematica ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

oppure tramite il coefficiente di viscosità dinamica μ , pari al coefficiente di viscosità cinematica per la densità. Ricordiamo che la dimensione di ν è $[\nu] = m^2/sec$, mentre $[\mu] = Kg/m sec$

La viscosità è caratterizzata dal numero di Reynolds Re , pari all'inverso di ν , in forma adimensionale

$$Re = \frac{v_c L}{\nu} = \frac{\rho v_c L}{\mu},$$

dove L è una lunghezza caratteristica e v_c è una velocità caratteristica del fluido lontano dall'ostacolo (quindi non nella regione in esame).

Come abbiamo detto, nell'equazione di Navier-Stokes, il termine viscoso è dato da $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}$. Quando la turbolenza è alta (Re grande) ci si può domandare se sia lecito trascurare il termine $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}$, ed avere quindi l'equazione di Eulero. Ricapitolando nella zona viscosa intorno ad un ostacolo non è possibile trascurare tale termine, lontano dall'ostacolo invece sì.

La regione intorno all'ostacolo viene detta **strato limite**. Se indichiamo con δ lo spessore di tale regione, δ diminuisce al crescere del numero di Reynolds Re , fino ad annullarsi per $Re \rightarrow \infty$, ecco perché si chiama strato limite.

Con la scelta delle grandezze caratteristiche da noi fatta, si può vedere che

- il termine convettivo è di ordine $\frac{\rho v_c^2}{L}$;
- il termine diffusivo è di ordine $\eta \frac{v_c}{\delta^2}$,

e per il loro bilanciamento deve essere

$$\frac{\delta}{L} = Re^{-\frac{1}{2}}$$

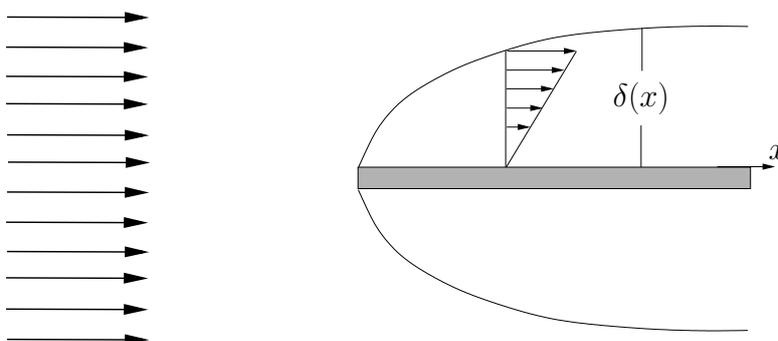
ovvero $\delta^2 = \frac{L^2}{Re} \rightarrow 0$ per $Re \rightarrow \infty$.

Riscriviamo l'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (3.38)$$

Questo problema per $Re \rightarrow \infty$ è un problema di **perturbazione singolare**. Il termine $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}$ è il termine di perturbazione che contiene le derivate seconde (di ordine massimo).

Supponiamo che l'ostacolo sia una lastra piana posta nella direzione parallela alla corrente. Non è in genere nota la soluzione del problema completo.



Mentre è possibile ottenere una **soluzione approssimata**, utilizzando la natura singolare della perturbazione. La procedura viene introdotta in un esempio campione per dare un'idea di come si approssimino i problemi caratterizzati da equazioni singolari, dove le derivate massime hanno davanti coefficienti piccoli. Questo tipo di analisi va naturalmente fatta sulle equazioni in forma adimensionale.

ESEMPIO 3.8.1. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} + (1 + 2\varepsilon) \frac{dv}{dx} + 2v = 0, \\ v(0) = 0, \\ v(1) = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Innanzitutto osserviamo che per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'equazione si riduce a

$$\frac{dv}{dx} + 2v = 0$$

che ha la soluzione, che soddisfa $v(1) = 1$,

$$v(x) = e^{-2(x-1)}. \quad (3.40)$$

Questa soluzione soddisfa la condizione per $x = 1$, ma non soddisfa la condizione $v(0) = 0$, perché $v(0) = e^2$. Questa soluzione è tuttavia utile, perché per x lontani da $x = 0$, gli effetti della condizione al contorno $v(0) = 0$ si faranno sentire sempre meno e questa soluzione può essere una buona approssimazione della soluzione vera, almeno lontano da $x = 0$.

La soluzione (3.40) è detta **soluzione esterna** (outer solution).

Ora cerchiamo una seconda soluzione che sia una buona approssimazione, invece, vicino a $x = 0$. Queste due soluzioni messe insieme opportunamente potrebbero essere una buona approssimazione della soluzione esatta. Si noti che con questa procedura non si ottiene la soluzione esatta, che in genere non è facilmente calcolabile, anche se in questo esempio è possibile calcolarla precisamente.

