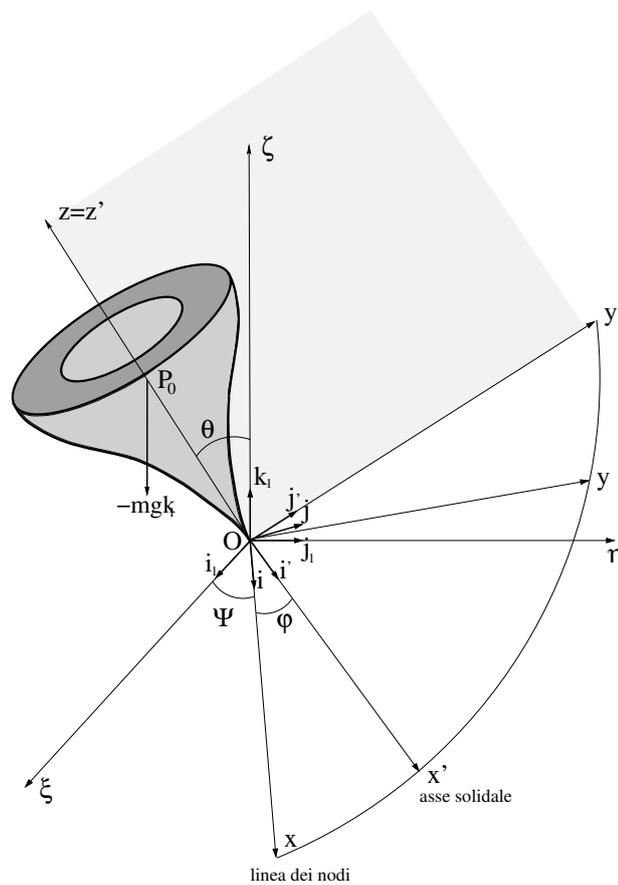


# COMPLEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

Appunti dalle lezioni del Prof. Giovanni Frosali  
III PARTE: DINAMICA DEI CORPI RIGIDI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "U.DINI"

FIRENZE - 14 MAGGIO 2018



## Capitolo 8

# DINAMICA DEI SISTEMI RIGIDI

### 8.1 Sistemi rigidi liberi

Sappiamo che le equazioni cardinali della dinamica sono necessarie e sufficienti per determinare il moto di un sistema rigido, di cui si conoscono le condizioni iniziali e le forze agenti su di esso. Conoscendo le forze agenti sul sistema, la prima equazione cardinale, nella forma

$$m\vec{a}(P_0) = \vec{R}^{(e)} \quad (8.1)$$

definisce il moto del centro di massa  $P_0$ , e quindi lo studio del moto del sistema si riconduce allo studio del moto di  $P_0$  e del moto di sistema rispetto al centro di massa, come se  $P_0$  fosse fisso. Tale moto è noto col nome di *moto di precessione intorno a  $P_0$* .

Iniziamo col parlare del moto di un sistema rigido libero  $\mathcal{S}$  soggetto ad un generico sistema di forze  $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$ , dove  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sono punti appartenenti al sistema  $\mathcal{S}$ .

Sarebbe errato pensare che la (8.1) sia in generale integrabile a partire da un assegnato stato cinematico del sistema, e quindi del suo centro di massa  $P_0$ . Infatti le forze  $\vec{F}_i$ , e quindi la loro risultante  $\vec{R}^{(e)}$ , devono riguardarsi in generale come funzioni dello stato cinematico del sistema, e quindi ad esempio

- delle coordinate  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  di  $P_0$  rispetto alla terna fissa  $\Sigma$  che osserva il moto, e delle derivate  $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$
- degli angoli di Eulero e delle loro derivate.

La (8.1) sarà perciò direttamente integrabile soltanto se  $\vec{R}^{(e)}$  non dipende dal secondo gruppo di coordinate.

Non si può quindi determinare in generale il moto di  $P_0$ , se non si affronta contemporaneamente lo studio del moto relativo a  $P_0$ . L'equazione di quest'ultimo è

$$\dot{\vec{K}}(P_0) = \vec{M}^{(e)}(P_0) \quad (8.2)$$

Come la (8.1) può essere accoppiata alla (8.2) attraverso gli angoli di Eulero, anche la (8.2) può risultare accoppiata alla (8.1) attraverso le coordinate di  $P_0$ , dalle quali può dipendere

$\vec{M}(P_0)$ . Tenendo conto dell'espressione della quantità di moto tramite la matrice d'inerzia del sistema rigido, l'equazione di moto (8.2) può essere scritta nella forma

$$\frac{d}{dt}[\sigma(P_0)\vec{\omega}] = \vec{M}^{(e)}(P_0) \quad (8.3)$$

Nei paragrafi seguenti esprimeremo l'equazione di moto in funzione delle incognite cinematiche relative al vettore  $\vec{\omega}$ .

## 8.2 Rotazioni di un corpo rigido intorno ad un asse fisso

Il moto di rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso può essere studiato come caso particolare dei moti di precessione, ma per ragioni didattiche preferiamo anticipare questo problema con una serie di esercizi.

### 8.2.1 Rotazione libera

Si consideri un corpo rigido libero di muoversi intorno ad un punto fisso  $O$ . Incominciamo con il semplice esempio in cui il corpo inizialmente ruoti intorno ad un asse principale passante per il punto fisso  $O$ . Indichiamo con  $\vec{k}$  la direzione dell'asse principale, allora la velocità angolare è  $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ . Se  $I$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse principale, la quantità di moto è data semplicemente da  $I\vec{\omega}$ .

Se durante il moto non intervengono forze sul corpo, allora

$$\dot{\vec{K}} = I\dot{\vec{\omega}} = 0,$$

e ciò implica che il momento angolare si conserva, l'asse rimarrà fisso nello spazio e la velocità angolare rimarrà costante. È bene comunque mettere in guardia il lettore che queste conclusioni non sono più valide se l'asse di rotazione non è principale.

### 8.2.2 Rotazione con forza applicata sull'asse

Consideriamo ora il caso in cui sull'asse di rotazione (sempre coincidente con un asse principale d'inerzia del corpo) agisca una forza  $\vec{F}$ , applicata ad esempio, nel punto  $P$  dell'asse  $\vec{k}$ , allora l'equazione di moto diventa

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = (P - O) \wedge \vec{F}. \quad (8.4)$$

Il momento che compare nella (8.4) è diretto secondo la perpendicolare alla direzione del vettore  $\vec{k}$  dell'asse solidale al corpo (inizialmente coincidente con la direzione verticale  $\vec{k}_1$ ), quindi la presenza della forza provocherà una variazione di tale direzione. Il corpo acquisterà una componente (seppur piccola) della velocità angolare perpendicolare all'asse

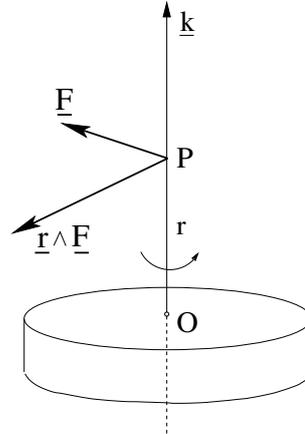


Figura 8.1 Disco in rotazione

$\vec{k}$ . Se la forza applicata è (sufficientemente) piccola in modulo, la velocità con cui l'asse si muove sarà piccola in confronto alla velocità di rotazione del corpo intorno all'asse.

Allora le componenti del momento angolare ortogonali all'asse  $\vec{k}$  dovranno essere anch'esse piccole e quindi trascurabili insieme alle loro derivate, quindi la variazione del momento angolare  $\frac{d\vec{K}}{dt}$  sarà principalmente diretta secondo la direzione del momento esterno. Inoltre essendo il momento perpendicolare a  $\vec{k}$ , la velocità angolare rimane invariata (più precisamente varia di poco) in modulo (infatti  $\frac{d\omega^2}{dt} = 2\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\omega}}$  e dalla perpendicolarità fra  $\dot{\vec{\omega}}$  e  $\vec{\omega}$  si ha  $\omega$  costante). In conclusione quando la velocità di rotazione intorno all'asse  $\vec{k}$  è grande rispetto alla velocità con cui si muove l'asse, si può considerare  $\vec{\omega}$  pressapoco costante in modulo e

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cong I\omega \frac{d\vec{k}}{dt} = (P - O) \wedge \vec{F}. \quad (8.5)$$

Essendo il momento perpendicolare a  $\vec{k}$ , la velocità angolare, come abbiamo detto, rimane invariata in modulo, ma la sua direzione cambia, e l'asse si muoverà nella direzione del momento, ovvero perpendicolare alla forza applicata (su questo punto torneremo più avanti a proposito degli effetti giroscopici).

Il lettore è in grado ora di giustificare un effetto noto ai motociclisti, per cui l'inclinarsi non provoca la caduta della moto, bensì consente alla moto di curvare. È bene ricordare che molti altri sono gli aspetti che devono essere esaminati nella dinamica della bicicletta e della moto, ad esempio, quelli relativi all'attrito fra ruota e terreno, ma questo esula dai nostri scopi.

Si consideri un monociclo di raggio  $r$ . Con riferimento alla figura, la forza agente nel punto  $C$ , centro della ruota, è la forza peso, che produce un momento lungo l'asse orizzontale  $\vec{j}$  (in figura  $\vec{j}$  è diretto verso di noi, mentre il momento è diretto verso l'interno del foglio). Si ha

$$K \frac{d\vec{i}}{dt} = r\vec{k} \wedge (-mg)\vec{k}_1 = -rmg \cos \alpha \vec{j},$$

dove  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  sono i versori solidali,  $\vec{k}_1 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{k}$  e  $\vec{K} = K \vec{i}$  è il momento angolare rispetto al punto  $O$ .