La tecnica per trovare una soluzione vicina allo zero consiste nel dilatare l'intorno dello zero, con una nuova variabile. Introduciamo la nuova variabile

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon},$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$. Chiamiamo u la funzione incognita della nuova variabile

$$v(x) = v(\varepsilon\xi) = u(\xi),$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}v(x) &= \frac{d^2}{dx^2}u(\xi) = \frac{d}{dx} \left(\frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2u}{d\xi^2}, \\ \frac{d}{dx}v(x) &= \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{du}{d\xi}. \end{aligned}$$

Sostituendo in (3.39)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2u}{d\xi^2} + (1 + 2\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \frac{du}{d\xi} + 2u &= 0, \\ \frac{d^2u}{d\xi^2} + (1 + 2\varepsilon) \frac{du}{d\xi} + 2\varepsilon u &= 0. \end{aligned}$$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} = 0$$

alla quale aggiungiamo la condizione al contorno in $x = 0$

$$u(0) = 0, \text{ corrispondente a } v(0) = 0.$$

Integrando troviamo la soluzione **interna** (inner solution):

$$u(\xi) = A(1 - e^{-\xi}). \quad (3.41)$$

Per trovare la soluzione esterna abbiamo preso $\varepsilon \sim 0$, quindi $\xi \rightarrow +\infty$. Prendiamo dunque la soluzione **interna** e facciamone il limite per $\xi \rightarrow +\infty$, ponendolo uguale al limite per $x \rightarrow 0$ della soluzione **esterna**. In questo modo si riallacciano le due soluzioni, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = e^2 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi),$$

ricavando $A = e^2$. Quindi la soluzione **interna** diventa

$$u(\xi) = e^2(1 - e^{-\xi}).$$

Ora combiniamo le due soluzioni, e poiché la somma tende a e^2 per $x \rightarrow 0$, alla combinazione dobbiamo togliere e^2

$$v(x) = e^{-2(x-1)} + e^2 \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) - e^2.$$

Questa è la soluzione approssimata, che si avvicina a quella esatta. In figura si

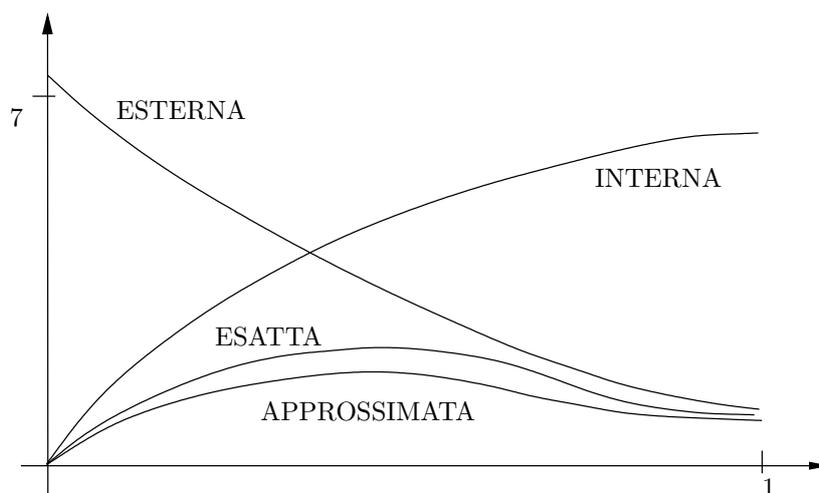


Figura 3.7: Approssimazione della soluzione

vede l'andamento delle soluzioni interna ed esterna, delle soluzioni approssimata ed esatta. In questo problema l'equazione si può risolvere esattamente, anche se in genere ciò non è possibile. La soluzione esatta è

$$v(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-2} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Si osserva che la famiglia delle soluzioni esatte converge uniformemente alla soluzione del problema esterno escludendo $x = 0$, mentre converge uniformemente alla soluzione del problema interno nell'intorno di $x = 0$.

3.9 L'equazione dello strato limite

Quando non siamo in grado di risolvere le equazioni di Navier-Stokes in un mezzo in cui sia presente un ostacolo, allora è conveniente ricavare una soluzione semplificata vicino all'ostacolo.

Il metodo si basa sul dilatare le coordinate nell'intorno dell'ostacolo e trovare l'equazione del campo delle velocità nei pressi dell'ostacolo, ovvero trovare l'equazione dello **strato limite**.

Si consideri un flusso bidimensionale in regime turbolento ($Re \gg 1$) in un mezzo in cui sia immerso una lastra piana di lunghezza L . Se lo strato limite è

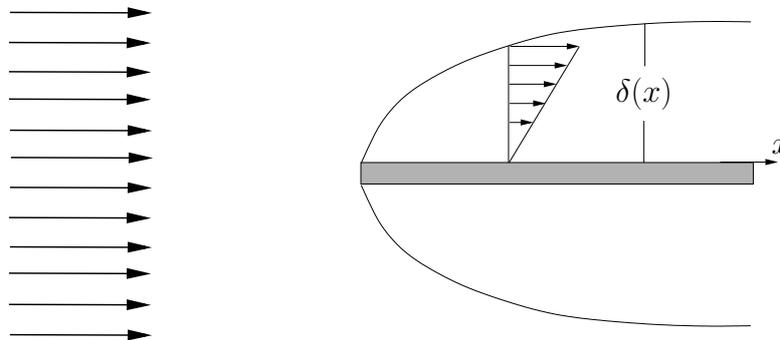


Figura 3.8

alto $\delta(x)$ al variare dell'ascissa x (vedi figura), la lunghezza della lastra deve essere $L \gg \delta(x)$. Indichiamo con

$$\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$$

il campo di velocità (bidimensionale). L'equazione di moto in regime stazionario, trascurando le forze di massa, è in forma dimensionale

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}.$$

Scriviamo l'equazione per la componente $u(x, y)$ della velocità in coordinate (x, y) lungo l'asse x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.42)$$

dove ν è il coefficiente di viscosità. Operiamo ora dei cambiamenti di variabile:

$$\begin{aligned} u &= U u', & x &= L x', \\ v &= V v', & y &= \delta y', \\ p &= \rho U^2 p', & t &= \frac{L}{U} t'. \end{aligned}$$

dove U e V sono le velocità medie di riferimento lungo x e lungo y . Al fine di cambiare le coordinate in (3.42), calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= U \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{dx'}{dx} = \frac{U}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \frac{dx'}{dx} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{dy'}{dy} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial u'}{\partial y'}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dy} = \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho U^2 \frac{\partial p'}{\partial x'} \frac{dx'}{dx} = \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'},\end{aligned}$$

Sostituiamo in (3.42)

$$\begin{aligned}U u' \frac{U}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + V v' \frac{U}{\delta} \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} \frac{\rho U^2}{L} + \nu \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \nu \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{VL}{\delta U} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L\nu}{U\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}.\end{aligned}$$

Scriviamo anche l'equazione di continuità ($\rho = \text{costante} \implies \text{div } \mathbf{v} = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{U}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0.\end{aligned}\tag{3.43}$$

In (3.43) i coefficienti devono essere comparabili, ovvero

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \implies V \sim \frac{U\delta}{L}.$$

Tenendo conto di ciò nell'equazione di Navier-Stokes si ottiene

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L\nu}{U\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}.\tag{3.44}$$

Ora che abbiamo scritto l'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale, è possibile studiare i vari termini e confrontarne i valori. I termini predominanti nelle equazione di Navier-Stokes, che sono il termine convettivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ (che porta via i vortici) e il termine diffusivo $\Delta \mathbf{u}$ (che crea vortici), devono essere dello stesso ordine. Ne segue da (3.44)

$$\begin{aligned}\frac{\nu L}{U\delta^2} &\sim 1 \\ \delta &\sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} \sim \sqrt{\frac{\nu}{UL}} L^2 \sim \sqrt{\frac{L^2}{Re}}, \quad \text{ricordando } Re = \frac{UL}{\nu}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Il termine $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ ha come coefficiente $\frac{\nu}{UL}$ che non può essere di ordine 1 perché L al denominatore è $\gg 1$. Tale termine è molto piccolo e può essere trascurato e non deve rispettare nessuna condizione al bordo.

A questo punto occorre che si verifichi la condizione di non slittamento sulla lastra ($y = 0$), la quale modificherà la soluzione nella variazione lungo y in quanto a un certo punto dovrà tendere a zero. Ma lungo x non ho nessuna condizione.

Scrivendo ora l'equazione di Navier-Stokes lungo y , eseguendo l'analoga trasformazione di coordinate, si scopre che il termine predominante è $\frac{\partial p'}{\partial y'}$, quindi l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 \implies p' = p'(x').$$

In base a tutte queste considerazioni e tenendo conto di (3.45) si arriva a

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}. \quad (3.46)$$

con le condizioni (velocità nulla all'ostacolo)

$$\begin{aligned} u = v = 0, & \quad \text{in } y = 0, \\ u = u_0, & \quad \text{per } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Limitiamoci al caso in cui non ci siano gradienti di pressione. Per risolvere l'equazione (3.46), introduciamo la funzione di corrente (o di Stokes) $\psi(x, y)$

$$\mathbf{u}(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

e l'equazione (3.46) diventa

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (3.47)$$

L'equazione (3.47) sembra più difficile da risolvere, ma si può usare una trasformazione invariante

$$\psi(x, y) = f(\eta) x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{con } \eta = yx^{-\frac{1}{2}}.$$

Tale trasformazione riconduce l'equazione differenziale alle derivate parziali ad una equazione alle derivate ordinarie, la cui soluzione però è solo una soluzione particolare del problema. L'equazione (3.47) prende la forma

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

con le condizioni al bordo

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f'(+\infty) = u_0 .$$

Questa è una equazione differenziale (ordinaria) del 3° ordine conosciuta come l'equazione di **Blasius** per lo strato limite. Essa può essere risolta numericamente e la soluzione ha l'andamento indicato in figura.