Così, la velocità angolare della ruota  $\vec{\omega}$  acquista una variazione  $d\vec{\omega}$  diretta secondo l'orizzontale, costringendo la ruota a cambiare direzione, curvando dalla parte verso cui la ruota è piegata.

Torniamo al corpo rigido in rotazione. Se la forza  $\vec{F}$  sul corpo è costante in direzione ed intensità, allora essa genera una precessione dell'asse di rotazione. La (8.5) si riscrive come

$$I\omega \frac{d\vec{k}}{dt} = -r\vec{F} \wedge \vec{k}. \quad (8.6)$$

Introducendo la velocità angolare

$$\vec{\Omega} = -\frac{r\vec{F}}{I\omega},$$

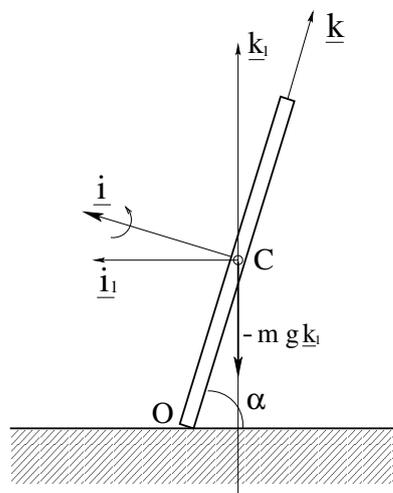


Figura 8.2 Monociclo inclinato

l'equazione diventa

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k},$$

la cui soluzione descrive la rotazione con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  del vettore  $\vec{k}$ , ovvero l'asse di rotazione si muove di precessione intorno alla direzione di  $\vec{\Omega}$ , ovvero della forza  $\vec{F}$ .

Il lettore curioso potrà riconoscere la nota precessione di Larmor e la precessione di un satellite in orbita, ed ancora il moto precessionale di una trottola ruotante, (vedi il capitolo successivo).

### 8.2.3 Problema della bicicletta

In prima approssimazione possiamo identificare la bicicletta con un sistema rigido di massa  $m$ , simmetrico rispetto ad un piano passante per la retta  $O - O'$  con inclinazione  $\theta$  ( $\theta$  è detto angolo di rollio, vedi fig. 8.3), dove con  $O, O'$  si sono indicati i punti di contatto rispettivamente della ruota posteriore e di quella anteriore col terreno. Scegliamo un sistema di riferimento di centro  $O$ , con l'asse  $x$  diretto come  $O - O'$  e con  $z$  ortogonale al terreno. La distanza  $O - O'$  è ovviamente costante ed è tangente alla traiettoria di  $O$ , il cui moto è assunto uniforme con velocità  $\vec{v}$ . Sia  $a$  la tangente alla traiettoria di  $O'$ .

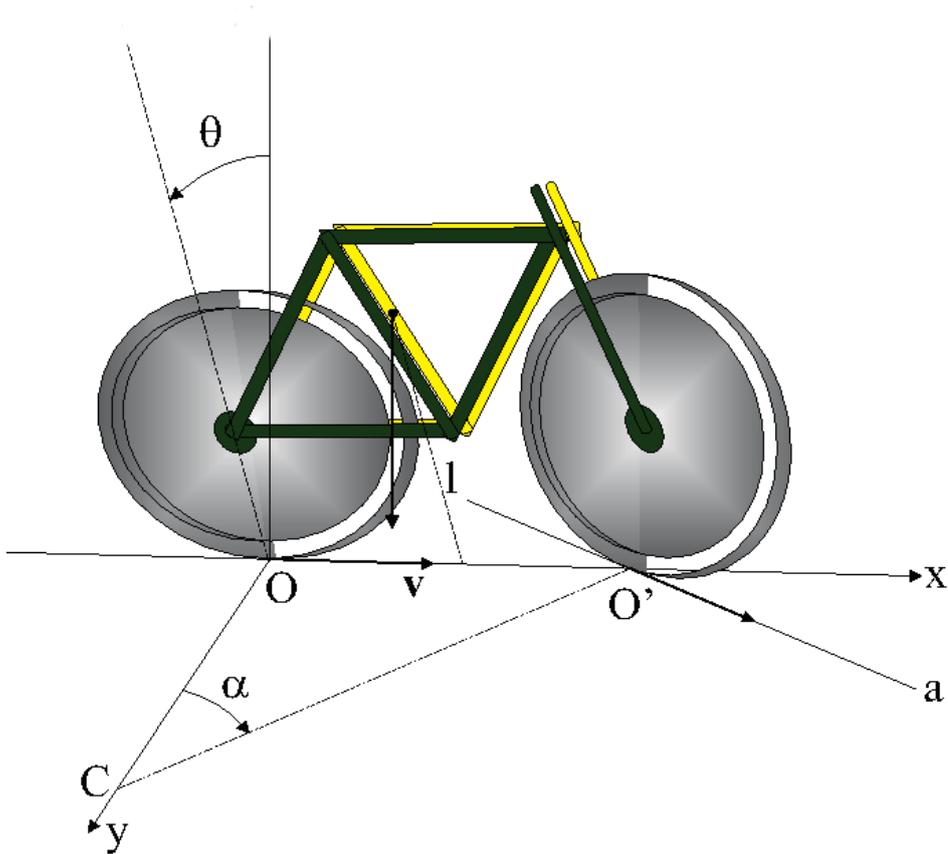


Figura 8.3 *Bicicletta che curva*

Per il teorema di Chasles il centro di istantanea rotazione  $C$  del sistema costituito dalle due ruote all'istante considerato è l'intersezione delle normali a  $O - O'$  e ad  $a$ , ovvero

l'intersezione di  $O'-C$  con l'asse  $y$ ; l'asse di rotazione è la verticale in  $C$ . Detto  $R = |O-C|$  avremo  $\omega = \dot{\alpha} = v/R$ , la velocità angolare costante.

Applichiamo l'integrale della conservazione dell'energia a questo problema di moto relativo.

L'energia cinetica del corpo è  $\frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\theta}^2$ , dove  $\mathcal{J}$  è il momento d'inerzia della bicicletta rispetto all'asse  $x$ . Le forze che compiono lavoro sono la forza peso, la cui energia potenziale è

$$V_p = mgl \cos \theta \quad ,$$

e la forza centrifuga. La forza centrifuga agente su un punto  $P_i$  di massa  $m_i$  e coordinate  $(x_i, y_i, z_i)$ , con l'ausilio della fig. 8.4, è data da

$$\begin{aligned} \vec{F}_{c_i} = \omega^2 m_i d_i \vec{u} &= \frac{\omega^2 m_i (R - y_i)}{\cos \alpha} [\sin \alpha \vec{i} - \cos \alpha \vec{j}] = \omega^2 m_i [(R - y_i) \tan \alpha \vec{i} + (y_i - R) \vec{j}] \\ &= \omega^2 m_i [x_i \vec{i} + (y_i - R) \vec{j}] \quad . \end{aligned}$$

dove  $\vec{u}$  è il versore radiale (diretto verso l'esterno della curva con centro in  $C$ ) con  $\vec{u} = \sin \alpha \vec{i} - \cos \alpha \vec{j}$ . L'unica componente della forza che compie lavoro è quella lungo  $\vec{j}$  e quindi il lavoro su una massa  $m_i$  è dato da

$$dL_{c_i} = m_i \omega^2 (y_i - R) dy_i = m_i \omega^2 r_i (r_i \sin \theta - R) \cos \theta d\theta \quad ,$$

poiché  $y_i = r_i \sin \theta$ , dove  $r_i$  è la distanza del generico punto della bicicletta dall'asse  $x$  (si ricordi che la bicicletta sta "rollando" intorno all'asse  $x$ ).

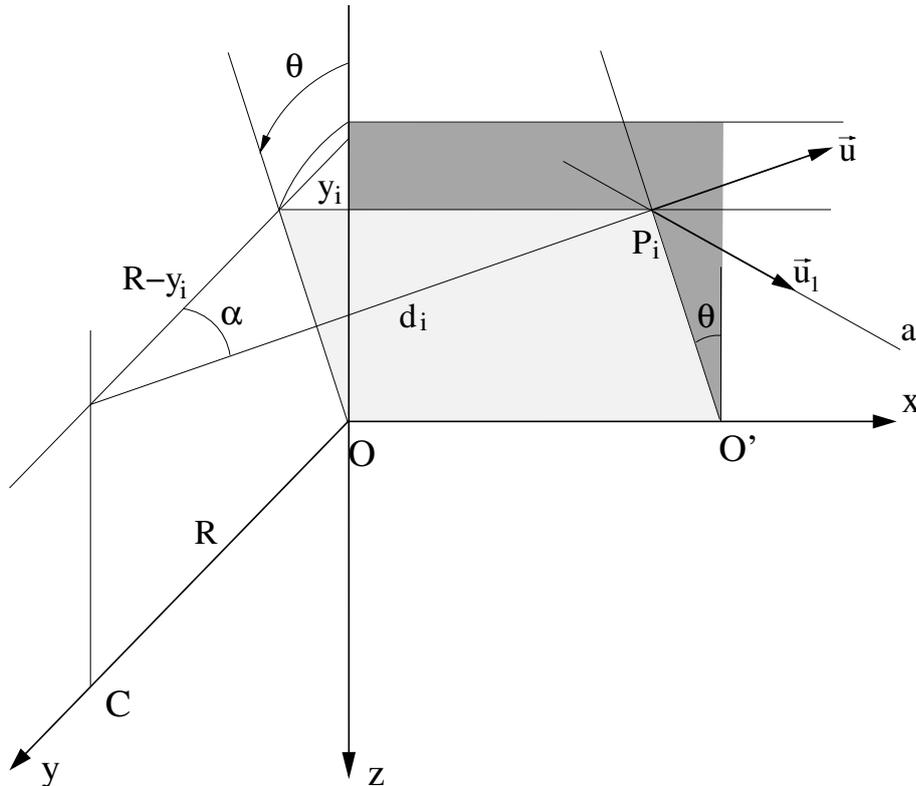


Figura 8.4 Forza centrifuga su un punto della bicicletta

Il lavoro complessivo impiegato dalle forze del campo centrifugo per ruotare il rigido di un angolo  $d\theta$  sarà quindi:

$$dL_c = \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 \sin \theta \cos \theta d\theta - \sum_i m_i \omega^2 r_i R \cos \theta d\theta = \mathcal{J} \omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta - ml \omega^2 R \cos \theta d\theta$$

dove si è impiegato la definizione di momento di inerzia e di centro di massa. L'integrale di  $dL_c$  (a meno di costante), cambiato di segno, risulta

$$V_c = \frac{1}{2} \omega^2 \mathcal{J} \cos^2 \theta + \omega^2 ml R \sin \theta$$

che è quindi l'energia potenziale  $V_c$  delle forze centrifughe. L'integrale dell'energia,  $T+V = T + V_p + V_c = E = \text{cost.}$  si scrive

$$\frac{1}{2} \mathcal{J} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \omega^2 \mathcal{J} \cos^2 \theta + \omega^2 ml R \sin \theta = E$$

da cui si deduce

$$\mathcal{J} \ddot{\theta} = mgl \sin \theta + \omega^2 (\mathcal{J} \sin \theta - mRl) \cos \theta \quad .$$

Nel caso dell'equilibrio il primo membro si annulla e si ricava

$$\omega^2 = \frac{mgl}{mRl - \mathcal{J} \sin \theta} \tan \theta \cong \frac{mgl}{mRl} \tan \theta = \frac{g}{R} \tan \theta .$$

Da cui si ricava, per  $\theta$  piccolo, la formula di Rankine

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{v^2 R}{R^2 g} = \frac{v^2}{Rg} .$$

A parità di  $v$ , al crescere dell'angolo di rollio  $\theta$ , deve diminuire  $R$ , cioè  $C$  deve accostarsi ad  $O$  e quindi, per conservare l'equilibrio, è necessario ruotare il manubrio dalla parte in cui "piega" la bicicletta.

Il precedente valore di  $\theta$  annulla la derivata prima dell'energia potenziale  $V$ , la derivata seconda (sempre per  $\theta$  piccoli, in modo da approssimare  $mRl - \mathcal{J} \sin \theta$  con  $mRl$ ) è

$$V'' = -mgl \cos \theta - \omega^2 ml R \sin \theta$$

che, per  $\theta$  sufficientemente piccolo, è negativa: la posizione di equilibrio è perciò instabile, essendo un punto di massimo dell'energia potenziale. (Da R.Marcolongo, Meccanica Razionale, Hoepli, Milano, 1953).

### 8.3 Precessioni. Equazioni di Eulero

Si consideri un sistema materiale rigido vincolato con un punto fisso  $O$ . Le reazioni offerte da questo vincolo sono rappresentate da una forza  $(O, \vec{\phi})$  e, se il vincolo non è liscio, da un momento di reazione che indichiamo con  $\vec{\mu}^{(a)}(O)$  per ricordare che è dovuto all'attrito;  $\vec{\mu}^{(a)}(O)$  dovrà supporre, nel solo caso dinamico, una funzione nota della velocità di rotazione. Detta quindi  $\vec{F}$  la risultante delle forze attive, la (8.1) si scrive come

$$m\vec{a}(P_0) = \vec{F} + \vec{\phi} , \quad (8.7)$$

mentre conviene riscrivere la (8.2) rispetto al punto  $O$ , nella forma seguente

$$\frac{d}{dt} [\sigma(O)\vec{\omega}] = \vec{M}(O) + \vec{\mu}^{(a)}(O) . \quad (8.8)$$

Quest'ultima equazione contiene come incognite solamente gli angoli di Eulero ed in linea di principio conduce quindi alla conoscenza del moto, se vengono specificate le condizioni iniziali e se il secondo membro è una funzione regolare delle incognite. Si ricordi che la (8.3) era scritta rispetto al centro di massa, qui l'esistenza di un punto fisso consente di scrivere la seconda equazione cardinale nella forma più semplice (8.8)

Una volta integrata la (8.8), la conoscenza di  $\vec{\omega}$ , porta alla conoscenza di  $\vec{\mu}^{(a)}(O)$ , mentre  $\vec{\phi}$  può essere dedotta dalla (8.7), calcolando  $\vec{a}(P_0)$ .

Se la (8.8) viene scomposta nel riferimento cartesiano  $\Sigma = (O; \xi, \eta, \zeta)$  che osserva il moto, allora la sua scrittura diventa complicata, poiché  $\sigma(O)$  dipende dal tempo attraverso il moto del sistema. Per questo motivo si introduce una terna solidale S, che per comodità si fa coincidere con la terna principale di inerzia relativa ad  $O$ , nella quale  $\sigma(O)\vec{\omega}$  ha la scomposizione

$$\sigma(O)\vec{\omega} = \mathcal{J}_1\omega_1\vec{i} + \mathcal{J}_2\omega_2\vec{j} + \mathcal{J}_3\omega_3\vec{k}. \quad (8.9)$$

È ora semplice calcolare la derivata al primo membro della (8.8)

$$\frac{d}{dt}[\sigma(O)\vec{\omega}] = \sigma(O)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \sigma(O)\vec{\omega}. \quad (8.10)$$

La scomposizione della (8.8) sulla terna S conduce alle equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\dot{\omega}_1 &= (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2\omega_3 + M_x(O) + \mu_x^{(a)}(O) \\ \mathcal{J}_2\dot{\omega}_2 &= (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)\omega_3\omega_1 + M_y(O) + \mu_y^{(a)}(O) \\ \mathcal{J}_3\dot{\omega}_3 &= (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)\omega_1\omega_2 + M_z(O) + \mu_z^{(a)}(O) \end{cases} \quad (8.11)$$

che si semplificano in modo ovvio nel caso di vincoli lisci.

In generale le grandezze del sistema (8.11) possono essere tutte espresse in termini degli angoli di Eulero. Quando però il momento  $M(O) + \mu^{(a)}(O)$  dipende direttamente da  $\vec{\omega}$ , allora le (8.11) costituiscono un sistema di equazioni del primo ordine non lineari nelle componenti incognite  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  di  $\vec{\omega}$ .

## 8.4 Precessioni per inerzia. Moto alla Poinsot

Vogliamo ora studiare un caso in cui le forze direttamente applicate non influiscono direttamente sul moto del corpo rigido e quindi l'azione di tali forze si esplica solo nella prima equazione cardinale. Per tale ragione, un tal moto si dice precessione spontanea o per inerzia.

**Definizione 8.4.1** *Un moto di precessione si dice per inerzia se  $\vec{M}(O) + \vec{\mu}^{(a)}(O) = 0$ , od anche  $\vec{M}(O) = 0$  nel caso di vincoli lisci,*

Un tipico esempio è quello del moto relativo al baricentro di un sistema rigido libero, sottoposto unicamente al proprio peso, ovvero un sistema rigido sottoposto unicamente al proprio peso con un punto fisso  $O$  coincidente con il centro di massa.

Nelle equazioni di Eulero (8.11) non intervengono esplicitamente le posizioni dei punti del corpo rigido, e le sole incognite risultano le componenti del vettore  $\vec{\omega}$ . Le equazioni di Eulero assumono la forma

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\dot{\omega}_1 &= (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2\omega_3 \\ \mathcal{J}_2\dot{\omega}_2 &= (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)\omega_3\omega_1 \\ \mathcal{J}_3\dot{\omega}_3 &= (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}. \quad (8.12)$$

Determinate le componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  si deve poi eseguire un'ulteriore integrazione per determinare le coordinate di configurazione, ad es. gli angoli di Eulero. In ogni caso le (8.12) non sono di facile integrazione, in compenso è semplice determinarne gli integrali primi.

In assenza di momenti, la seconda equazione cardinale per una precessione per inerzia  $\dot{\vec{K}}(O) = 0$  conduce all'integrale vettoriale

$$\vec{K}(O) \equiv \vec{K}_0 = \sigma(O)\vec{\omega}(0) \quad (8.13)$$

con  $\vec{K}_0$  costante nel riferimento fisso  $\Sigma$ , ovvero *il momento della quantità di moto* rispetto al punto  $O$  si mantiene costante durante il moto.

È bene osservare che  $\vec{K}$  rimane costante nel sistema fisso, mentre invece può variare rispetto al riferimento solidale, infatti derivando si ottiene

$$0 = \left[ \frac{d\vec{K}}{dt} \right]_{\Sigma} = \left[ \frac{d\vec{K}}{dt} \right]_S + \vec{\omega} \wedge \vec{K}$$

ovvero  $\vec{K}$  varia con la legge

$$\left[ \frac{d\vec{K}}{dt} \right]_S = \vec{K} \wedge \vec{\omega}.$$

Un altro integrale primo di moto, questa volta scalare, si può ricavare ricordando l'espressione del lavoro su un sistema rigido. Dal teorema delle forze vive, si sa che

$$dT = dL = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot dO + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{\Omega} \wedge (P_i - O) = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{O} + \vec{M}^{(e)} \cdot d\vec{\Omega},$$

ma nel nostro caso  $O$  è fisso ( $d\vec{O} = 0$ ), ed  $\vec{M}^{(e)} = 0$ , quindi  $dT = 0$ , ovvero la sollecitazione applicata al sistema rigido non compie lavoro. Discende subito che nelle precessioni per inerzia

$$T = \frac{1}{2} \vec{K}_0 \cdot \vec{\omega}(0) \equiv T_0, \quad (8.14)$$

dove  $T_0$  è determinato dalle condizioni iniziali.