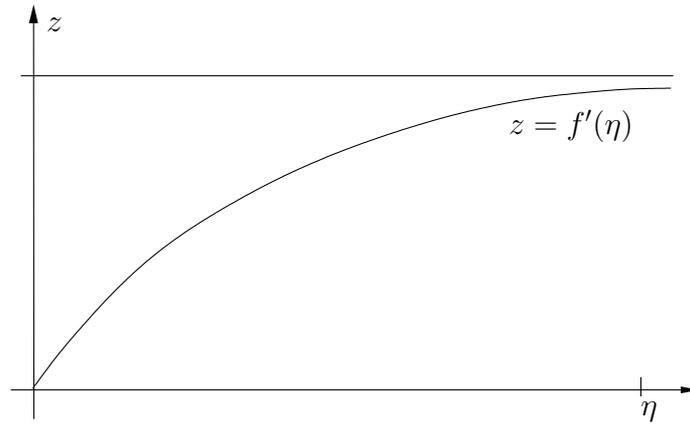


Figura 3.9: $z = f'$ soluzione dell'equazione di Blasius

3.10 Flussi con strato limite

Consideriamo adesso il caso in cui un fluido si trovi a scorrere in prossimità di una superficie solida. Questa tipologia di flusso è conosciuta come flusso con strato limite e viene comunemente descritta in termini di vorticità; la presenza di vorticità permette infatti di distinguere lo strato limite dal flusso potenziale. Lo strato limite può essere pensato come la vorticità che, formatasi in prossimità di una superficie solida, rimane confinata entro uno sviluppo pseudo-parabolico per effetto della convezione.

Nel caso bidimensionale la vorticità è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k , \quad (3.48)$$

e rappresenta una misura della rotazione di un fluido.

La linea di confine tra strato limite e flusso potenziale è definita attraverso "l'orbita delle particelle di vorticità" generate sulla superficie solida e diffuse lungo lo spessore dello strato limite δ_x .

Lungo il bordo dello strato limite, convezione e diffusione assumeranno valori con lo stesso ordine di grandezza, ovvero

$$V \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \cong K^2 \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2}$$

dove K è una costante. Dalla relazione conseguente

$$\frac{V}{x} \cong K^2 \frac{\nu}{\delta^2(x)}$$

con x distanza dal bordo di attacco, ricaviamo l'espressione

$$\delta(x) = K \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

che fornisce un ordine di grandezza stimato per lo spessore $\delta(x)$ dello strato limite.

Capitolo 4

Elasticità lineare

Con il termine materiale elastico lineare si definisce, da un punto di vista puramente qualitativo, un materiale che, se sottoposto a carichi, subisce una deformazione (proporzionale alla tensione di carico) che scompare una volta rimossi i carichi stessi.

Per poter studiare rigorosamente il comportamento dei corpi con la teoria dell'elasticità lineare è necessario introdurre alcuni strumenti matematici e fisici.

4.1 Misure di deformazione

Sia B_0 la configurazione di riferimento del sistema continuo, in seguito ad una generica deformazione sia B_a la configurazione attuale del sistema continuo. A partire da un punto \mathbf{x} in B_0 si consideri un segmento infinitesimo di lunghezza dl lungo una direzione arbitraria. Questo segmento è determinato dai punti \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, con $|d\mathbf{x}| = dl$.

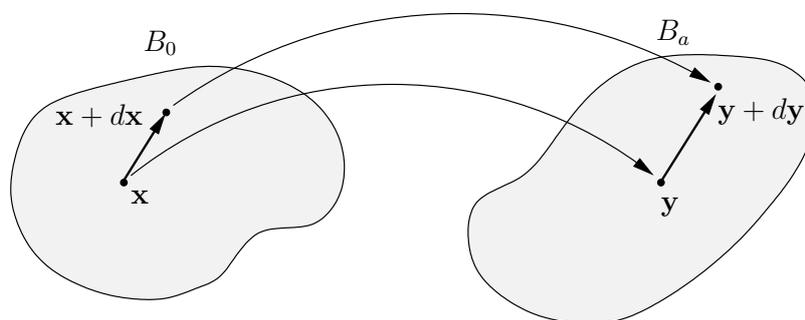


Figura 4.1

All'atto del cambiamento di configurazione da quella di riferimento B_0 a quella attuale B_a , il segmento di lunghezza dl viene trasformato in un segmento

di lunghezza dl_a individuato dai punti \mathbf{y} e $\mathbf{y} + d\mathbf{y}$.

4.1.1 Formula di variazione di lunghezza relativa

Per valutare la deformazione del corpo durante il cambiamento di configurazione, si può ad esempio rilevare l'allungamento relativo da dl a dl_a per un qualsiasi segmento infinitesimo. Per poter effettuare un confronto tra dl e dl_a è necessario comparare i due segmenti in un unico ambiente. Se ad esempio si sceglie la configurazione di riferimento B_0 , come ambiente di paragone, è necessario esprimere dl_a in funzione di $d\mathbf{x}$.

Si considerino i segmenti dl e dl_a , dal teorema di Pitagora si ottiene che

$$dl^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

$$dl_a^2 = d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} \quad (4.2)$$

dove $d\mathbf{x} = dl \mathbf{n}$, con \mathbf{n} versore del segmento dl , e $d\mathbf{y} = dl_a \mathbf{n}_a$, con \mathbf{n}_a versore del segmento dl_a . Se la mappa che correla le due configurazioni B_0 e B_a è

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

allora definiamo il **gradiente di deformazione** \mathbb{F}

$$\mathbb{F} = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Avremo quindi che

$$d\mathbf{y} = \mathbb{F} d\mathbf{x} \quad (4.5)$$

e sostituendo nell'espressione (4.2) si ottiene

$$\begin{aligned} dl_a^2 &= d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} = \mathbb{F} d\mathbf{x} \cdot \mathbb{F} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \mathbb{F}^T \mathbb{F} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbb{C} d\mathbf{x} = \mathbb{C} \cdot d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{x} \\ &= \mathbb{C} \cdot (dl \mathbf{n} \otimes dl \mathbf{n}) = \mathbb{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) dl^2, \end{aligned}$$

dove è stato introdotto il **tensore destro di Cauchy-Green** $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$.

Quindi la variazione relativa delle lunghezze è data da

$$\frac{dl_a^2 - dl^2}{dl^2} = \frac{\mathbb{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) dl^2 - dl^2}{dl^2} = (\mathbb{C} - \mathbb{I})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (4.6)$$

dove \mathbb{I} è il tensore unità.

Nota 4.1.1. In particolare il tensore destro di Cauchy Green è un tensore simmetrico del secondo ordine

$$\mathbb{C}^T = (\mathbb{F}^T \mathbb{F})^T = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \mathbb{C}.$$

Si osserva inoltre, grazie al teorema di decomposizione polare, che \mathbb{C} non tiene conto dei cambiamenti rigidi di assetto

$$\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \mathbb{U}^T \mathbb{R}^T \mathbb{R} \mathbb{U} = \mathbb{U}^T \mathbb{U},$$

dove \mathbb{U} rappresenta le deformazioni ($\mathbb{U} = \mathbb{U}^T$), mentre \mathbb{R} è un tensore ortogonale che considera le rototraslazioni rigide.

4.1.2 Il tensore della deformazione finita

Si definisce il **tensore della deformazione finita** \mathbb{E} il tensore simmetrico

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I}).$$

Possiamo quindi riscrivere la formula di lunghezza relativa (4.6) in questo modo

$$\frac{dl_a^2 - dl^2}{dl^2} = 2\mathbb{E}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (4.7)$$

dove \mathbf{n} è il versore della direzione in cui si sviluppa il segmento dl . Possiamo quindi esprimere \mathbb{E} nei termini del *vettore spostamento* \mathbf{u} , definito come

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}. \quad (4.8)$$

L'espressione del gradiente di \mathbf{u} può essere scritta nel seguente modo

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbb{F} - \mathbb{I} \quad (4.9)$$

Quindi sostituendo $\mathbb{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbb{I}$ si ottiene

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u} + \mathbb{I})^T (\nabla \mathbf{u} + \mathbb{I}) - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}). \quad (4.10)$$

Nota 4.1.2. Il tensore \mathbb{E} rappresenta una misura effettiva di deformazione, dato che in seguito ad un cambiamento rigido di assetto si ottiene $\mathbb{E} = 0$.

Infatti nel caso di isometrie, per le quali $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, risulta $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e conseguentemente $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$ e quindi $\Rightarrow \mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{I}) = 0$.

4.2 Misura delle deformazioni infinitesime

Prendiamo in considerazione il tensore della deformazione finita \mathbb{E}

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}). \quad (4.11)$$

Per una deformazione infinitesima abbiamo che

$$|\nabla \mathbf{u}| \ll 1, \quad (4.12)$$

e quindi in regime di deformazioni infinitesime il termine quadratico $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ della (4.11) può essere trascurato. Definiamo quindi il **tensore delle piccole deformazioni** ε (o misura delle deformazioni infinitesime) come la parte lineare di E

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (4.13)$$

Si osservi che ε coincide con la parte simmetrica del gradiente dello spostamento $\nabla \mathbf{u}$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \text{Sym } \nabla \mathbf{u}. \quad (4.14)$$

La generica componente del tensore ε in un sistema di riferimento locale è quindi data da

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i/j}). \quad (4.15)$$

Si osservi inoltre che in regime di deformazioni infinitesime ed in assenza di spostamenti rigidi finiti, il piazzamento attuale B_a del corpo può essere confuso con quello di riferimento B_0 . Non si farà quindi distinzione tra \mathbf{x} ed \mathbf{y} e potremo scrivere $\mathbf{x} = \varepsilon(\mathbf{x})$.

Riportiamo la matrice simmetrica delle componenti del tensore ε in un sistema di riferimento nell'intorno di un punto generico del corpo

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

dove u, v e w sono le componenti del vettore \mathbf{u} .

Si osserva che

- i termini sulla diagonale principale ε_{ii} rappresentano gli allungamenti o accorciamenti lungo le direzioni coordinate del sistema di riferimento;
- i termini fuori dalla diagonale principale ε_{ij} rappresentano la metà dello scorrimento angolare tra gli assi associati i e j ;
- la somma di due termini qualsiasi sulla diagonale principale è indice della variazione relativa di area nel piano pertinente, ad esempio, $(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ rappresenta la variazione di area nel piano xy ;
- la traccia di ε , cioè $\text{tr } \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, rappresenta la variazione di volume.

Infatti, nel caso di deformazioni finite, la variazione relativa di volume è pari a $\det \mathbb{F} - \mathbb{I}$. Tenendo conto che $\mathbb{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbb{I}$, sviluppando in serie il $\det \mathbb{F}$ intorno ad $\mathbf{u} = 0$, si ottiene

$$\det \mathbb{F} = \mathbb{I} + \text{tr } \varepsilon + o(|\nabla \mathbf{u}|^2), \quad (4.17)$$

quindi in regime di deformazioni infinitesime la variazione di volume è pari a $\text{tr } \varepsilon$.