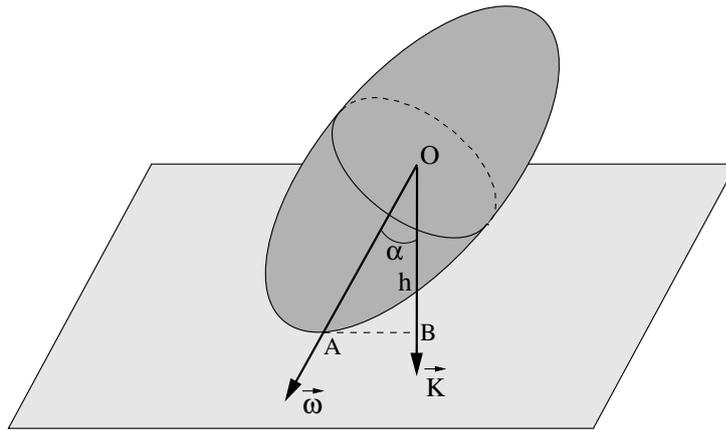


Figura 8.5 Moto dell'ellissoide

Le equazioni (8.13) e (8.14) consentono di elaborare una interessante descrizione cinematica per i moti di precessione per inerzia, detto moto alla Poinsot. Durante il moto, il punto  $O$  si mantiene alla stessa distanza dal piano tangente, all'ellissoide che si costruisce con polo in  $O$ , nel punto in cui è incontrato dall'asse di rotazione.

Dimostriamo precisamente il

**Teorema 8.4.1** *In un moto di precessione per inerzia l'ellissoide di inerzia del sistema relativo al polo  $O$  della precessione rotola senza strisciare su un piano fisso della giacitura normale al vettore  $\vec{K}_0$ .*

In un generico istante durante il moto si consideri l'ellissoide d'inerzia del sistema. Tale ellissoide può essere costruito scegliendo il parametro d'omotetia in modo da passare per l'estremo del vettore  $\vec{\omega}$ , ma non è il caso di Fig. 8.5. Idealizziamo il corpo tramite il suo ellissoide d'inerzia, come se durante il moto dell'ellissoide, quest'ultimo si portasse dietro il corpo stesso. Il vettore  $\vec{K}_0$  risulta normale al piano  $\pi_0$  che tocca l'ellissoide nel punto  $A$  ove questo è intersecato dalla direzione di  $\vec{\omega}$  (si ricordi che il gradiente nel punto  $P$  dell'ellissoide è uguale a  $2\sigma(O)(P-O)$ ). Tale piano essendo  $\vec{K}_0$  costante, risulta avere una giacitura costante.

Sia  $h$  la distanza da  $O$  a tale piano tangente, sia  $(A-O) = \frac{\lambda}{\sqrt{I}}(\text{vers } \vec{\omega})$ , dove  $\lambda$  è il parametro di omotetia dell'ellissoide, sia  $\alpha$  l'angolo fra  $\omega$  e  $\vec{K} = \vec{K}_0$ , allora

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{K}_0}{K_0 \omega},$$

allora

$$h = \frac{\lambda}{\sqrt{I}} \cos \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{I}} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{K}_0}{K_0 \omega},$$

Tenendo conto degli integrali primi ( $2T_0 = \vec{\omega} \cdot \vec{K}_0$ ,  $\sqrt{2T_0} = \sqrt{I} \omega$ ), si ottiene (un quinto integrale primo, dipendente dai precedenti)

$$h = \frac{\lambda \sqrt{2T_0}}{K_0} = \text{costante}, \quad (8.15)$$

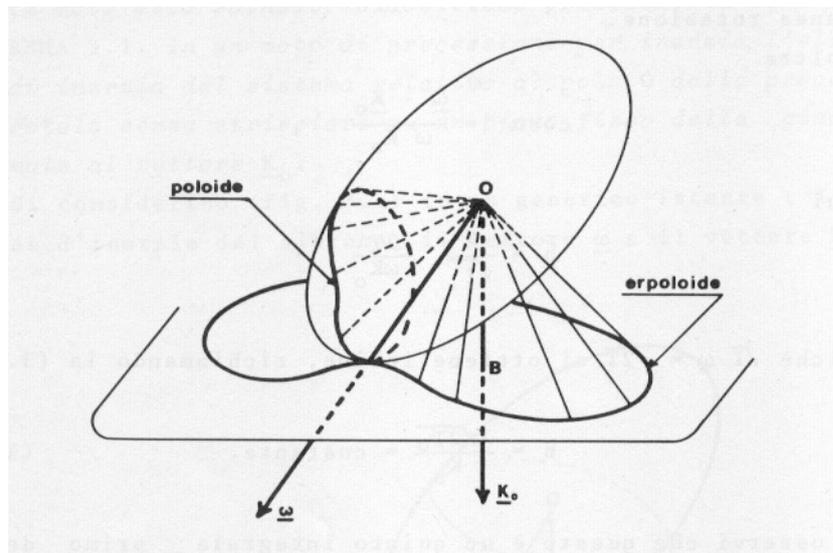


Figura 8.6 Moto alla Poinsot

## 8.5 Interpretazione geometrica delle precessioni per inerzia

I moti di precessione per inerzia grazie alla invarianza durante il moto della distanza  $h$ , introdotta in (8.15), hanno una semplice interpretazione geometrica.

Durante il moto l'ellissoide (che si porta dietro il corpo, o, se preferite, che viene portato dietro dal corpo) deve restare a contatto col piano nel punto  $A$ , che appartiene all'asse di istantanea rotazione ed è istantaneamente fermo.

Questo punto viene detto *polo del moto*. L'ellissoide rotola senza strisciare sul piano  $\pi_0$ , e nel suo moto di puro rotolamento si porta dietro il corpo. Come già detto questa interpretazione geometrica del moto dovuta a Poincot, è chiamata *moto alla Poincot*.

Se adesso consideriamo il luogo dei punti tra l'ellissoide d'inerzia (solidale) e il piano tangente (fisso), ovvero il luogo delle posizioni del polo, rispettivamente sull'ellissoide e sul piano, si ottengono due curve. La curva solidale, disegnata sull'ellissoide, viene chiamata *poloide*, quella fissa invece viene chiamata *erpoloide*. Proiettando dal punto  $O$  la poloide e l'erpoloide si ottengono i coni di Poincot della precessione.

Precisiamo meglio quanto sopra asserito. Se riscriviamo l'integrale primo di moto nel caso delle precessioni d'inerzia  $T = T_0$  nella forma

$$\vec{\omega} \cdot \sigma \vec{\omega} = \lambda^2,$$

riconosciamo, a parte le dimensioni, l'ellissoide  $(A - O) \cdot \sigma(A - O) = \lambda^2$ , con  $(A - O) = \vec{\omega}$ . Si ha così l'ellissoide con  $\lambda^2 = 2T_0$  che passa per l'estremo di  $\vec{\omega}$

$$\mathcal{J}_1 \omega_1^2 + \mathcal{J}_2 \omega_2^2 + \mathcal{J}_3 \omega_3^2 = 2T_0. \quad (8.1)$$

Interpretando  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  come le coordinate del punto  $A$  nel sistema solidale  $S$ , allora oltre all'equazione (8.1), la costanza del momento angolare implica  $\sigma \vec{\omega} = \vec{K}_0$ , ovvero

$$\mathcal{J}_1^2 \omega_1^2 + \mathcal{J}_2^2 \omega_2^2 + \mathcal{J}_3^2 \omega_3^2 = K_0^2. \quad (8.2)$$

È facile riconoscere nelle equazioni (8.1) e (8.5) due ellissoidi,

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1 \omega_1^2 + \mathcal{J}_2 \omega_2^2 + \mathcal{J}_3 \omega_3^2 = 2T_0 \\ \mathcal{J}_1^2 \omega_1^2 + \mathcal{J}_2^2 \omega_2^2 + \mathcal{J}_3^2 \omega_3^2 = K_0^2 \end{cases},$$

che nel sistema solidale  $S$  si intersecano lungo una curva algebrica del quarto ordine, che viene chiamata *poloide*. Nel sistema fisso  $\Sigma$  le due superfici si intersecano lungo una curva, in genere trascendente, che viene chiamata *erpoloide*.

Durante il moto l'estremo del vettore  $\vec{\omega}$  deve appartenere allo stesso ellissoide, quindi la poloide e l'erpoloide sono le curve generate durante il moto dall'estremo di  $\vec{\omega}$  nel sistema solidale e nel sistema fisso rispettivamente. Tutti i segmenti che uniscono il punto fisso  $O$  con la poloide mostrano come varia  $\vec{\omega}$  e ne danno il suo diagramma. L'asse istantaneo di moto passante per il punto  $A$  genera i due coni di Poincot, nei sistemi solidale e fisso.

In generale poloide ed erpoloide non sono curve semplici, invece quando l'ellissoide è di rotazione, la poloide è una curva piana, mentre l'erpoloide è un cerchio. Il lettore può pensare come esempio all'ingranaggio del differenziale.

Si noti infine di non confondere il moto alla Poincot con il moto di un corpo che rotola senza strisciare su un piano fisso. Infatti la forma del corpo può essere molto diversa dalla forma del suo ellissoide d'inerzia. Ad esempio un cubo possiede un ellissoide sferico, ciò nonostante un cubo non può rotolare senza strisciare.

## 8.6 Proprietà dinamiche degli assi principali di inerzia.

Si consideri un corpo che si muove di moto di precessione per inerzia.

**Teorema 8.6.1** *In una precessione per inerzia, se il corpo è posto inizialmente in rotazione intorno ad un asse principale di inerzia, allora si mantiene in **rotazione** uniforme intorno all'asse principale.*

*È una rotazione uniforme attorno a tale asse (rotazione permanente).*

**Dimostrazione.** Sia  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ , e  $\vec{\omega}_3(0) = \omega_3 \vec{k}$ , con  $\vec{k}$  diretto secondo l'asse principale. Vediamo innanzitutto se le altre componenti di  $\vec{\omega}$  rimangono nulle anche al variare del tempo. Infatti è così perché dalle equazioni di Eulero, essendo inizialmente  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$  e  $\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_2(0) = 0$ , si ha anche

$$\omega_1(t) = \omega_2(t) = 0, \text{ per ogni } t,$$

per l'unicità della soluzione.

All'istante  $t = 0$  il momento angolare  $\vec{K}(O)$  lascia unita la direzione di  $\vec{\omega}$ :  $\vec{K}(O) = \sigma(O)\vec{\omega} = \mathcal{J}_3\vec{\omega}_3(0)$ . Poiché in una precessione d'inerzia si ha  $\vec{K}(O)(t) = \vec{K}_0$  (costante), per ogni istante di tempo, anche  $\mathcal{J}_1\vec{\omega}_1(t) + \mathcal{J}_2\vec{\omega}_2(t) + \mathcal{J}_3\vec{\omega}_3(t) = \mathcal{J}_3\vec{\omega}_3(t) = \text{cost}$ , ovvero

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) = \text{costante}.$$

Infine si osservi che la rotazione è uniforme intorno a  $\vec{k}$  e che  $\omega_3$  è costante sia nel sistema relativo che in quello assoluto. ■

Questo teorema ha una chiara interpretazione geometrica alla luce del Teorema 8.4.1. Supponiamo infatti che inizialmente l'ellissoide d'inerzia sia disposto con uno degli assi di simmetria secondo il vettore fisso  $\vec{K}_0$ . Il Teorema 8.6.1 afferma che in questi casi il moto alla Poincaré si riduce ad una semplice rotazione con la poloide e l'erpoloide che degenerano in un punto. Inoltre per la costanza di  $\vec{K}_0$  durante tutto il moto  $\vec{K}_0 = \mathcal{J}\vec{\omega}$ , ne viene che  $\vec{\omega} = \frac{\vec{K}_0}{\mathcal{J}} = \text{costante}$  e che pertanto la rotazione è uniforme.

**Teorema 8.6.2** *In una precessione per inerzia, oltre al caso delle rotazioni permanenti intorno agli assi principali, non ci sono altri casi in cui la precessione si riduce ad una rotazione.*

**Dimostrazione.** Supponiamo che il nostro sistema si muova di rotazione per inerzia. Vogliamo provare che tutte le volte in cui abbiamo una rotazione permanente allora tale rotazione è intorno ad un asse principale. Ricordiamo che il nostro sistema di riferimento è principale e che le componenti di  $\vec{\omega}$  sono riferite a questo sistema solidale.

Oltre al caso in cui una sola componente di  $\vec{\omega}$  è diversa da zero, discussa nel teorema precedente, si possono distinguere altri due casi:

1. due componenti di  $\vec{\omega}$  sono diverse da zero (ovvero una sola componente è nulla),
2. oppure tutte le componenti di  $\vec{\omega}$  sono diverse da zero (ovvero nessuna componente è nulla).

Primo caso: Sia  $\omega_1 = 0$ , allora dalle equazioni di Eulero discende  $\omega_2 = \text{costante}$  e  $\omega_3 = \text{costante}$ . Dalla prima equazione di Eulero si ha

$$0 = (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2\omega_3.$$

Se  $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3$ , allora la rotazione è intorno ad un asse principale d'inerzia perpendicolare all'asse intorno a cui l'ellissoide è rotondo.

Se  $\mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_3$ , allora  $\omega_2$  (oppure  $\omega_3$ ) è nullo, allora la rotazione è intorno al terzo (oppure secondo) asse di riferimento.

Secondo caso: Sia  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 0$ .

Il moto è di rotazione intorno ad un asse, allora la variazione non può altro che essere senza variare la direzione (ovvero gli incrementi di  $\omega$  stanno nello stesso rapporto delle componenti di  $\omega$ ), e allora

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} = \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2} = \frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} = f(t), \quad (8.3)$$

dove  $f(t)$  è una costante dipendente solo da  $t$ .

La prima equazione di Eulero  $\mathcal{I}_1 \dot{\omega}_1 = (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3) \omega_2 \omega_3$  si riscrive nella forma

$$\mathcal{I}_1 \omega_1^2 \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} = (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3,$$

analogamente le altre due diventano

$$\mathcal{I}_2 \omega_2^2 \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2} = (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3,$$

$$\mathcal{I}_3 \omega_3^2 \frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} = (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3.$$

Sommando membro a membro troviamo

$$(\mathcal{I}_1 \omega_1^2 + \mathcal{I}_2 \omega_2^2 + \mathcal{I}_3 \omega_3^2) f(t) = 0$$

$$2T f(t) = 0.$$

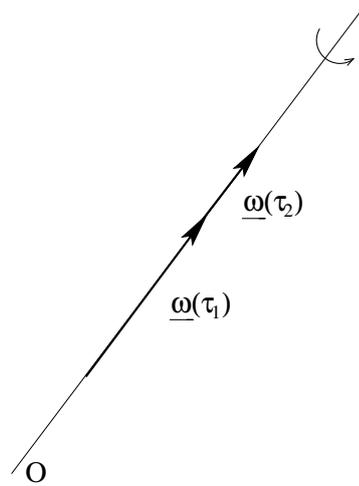


Figura 8.7 Asse di rotazione

Ma l'energia cinetica non è nulla, quindi deve essere

$$f(t) = 0 \rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0.$$

Ma per ipotesi le componenti di  $\vec{\omega}$  sono tutte diverse da zero e quindi, dalle equazioni di Eulero, devono essere uguali i momenti d'inerzia

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3.$$

Allora l'ellissoide è sferico e l'asse di rotazione è quindi asse principale. ■

In conclusione (ricordando che le componenti  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  sono rispetto agli assi principali) possiamo ricapitolare i seguenti tre casi:

1. una sola componente di  $\vec{\omega}$  è diversa da zero, (l'ellissoide è qualsiasi), allora l'asse di rotazione è proprio uno degli assi principali (caso banale);
2. oppure le due componenti sono diverse da zero, ma l'ellissoide è rotondo e la rotazione è intorno ad un asse perpendicolare all'asse intorno a cui l'ellissoide è rotondo e che è principale;
3. oppure le tre componenti sono diverse da zero e l'ellissoide è sferico, ogni asse è principale, e quindi anche quello di rotazione.

Gli assi principali di inerzia sono detti assi permanenti di rotazione. Le rotazioni permanenti sono le soluzioni di equilibrio delle equazioni di Eulero per le precessioni per inerzia.

**Nota 8.6.1** Nei teoremi precedenti abbiamo provato che fra le precessioni per inerzia le rotazioni uniformi sono tutte e sole quelle intorno ad un asse principale.

In questa nota, vogliamo provare in maniera diretta che se il corpo si muove di rotazione uniforme allora le rotazioni sono intorno ad un asse principale d'inerzia.

**Dimostrazione.** Supponiamo che la rotazione sia uniforme, ovvero le componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  di  $\vec{\omega}$  nel sistema solidale sono costanti, allora le equazioni di Eulero si riducono a

$$\begin{cases} (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases} . \quad (8.4)$$

Distinguiamo tre casi.

Quando  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$  sono differenti fra loro, allora il sistema (8.4) ammette le seguenti tre soluzioni

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10}, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= 0, \\ \omega_2 &= \omega_{20}, & \omega_1 &= 0, & \omega_3 &= 0, \\ \omega_3 &= \omega_{30}, & \omega_1 &= 0, & \omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

dove  $\omega_{10}, \omega_{20}$ , e  $\omega_{30}$  sono costanti arbitrarie. È facile riconoscere che i tre moti corrispondono alle rotazioni intorno agli assi principali  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Perciò le rotazioni uniformi sono possibili solo se il corpo ruota inizialmente intorno ad un asse principale.

Consideriamo ora il caso in cui  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 \neq \mathcal{J}_3$ , due dei tre momenti d'inerzia sono uguali. Questo caso corrisponde al caso in cui l'ellissoide è rotondo, ed ogni asse perpendicolare al versore  $\vec{k}$  è asse principale. Allora le equazioni di Eulero di riducono a

$$\begin{cases} \omega_2\omega_3 = 0 \\ \omega_3\omega_1 = 0 \end{cases} , \quad (8.5)$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= \omega_{30}, \\ \omega_1 &= \omega_{10}, & \omega_1 &= \omega_{20}, & \omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

La prima soluzione corrisponde ad una rotazione uniforme intorno all'asse  $\vec{k}$ , mentre la seconda soluzione corrisponde ad una rotazione intorno ad uno degli assi ortogonali a  $\vec{k}$ , che sono tutti assi principali.