4.2.1 Direzioni principali e valori principali

Esistono delle direzioni lungo le quali è possibile diagonalizzare la matrice delle componenti del tensore delle piccole deformazioni ε . Ricerchiamo quindi un sistema di riferimento in cui la deformazione sia data solo da allungamenti (o accorciamenti), ovvero un sistema di riferimento principale dove il tensore ε abbia la seguente forma

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Il problema consiste nel calcolo degli autovalori (**deformazioni principali**), e degli autovettori (**direzioni principali**).

Dobbiamo trovare tre direzioni distinte $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ e $\mathbf{n}^{(3)}$ alle quali corrispondano tre scalari, non necessariamente distinti, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ e $\varepsilon^{(3)}$ tali che per la generica direzione $\mathbf{n}^{(i)}$ si abbia

$$\varepsilon_{ij}n_j^i = \varepsilon^{(i)}\delta_{ij}n_j^i \quad (4.19)$$

dove n_j^i è il j -esimo coseno direttore della direzione $\mathbf{n}^{(i)}$ nel sistema di riferimento cui corrisponde ε_{ij} .

Abbiamo un sistema algebrico di tre equazioni nelle incognite n_j^i

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon)n_j^i = 0 \quad (4.20)$$

con soluzioni non banali se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti si annulla

$$\det(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon) = 0. \quad (4.21)$$

La relazione (4.21) permette di trovare i tre autovalori ovvero le tre deformazioni principali $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ e $\varepsilon^{(3)}$ ((4.18)), infatti

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^3 - E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon - E_3 = 0, \quad (4.22)$$

dove E_1 , E_2 e E_3 sono gli **invarianti principali**, ovvero il loro valore non cambia al variare del sistema di riferimento, considerato che

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{tr } \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ E_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz}^2, \\ E_3 &= \det \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'equazione

$$\varepsilon^3 - E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon - E_3 = 0 \quad (4.24)$$

è detta **equazione secolare** ed ammette tre soluzioni in virtù della simmetria di ε e delle sue componenti reali. Si possono verificare i seguenti casi:

- $\varepsilon^{(1)} \neq \varepsilon^{(2)} \neq \varepsilon^{(3)}$, cioè le tre direzioni principali $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ e $\mathbf{n}^{(3)}$ (fra loro ortogonali), sono distinte e la terna principale di deformazione è unica.
- $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} \neq \varepsilon^{(3)}$, ovvero due autovalori sono uguali tra loro ed esistono infinite terne di autovettori.
- $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)}$, quindi tutte le terne sono principali.

Quindi nel sistema di riferimento principale, la matrice associata al tensore delle piccole deformazioni ε ha la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

ovvero nella terna principale non si misurano scorrimenti, ma solo allungamenti nell'intorno del punto considerato.

4.3 Materiali elastici lineari

Definizione 4.1. *Un corpo deformabile si dice elastico se il campo tensionale σ è funzione diretta e biunivoca del campo di deformazione*

$$\sigma = \sigma(\varepsilon). \quad (4.26)$$

Di un generico elemento materiale si consideri lo stato $(\mathbf{x}, 0)$ come stato di riferimento e si indichi con φ_0 il valore della densità di energia elastica ad esso pertinente. Sviluppando la *funzione densità di energia elastica* $\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ intorno a $(\mathbf{x}, 0)$ in un qualche sistema di riferimento si ha

$$\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon_{ij}) = \varphi_0 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{(\mathbf{x}, 0)} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} \right|_{(\mathbf{x}, 0)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + o(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}). \quad (4.27)$$

In base alla relazione tra tensore funzione densità di energia elastica, trascurando i termini $o(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk})$, derivando rispetto a ε_{ij} si ottiene

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{(\mathbf{x}, 0)} + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} \right|_{(\mathbf{x}, 0)} \varepsilon_{hk} \quad (4.28)$$

Il termine $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right|_{(\mathbf{x}, 0)}$ è un tensore del secondo ordine simmetrico, indicato con

σ_{ij}^0 ; mentre il termine costante $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} \right|_{(\mathbf{x}, 0)}$ è un tensore del quarto ordine che

sarà indicato con C_{ijhk} (o in forma compatta \mathbb{C}).

Quindi riscriviamo la relazione (4.28) in questo modo

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijhk} \varepsilon_{hk} \quad (4.29)$$

che rappresenta il **legame elastico lineare**. Trascurando le autotensioni σ_{ij}^0 che un corpo può presentare allo stato naturale, il legame elastico lineare si riduce a

$$\sigma_{ij} = C_{ijhk} \varepsilon_{hk} . \quad (4.30)$$

Nel caso di legame elastico lineare l'energia è esprimibile nella forma quadratica

$$\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijhk} \varepsilon_{hk} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbb{C} \varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (4.31)$$

dalla quale, derivando rispetto a ε_{ij} , troviamo nuovamente il legame elastico lineare.