Consideriamo infine il terzo caso in cui tutti i momenti d'inerzia sono uguali  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3$ , ovvero l'ellissoide è una sfera e tutte le direzioni sono principali d'inerzia. Le equazioni di Eulero sono soddisfatte da una qualsiasi terna di valori di  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , quindi una di queste infinite soluzioni corrisponde ad una rotazione uniforme intorno ad un asse arbitrario (che è principale d'inerzia). ■

Si ricordi che abbiamo provato che se è possibile una rotazione uniforme, allora tale rotazione è intorno ad un asse principale. Rimane da provare che queste rotazioni uniformi sono possibili. Se le condizioni iniziali sono fissate in modo tale da soddisfare le (8.4), allora le equazioni di Eulero per le precessioni per inerzia ammettono come soluzioni  $\omega_1, \omega_2$ , e  $\omega_3$  costanti, ovvero rotazioni uniformi. Inoltre per il teorema di unicità questa soluzione è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali assegnate. In conclusione, in assenza di momento di forze esterne, se inizialmente il sistema è messo in rotazione intorno ad un asse principale di inerzia, allora il moto successivo è una rotazione uniforme intorno a tale asse.

Nel seguente teorema si enunciano le proprietà di stabilità degli assi permanenti di rotazione.

**Teorema 8.6.3** *In una precessione per inerzia, se  $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_2 < \mathcal{J}_3$ , allora le rotazioni permanenti intorno all'asse minimo ed all'asse massimo dell'ellissoide di inerzia sono stabili, le rotazioni intorno all'asse medio sono instabili.*

**Dimostrazione.** Se diamo un piccolo spostamento al corpo in rotazione, in modo che l'asse di rotazione non coincida più precisamente con  $\vec{k}$  (ad esempio), è possibile provare che il corpo non si allontana dal suo moto se l'asse di rotazione è l'asse principale minimo o massimo (rotazione stabile), mentre il corpo se ne allontanerà nel caso in cui l'asse è quello medio (rotazione instabile).

Diamo una piccola perturbazione al corpo in rotazione e studiamo qualitativamente il conseguente moto. Sotto queste ipotesi le componenti  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono piccole, ma non zero.

Possiamo trascurare il prodotto  $\omega_1\omega_2$ , si ha così dalla terza equazione di Eulero si ha che  $\omega_3$  è (presso a poco) costante. Per le altre due componenti si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1\dot{\omega}_1 &= (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2\omega_3, \\ \mathcal{J}_2\dot{\omega}_2 &= (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)\omega_3\omega_1.\end{aligned}$$

Si possono risolvere queste equazioni passando all'equazione

$$\ddot{\omega}_2 = \frac{(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)}{\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}\omega_3^2\omega_2,$$

cercando soluzioni del tipo  $\omega_2 = c_2 e^{\alpha t}$ , dove  $c_2$  è costante. Si ottiene il seguente legame

$$\alpha^2 = \frac{(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)}{\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}\omega_3^2.$$

Il secondo termine è negativo se  $\mathcal{J}_3 > \mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_3 > \mathcal{J}_2$ , oppure se  $\mathcal{J}_3 < \mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_3 < \mathcal{J}_2$ , ovvero  $\mathcal{J}_3$  è l'asse massimo e minimo, quindi le due radici per ottenere  $\alpha$  sono immaginarie, e così si hanno soluzioni oscillatorie.

Quando invece si ha  $\mathcal{J}_1 > \mathcal{J}_3 > \mathcal{J}_2$  oppure  $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_3 < \mathcal{J}_2$ , ovvero  $\mathcal{J}_3$  è l'asse medio, allora le radici sono reali e le soluzioni sono esponenziali reali positive, e quindi crescenti nel tempo. Lo studente può verificare per esercizio che la soluzione negativa non è accettabile.

Perciò possiamo concludere che la rotazione intorno ad un asse principale è stabile se il momento d'inerzia rispetto a tale asse è massimo o minimo. ■

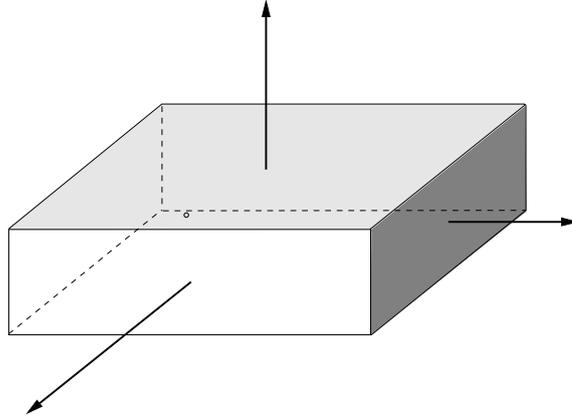


Figura 8.8

Il lettore può facilmente verificare questo fatto gettando in aria una scatola avente tre lati diversi (e quindi tre diversi momenti d'inerzia rispetto agli assi, come in figura), dando un po' di giro alla scatola intorno agli assi principali.

Sarà facile notare che il moto rotatorio si manterrà più a lungo se la scatola gira intorno all'asse maggiore e minore.

## 8.7 Moto di una trottola pesante con un punto fisso

Si consideri un corpo rigido a forma di trottola, con un punto fisso  $O$ , sotto l'influenza della sola forza peso. Sia  $\Sigma = (O; \xi, \eta, \zeta)$  il sistema di riferimento fisso ed  $S' = (O; x', y', z')$  il sistema di riferimento solidale alla trottola. Si consideri il caso in cui la trottola sia simmetrica rispetto all'asse  $z'$ , con momento d'inerzia  $\mathcal{J}_3 > \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ . Sia  $P_0$  il centro di massa della trottola che supponiamo distinto dal punto fisso  $O$ .

Sia  $x$  l'asse dei nodi, ovvero l'intersezione del piano solidale  $(x', y')$  col piano fisso  $(\xi, \eta)$ . L'asse  $x'$  solidale con la trottola forma un angolo  $\varphi$  sul piano  $(x', y')$  (in senso antiorario) con l'asse dei nodi  $x$ . L'asse principale d'inerzia della trottola é perpendicolare al piano  $(x, y)$ .

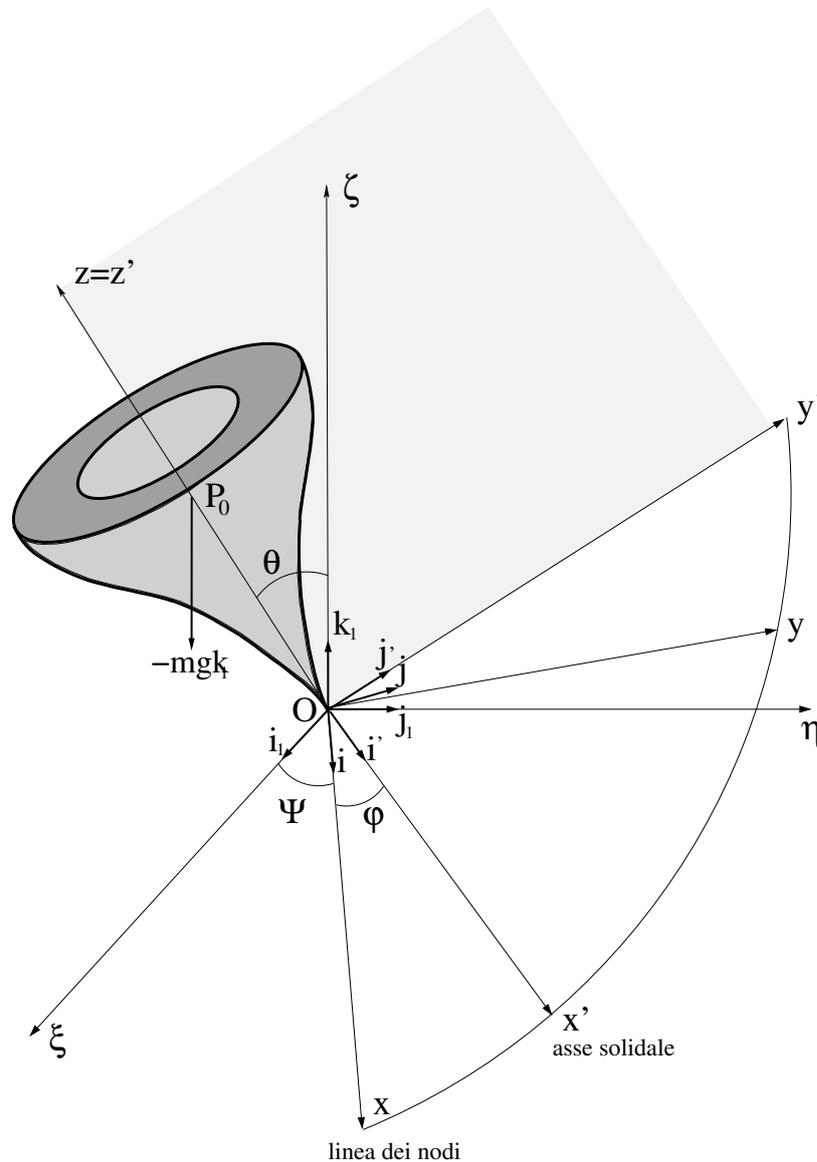


Figura 8.9 Trottola pesante

Siano  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  i versori del sistema fisso, siano  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  i versori del sistema solidale.

Si consideri inoltre il sistema di riferimento  $S = (O; x, y, z)$  con versori  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , con  $\vec{i}$  linea dei nodi e  $\vec{k} = \vec{k}'$ . Nel seguito faremo uso principalmente di questo sistema di riferimento, e scriveremo le equazioni di moto usando questo sistema, che si può considerare solidale a meno di una rotazione propria, e scriveremo le equazioni usando questo sistema di riferimento.