Proprietà e caratteristiche di \mathbb{C}

- \mathbb{C} è definito positivo, dato che l'energia elastica è una quantità positiva.
- Per qualsiasi tensore \mathbb{A} del secondo ordine, simmetrico e non nullo si ha che $(\mathbb{C}\mathbb{A}) \cdot \mathbb{A} \geq 0$.
- \mathbb{C} è uniformemente ellittico, ovvero per qualsiasi coppia di vettori \mathbf{v}, \vec{w} si ha che $C_{ijhk} v_i w_j v_h w_k > 0$.

Il tensore \mathbb{C} ha 3^4 componenti, ma non tutte sono indipendenti a causa delle proprietà di simmetria di cui gode.

Infatti dalla definizione di \mathbb{C} , per il *teorema di Schwartz*, si ha che

$$C_{ijhk} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} \Big|_{(\mathbf{x},0)} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{hk} \partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{(\mathbf{x},0)} = C_{hki j} . \quad (4.32)$$

Proprietà di simmetria di \mathbb{C} :

- simmetria maggiore destra: $C_{ijhk} = C_{hki j}$;
- simmetria minore destra: $C_{ijhk} = C_{ijkh}$, dato che $\varepsilon_{hk} = \varepsilon_{kh}$;
- simmetria minore sinistra: $C_{ijhk} = C_{jihk}$, dato che $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Le componenti indipendenti di \mathbb{C} si riducono quindi a 21.

4.3.1 Legame costitutivo per materiali elastici, lineari, omogenei ed isotropi

In generale \mathbb{C} dipende da \mathbf{x} ($\mathbb{C} = \mathbb{C}(\mathbf{x})$), ma per corpi omogenei \mathbb{C} è indipendente dalla posizione. Se consideriamo materiali omogenei ed isotropi, per i quali le proprietà meccaniche sono uguali in tutte le direzioni, abbiamo che l'energia elastica dipende solo dagli invarianti del tensore di deformazione, ovvero

$$\varphi = \varphi(E_1, E_2, E_3). \quad (4.33)$$

Volendo ricavare un legame costitutivo lineare, allora la funzione densità di energia elastica dovrà avere forma quadratica, ovvero non dovrà dipendere dall'invariante cubico E_3 , quindi

$$\varphi = \varphi(E_1, E_2) \quad (4.34)$$

ed in particolare

$$\varphi = \frac{1}{2}c_1 E_1^2 + c_2 E_2, \quad (4.35)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti caratteristiche del materiale. La generica componente del tensore degli sforzi sarà quindi data da

$$\sigma_{ij} = c_1 E_1 \frac{\partial E_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + c_2 \frac{\partial E_2}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (4.36)$$

Ricordando le espressioni di E_1 e di E_2 (vedi (4.23)): $E_1 = \text{tr } \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$
 $E_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}^2$, possiamo risalire all'espressione delle derivate

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \delta_{ij}, \\ \frac{\partial E_2}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \text{tr } \varepsilon \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}. \end{aligned}$$

Riscriviamo quindi la relazione (4.36)

$$\sigma_{ij} = c_1 \text{tr } \varepsilon \delta_{ij} + c_2 \text{tr } \varepsilon \delta_{ij} - c_2 \varepsilon_{ij} = (c_1 + c_2) \text{tr } \varepsilon \delta_{ij} - c_2 \varepsilon_{ij} = \lambda \text{tr } \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

Comunemente infatti si adotta la notazione

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) &= \lambda \\ -2c_2 &= 2\mu \end{aligned}$$

dove λ e μ sono dette costanti di Lamè e sono parametri costitutivi determinabili sperimentalmente ($\lambda, \mu > 0$).

Il **legame elastico lineare omogeneo ed isotropo** si scrive quindi nel seguente modo

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\delta_{ij}, \\ C_{ijhk} &= \mu(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{hk}, \\ \varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{2}\lambda(\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu|\varepsilon|^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

con $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$. Derivando $\varphi(\varepsilon)$ rispetto a ε_{ij} si ritrova $\sigma(\varepsilon)$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\delta_{ij}. \quad (4.38)$$

4.3.2 Legame costitutivo inverso e moduli elastici

Vogliamo trovare a partire dal legame elastico lineare (4.37), la sua espressione inversa e definire i moduli elastici caratteristici del materiale.

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr}\varepsilon)I. \quad (4.39)$$

Facciamo la traccia di entrambi i membri

$$\text{tr}\sigma = 2\mu\text{tr}\varepsilon + \lambda(\text{tr}\varepsilon)\text{tr}I = (2\mu + 3\lambda)\text{tr}\varepsilon. \quad (4.40)$$

Esplicitiamo ε

$$\text{tr}\varepsilon = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\text{tr}\sigma, \quad (4.41)$$

sostituiamo la $\text{tr}\varepsilon$ nella relazione (4.39)

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\text{tr}\sigma I \quad (4.42)$$

ed attraverso semplici passaggi algebrici otteniamo

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{tr}\sigma I \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma - \frac{\nu}{\nu + 1} (\text{tr}\sigma) I \right) \quad (4.43)$$

che rappresenta il **legame elastico lineare omogeneo ed isotropo inverso**.

Definiamo il *coefficiente di Poisson* ν

$$\nu = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}. \quad (4.44)$$

Si osservi che, essendo le costanti di Lamè $\lambda, \mu > 0$, il coefficiente di Poisson dovrà risultare $\nu < \frac{1}{2}$.

Inoltre dalla relazione (4.40), osservando che $\text{tr}I = 3$, si ottiene

$$\frac{1}{3}\text{tr}\sigma = \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{3} \right) \text{tr}\varepsilon \quad (4.45)$$

dove il termine

$$K = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} \quad (4.46)$$

rappresenta il **coefficiente di dilatazione volumetrica** o *modulo elastico di compressione*.

Chiaramente dovrà risultare $K > 0$ altrimenti in seguito a compressione il corpo si espanderebbe.

Consideriamo un cilindro sottoposto a tensione uniforme σ_{11} sulle basi dove la matrice associata al tensore degli sforzi σ nel caso in questione risulta

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Considerando la relazione (4.43) e sostituendo abbiamo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{hh} \delta_{ij} \right) \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}. \quad (4.48)$$

Definiamo quindi il *modulo di elasticità di Young* E

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (4.49)$$

Per il caso affrontato del cilindro sottoposto a tensione σ_{11} sulle basi, otteniamo le seguenti deformazioni

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad (4.50)$$

mentre la dilatazioni $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ risultano negative, ovvero si ha una contrazione lungo il secondo ed il terzo asse

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}. \quad (4.51)$$

Inoltre il modulo di Poisson ((4.44)) è dato da

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.52)$$

ed esprime il rapporto tra dilatazione trasversale e longitudinale.

Con la prova di trazione è quindi possibile ricavare i moduli E e μ , mentre sottoponendo un prisma ad azioni tangenziali, ovvero

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

possiamo trovare il *modulo di elasticità tangenziale* γ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{hh} \delta_{ij} \right),$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}.$$

Infine considerando il caso di una compressione uniforme, ovvero

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

si avranno le seguenti deformazioni

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}.$$

Infine calcolando la traccia di ε si ottiene

$$\text{tr } \varepsilon = -\frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{K}p$$

dove K è il coefficiente di dilatazione volumetrica o modulo di compressione ((4.46)).

4.4 Equazioni di Navier

Le equazioni di Navier rappresentano le equazioni di equilibrio per corpi omogenei, elastici, lineari ed isotropi e si ottengono sostituendo nell'equazione di equilibrio delle forze (4.53), l'espressione della derivata del legame costitutivo elastico lineare.

Riscriviamo l'equazione di equilibrio delle forze

$$b_i + \sigma_{ij/j} = 0, \quad (4.53)$$

deriviamo la relazione (4.37) che rappresenta il legame costitutivo elastico lineare

$$\begin{aligned} \sigma_{ij/j} &= (\lambda \operatorname{tr} \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij})_{/j} = \lambda u_{h/hj} \delta_{ij} + 0 + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i/j} + u_{j/i})_{/j} \\ &= \lambda u_{h/hi} + \mu u_{i/jj} + \mu u_{j/ij} \end{aligned}$$

dove $\operatorname{tr} \varepsilon = \varepsilon_{hh} = u_{h/h} = \operatorname{div}(\mathbf{u})$ e \mathbf{u} rappresenta lo spostamento. Inoltre per il teorema di Schwartz possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \lambda u_{h/hi} + \mu u_{i/jj} + \mu u_{j/ij} &= (\lambda + \mu) u_{j/ji} + \mu u_{i/jj} = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u, \\ \operatorname{div} \sigma &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u, \end{aligned} \quad (4.54)$$

dove $\nabla \operatorname{div} u = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\Delta u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} = u_{i/jj}$.

Dato che in condizioni di equilibrio $\operatorname{div} \sigma = -b$, sostituendo la relazione (4.54), otteniamo

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + b = 0 \quad (4.55)$$

che rappresenta l'**equazione di Navier**.

L'equazione in componenti ha la forma

$$\mu u_{i/jj} + (\mu + \lambda) u_{j/ji} + b_i = 0.$$

Bibliografia

- [1] A. Belleni-Morante, Meccanica dei continui, 2008
- [2] O. Belluzzi, Scienza delle Costruzioni, Zanichelli, Bologna, 1995.
- [3] A. Fasano, S.Marmi, Meccanica Analitica, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [4] T. Levi-Civita, U. Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale Vol.I e II, Zanichelli Editore, Bologna, 1974.
- [5] P.M. Mariano, L. Galano, Fondamenti di Meccanica dei Solidi, Bollati Boringhieri, Torino, 2017.
- [6] G.Thomas Mase and George E. Mase, Continuum Mechanics for Engineers, CRC Press, Boca Raton, 1999
- [7] P. Papadopoulos, Introduction to Continuum Mechanics. ME185, 2008, ketabnak.com/redirect.php?dlid=76820
- [8] T.C.Papanastasiou, G.C.Georgiou, A.N.Alexandrou, Viscous Fluid Flow, CRC Press, 2000.
- [9] J.J. Tuma, Analisi delle Strutture, Collezione Schaum, Etas Libri, Milano, 1976.