Valutiamo innanzitutto la caratteristica angolare  $\vec{\omega}$  della trottola. Se  $(p, q, r)$  sono le componenti di  $\vec{\omega}_S$  corrispondenti al sistema  $S = (O; x, y, z)$  rispetto al sistema fisso, allora aggiungendo la componente di rotazione propria (spin) della trottola intorno all'asse  $z$  diciamo  $\vec{s} = s\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$ , la velocità angolare della trottola é

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + (r + s)\vec{k} \quad .$$

Si noti che stiamo esprimendo tutte le grandezze rispetto al sistema di riferimento  $S$ . Allora calcoliamo  $\vec{K}$  (per ora consideriamo il caso più generale  $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$ )

$$\begin{aligned} \vec{K}(O) &= \sigma(O)\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r + s \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{J}_1 p\vec{i} + \mathcal{J}_2 q\vec{j} + \mathcal{J}_3 (r + s)\vec{k} \quad , \end{aligned}$$

in cui si é tenuto conto che gli assi  $(x, y, z)$  sono *principali* per la trottola con l'origine in  $O$  fisso. Allora

$$\begin{aligned} \dot{\vec{K}}(O) &= \mathcal{J}_1 \dot{p}\vec{i} + \mathcal{J}_2 \dot{q}\vec{j} + \mathcal{J}_3 (\dot{r} + \dot{s})\vec{k} + \vec{\omega}_S \wedge \sigma(O)\vec{\omega} = \\ &= \mathcal{J}_1 \dot{p}\vec{i} + \mathcal{J}_2 \dot{q}\vec{j} + \mathcal{J}_3 (\dot{r} + \dot{s})\vec{k} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ \mathcal{J}_1 p & \mathcal{J}_2 q & \mathcal{J}_3 (r + s) \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{J}_1 \dot{p}\vec{i} + \mathcal{J}_2 \dot{q}\vec{j} + \mathcal{J}_3 (\dot{r} + \dot{s})\vec{k} + [(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)qr + \mathcal{J}_3 qs]\vec{i} + [(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)pr - \mathcal{J}_3 ps]\vec{j} + (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1)pq\vec{k} = \\ &= [\mathcal{J}_1 \dot{p} + (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)qr + \mathcal{J}_3 qs]\vec{i} + [\mathcal{J}_2 \dot{q} + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)pr - \mathcal{J}_3 ps]\vec{j} + [\mathcal{J}_3 (\dot{r} + \dot{s}) + (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1)pq]\vec{k} \quad . \end{aligned}$$

Il sistema di riferimento non risente della rotazione propria, e quindi ciò giustifica il fatto che nella variazione temporale di  $\vec{K}$  compare  $\vec{\omega}_S$ , ovvero  $r$  senza  $s$ .

Le sole forze agenti sulla trottola sono la reazione  $\vec{\phi}$  in  $O$ , che non produce momento, e la forza peso. Sia  $l$  la distanza di  $P_0$  da  $O$ , allora la forza peso genera il seguente momento:

$$\vec{M}^{(e)} = (P_0 - O) \wedge -mg\vec{k}_1 = l\vec{k} \wedge -mg(\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}) = mgl \sin\theta\vec{i} \quad .$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1 \dot{p} + (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)qr + \mathcal{J}_3 qs = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_2 \dot{q} + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)pr - \mathcal{J}_3 ps = 0 \\ \mathcal{J}_3 (\dot{r} + \dot{s}) + (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1)pq = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Con le notazioni introdotte per i corpi rigidi,  $\theta$  è l'angolo di *nutazione*,  $\psi$  l'angolo di *precessione* e  $\varphi$  l'angolo di *rotazione propria*, mentre  $\dot{\varphi}$  è detta velocità di *spin*. Allora

$$\begin{cases} s = \dot{\varphi} \\ p = \dot{\theta} \\ q = \dot{\psi} \sin\theta \\ r = \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} \quad ,$$

ciò segue dall'espressione  $\vec{\omega}_S = \dot{\psi}\vec{k}_1 + \dot{\theta}\vec{i}$ , ( $\dot{\psi}\vec{k}_1$  è la precessione intorno alla verticale) e tenendo conto che  $\vec{k}_1 = \sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$ . Sostituendo in (8.6) e tenendo conto che  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$  si trovano le *Equazioni di Eulero* per la trottola:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\ddot{\theta} + (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + \mathcal{J}_3\dot{\psi}\dot{\theta} \sin\theta = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1(\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta) + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta - \mathcal{J}_3\dot{\psi}\ddot{\theta} = 0 \\ \mathcal{J}_3(\ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\varphi}) = 0. \end{cases}$$

Non c'è bisogno di evidenziare che le equazioni ottenute non sono risolubili in maniera elementare. Utilizzando la terza equazione in (8.6) si possono semplificare le prime due equazioni, infatti si ha

$$\dot{r} + \dot{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad r + s = a \quad (8.7)$$

dove  $a$  è una costante. Quindi si può eliminare

$$s = a - r$$

nelle (8.6):

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\dot{p} + (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)qr + \mathcal{J}_3qa - \mathcal{J}_3qr = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1\dot{q} + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)pr - \mathcal{J}_3pa + \mathcal{J}_3pr = 0 \\ \mathcal{J}_1\dot{p} - \mathcal{J}_1qr + \mathcal{J}_3qa = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1\dot{q} + \mathcal{J}_1pr - \mathcal{J}_3pa = 0 \end{cases} .$$

Sostituendo nuovamente  $p, q, r$  in funzione di  $\psi, \theta$

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\ddot{\theta} - \mathcal{J}_1\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + \mathcal{J}_3a\dot{\psi} \sin\theta = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1(\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta) + \mathcal{J}_1\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta - \mathcal{J}_3a\dot{\theta} = 0 \end{cases} .$$

Quindi le equazioni di Eulero, possono essere scritte nella seguente forma,

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1\ddot{\theta} - \mathcal{J}_1\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + \mathcal{J}_3a\dot{\psi} \sin\theta = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1(\ddot{\psi} \sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta) - \mathcal{J}_3a\dot{\theta} = 0 \end{cases} . \quad (8.8)$$

Una precessione si dice *stazionaria* quando  $\theta = \text{costante}$ . Cioè manca la nutazione,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$ .

Cerchiamo la condizione affinché la trottola si muova di *precessione stazionaria*. Sostituiamo  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  in (8.8)

$$\begin{cases} -\mathcal{J}_1\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + \mathcal{J}_3a\dot{\psi} \sin\theta = mlg \sin\theta \\ \mathcal{J}_1\ddot{\psi} \sin\theta = 0. \end{cases} .$$

Poiché escludiamo  $\sin\theta = 0$ , allora dalla seconda equazione si ha  $\dot{\psi} = \text{cost}$  e dalla prima equazione

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1\dot{\psi}^2 \cos\theta - \mathcal{J}_3a\dot{\psi} + mlg &= 0 \\ \dot{\psi}_{1,2} &= \frac{\mathcal{J}_3a \pm \sqrt{\mathcal{J}_3^2 a^2 - 4\mathcal{J}_1 mlg \cos\theta}}{2\mathcal{J}_1 \cos\theta} . \end{aligned}$$

Nell'ipotesi

$$\mathcal{J}_3^2 a^2 > 4mlg\mathcal{J}_1 \cos\theta$$

si hanno *due frequenze di precessione*, corrispondenti alle due soluzioni  $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$

$$\nu_1 = \frac{\dot{\psi}_1}{2\pi} \quad , \quad \nu_2 = \frac{\dot{\psi}_2}{2\pi} .$$

Nell'ipotesi

$$\mathcal{J}_3^2 a^2 = 4mlg\mathcal{J}_1 \cos \theta$$

si ha *una sola frequenza di precessione*

$$\nu = \frac{\mathcal{J}_3 a}{4\pi \mathcal{J}_1 \cos \theta} .$$

Nell'ipotesi

$$\mathcal{J}_3^2 a^2 < 4mlg\mathcal{J}_1 \cos \theta$$

*non si hanno frequenze di precessione.*

Possiamo distinguere i vari casi

- $\mathcal{J}_3^2 a^2 > 4mlg\mathcal{J}_1 \cos \theta$  : si hanno *due frequenze di precessione*

$$\nu_1 = \frac{\dot{\psi}_1}{2\pi} , \quad \nu_2 = \frac{\dot{\psi}_2}{2\pi} .$$

- $\mathcal{J}_3^2 a^2 = 4mlg\mathcal{J}_1 \cos \theta$  : si ha *una sola frequenza di precessione*

$$\nu = \frac{\mathcal{J}_3 a}{4\pi \mathcal{J}_1 \cos \theta} .$$

- $\mathcal{J}_3^2 a^2 < 4mlg\mathcal{J}_1 \cos \theta$  : *non si hanno frequenze di precessione.*

Si noti che le frequenze di precessione sono funzioni dell'angolo costante di nutazione  $\theta$ .

### 8.7.1 Equazioni di Lagrange applicate alla trottola pesante

Scriviamo l'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sigma(O) \vec{\omega} = \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 p^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_2 q^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_3 (r + s)^2 ,$$

dove abbiamo usato  $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + (r + s)\vec{k}$ . Tramite gli angoli di Eulero:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \mathcal{J}_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 ,$$

che con  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$  diventa

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 .$$

Il potenziale è

$$U = -mlg \cos \theta ,$$

per cui la Lagrangiana assume la forma

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - mlg \cos \theta .$$

La Lagrangiana dipende da  $\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ , ma non da  $\varphi$  e  $\psi$ , quindi si hanno i seguenti integrali di moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = P_\varphi = \text{cost} &\implies \mathcal{J}_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \mathcal{J}_3 \omega_3 = P_\varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = P_\psi = \text{cost} &\implies \dot{\psi} (\mathcal{J}_1 \sin^2 \theta + \mathcal{J}_3 \cos^2 \theta) + \mathcal{J}_3 \dot{\varphi} \cos \theta = P_\psi \end{aligned} \quad (8.9)$$

dove  $P_\varphi$  e  $P_\psi$  sono rispettivamente i momenti coniugati a  $\varphi$  e  $\psi$ . Il primo integrale di moto esprime la costanza della componente giroscopica della velocità di rotazione  $\vec{\omega}$ , che discende anche dalla terza equazione di Eulero con  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ , essendo il momento del peso ortogonale all'asse giroscopico. Il secondo integrale di moto esprime la conservazione verticale di  $\vec{K}$ , perché il momento del peso è orizzontale

Un altro integrale di moto è l'energia totale  $E$  che è costante durante tutto il moto a causa della conservatività del campo di forze (peso).

$$E = T - U = \frac{1}{2}\mathcal{J}_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}\mathcal{J}_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mlg \cos \theta \quad . \quad (8.10)$$

Possiamo utilizzare gli integrali (8.9) in modo da riscrivere la conservazione dell'energia totale in un modo assai utile. Dalla prima di (8.9) abbiamo

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}\mathcal{J}_3(r + s)^2 = \frac{1}{2}\mathcal{J}_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 = \frac{P_\varphi^2}{2\mathcal{J}_3} = \text{cost} .$$

Quindi ponendo

$$E' = E - \frac{P_\varphi^2}{2\mathcal{J}_3} = E - \frac{1}{2}\mathcal{J}_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

ovvero introducendo un'altra costante di moto, allora è

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + mlg \cos \theta = E' .$$

Con gli integrali primi,  $\dot{\psi}^2$  si esprime in funzione solo di  $\theta$  e separando  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  in modo da risolvere poi  $\dot{\theta}$  in funzione di  $\theta$  si ha

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E' \quad (8.11)$$

dove  $U$  è detto *potenziale effettivo*:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}\mathcal{J}_1\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + mlg \cos \theta \quad .$$

L'introduzione del potenziale effettivo consente di scrivere l'equazione di conservazione dell'energia e del momento coniugato  $P_\varphi$ , nella forma (8.11) che, risolta rispetto a  $\theta$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{J}_1}(E' - U(\theta))}$$

e integrata (ma è un integrale ellittico)

$$t = t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\mathcal{J}_1}(E' - U(\theta))}} \quad ,$$

permette di ricavare  $\theta = \theta(t)$  e conseguentemente anche  $\varphi = \varphi(t)$  e  $\psi = \psi(t)$ .

### 8.7.2 Commenti e considerazioni finali

Nella sezione precedente abbiamo ricavato gli integrali di moto (8.9) e (8.10) che qui riscriviamo nella seguente forma

$$\mathcal{J}_1\dot{\psi} \sin^2 \theta + \mathcal{J}_3 a \cos \theta = P_\psi \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}\mathcal{J}_3 a^2 + mgl \cos \theta = E \quad (8.13)$$

dove abbiamo sostituito la (8.9/a) nella (8.9/b) e nella (8.10), e abbiamo usato la (8.7)  $\omega_3 = r + s = a$ .

Sfruttiamo queste equazioni per analizzare l'andamento qualitativo della velocità di precessione  $\dot{\psi}$  e di nutazione  $\dot{\theta}$  nel tempo.

Dalla (8.12) si ha

$$\dot{\psi} = \frac{P_\psi - \mathcal{J}_3 a \cos \theta}{\mathcal{J}_1 \sin^2 \theta} \quad (8.14)$$

Sostituendo quest'ultima nella (8.13)

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(P_\psi - \mathcal{J}_3 a \cos \theta)^2}{2\mathcal{J}_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}\mathcal{J}_3 a^2 + mgl \cos \theta = E.$$

Ponendo  $u = \cos \theta$ , cosicchè  $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}$  e  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ , questa diviene

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1 \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(P_\psi - \mathcal{J}_3 a u)^2}{2\mathcal{J}_1 (1-u^2)} + mgl u = E - \frac{1}{2}\mathcal{J}_3 a^2$$

$$\dot{u}^2 + \left( \frac{P_\psi - \mathcal{J}_3 a u}{\mathcal{J}_1} \right)^2 + \frac{2mgl u (1-u^2)}{\mathcal{J}_1} = \frac{2(1-u^2)}{\mathcal{J}_1} \left( E - \frac{1}{2}\mathcal{J}_3 a^2 \right),$$

che si può scrivere

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u)$$

in cui

$$\alpha = \frac{2E - \mathcal{J}_3 a^2}{\mathcal{J}_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{\mathcal{J}_1}, \quad \gamma = \frac{P_\psi}{\mathcal{J}_1}, \quad \delta = \frac{\mathcal{J}_3 a}{\mathcal{J}_1}.$$

Cerchiamo i punti in cui la velocità di nutazione si annulla, ovvero i valori di  $u$  per i quali  $\dot{\theta} = 0$ . Poichè  $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}$ , ovviamente  $\dot{\theta} = 0$  quando  $\dot{u} = 0$  ovvero  $f(u) = 0$ . Perciò studiamo le radici dell'equazione

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0,$$

sviluppendone i prodotti

$$f(u) = \beta u^3 - (\delta^2 + \alpha)u^2 + (2\gamma\delta - \beta)u + \alpha - \gamma^2. \quad (8.15)$$

Poiché  $\beta > 0$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$$

$$f(-1) = -(\gamma + \delta)^2; \quad f(1) = -(\gamma - \delta)^2.$$

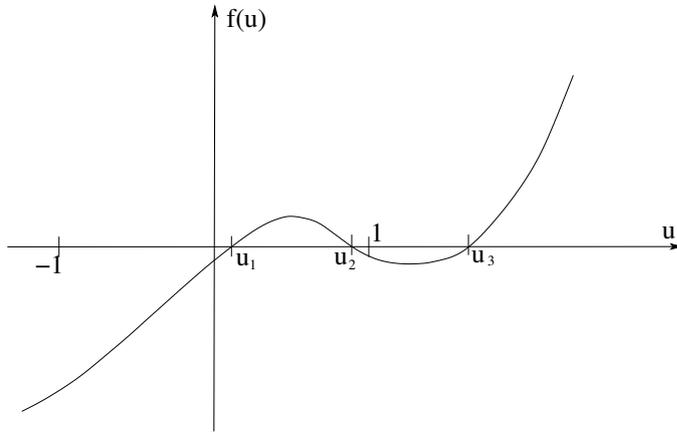


Figura 8.10  $f(u)$ 

Perciò vi è una variazione di segno (da  $-$  a  $+$ ) quando  $u$  va da 1 a  $\infty$ , e di conseguenza deve nascere una radice  $u_3$  fra 1 e  $\infty$ , come mostrato in fig. 8.10.

Inoltre i valori di  $u(t)$  che descrivono il moto della trottola devono soddisfare i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} f(u) = \dot{u}^2 \geq 0 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \quad \text{in quanto } 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Esisteranno quindi due angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (anche coincidenti) tali che  $\cos \theta_1 = u_1$ ,  $\cos \theta_2 = u_2$  con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ , all'interno dei quali rimane vincolato l'asse della trottola durante tutto il moto; in altre parole, dati i parametri geometrici di una trottola ( $\mathcal{J}_i, m, l$ ), gli unici angoli  $\theta(t)$  compatibili con le costanti di moto ( $E, P_\psi, P_\varphi$ ) sono quelli compresi fra  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Valori al di fuori di questo intervallo sono invece associati a velocità di nutazione immaginarie, quindi senza un corrispettivo fisico.

In generale il moto dell'asse della trottola disegnerà una delle curve indicate in fig. 8.1, essendo composto dai seguenti moti semplici:

**nutazione** è il moto di dondolio in su e giù dell'asse fra i limiti  $\theta_1$  e  $\theta_2$

**precessione** è il moto dell'asse rispetto alla verticale  $\zeta$ .

Per vedere con più precisione come si originano i tre sottocasi di fig. 8.1, analizziamo la radice dell'equazione (8.14) che qui riportiamo in funzione di  $u, \delta, \gamma$

$$\dot{\psi} = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2}.$$

Se questa radice, che è data da  $\gamma/\delta$ , è esterna all'intervallo  $(u_1, u_2)$ , siamo nel caso fig. 8.1/a (la velocità di precessione non varia di segno), se coincide con uno degli estremi (ad esempio  $u_2$ ) si ha il caso di fig. 8.1/b, ed infine se è compresa nell'intervallo  $(u_1, u_2)$  siamo nel caso c (durante il moto la velocità di precessione varia di segno).

Casi speciali sono: quello già discusso di precessione stazionaria senza nutazione (in cui  $\theta(t)$  rimane costante) che si ha quando  $u_1 = u_2$ , e quello della *trottola addormentata* caratterizzato dall'aver  $u_1 = u_2 = 1$ , in cui l'asse della trottola rimane sempre verticale.

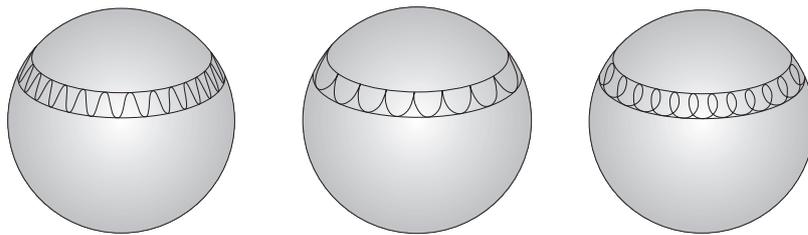


Figura 8.1: Moto dell'asse della trottola

## 8.8 Giroscopio

In questa sezione e nella successiva vengono riportati aspetti relativi alla dinamica dei corpi a struttura giroscopica. I paragrafi (8.8.1), (8.9.3) e (8.9.4) si basano in parte su dattiloscritti delle lezioni del Prof. Aldo Belleni-Morante per il corso di laurea di Ingegneria Civile.

### 8.8.1 Rotazioni intorno ad un punto fisso: il caso $M_O^{(e)} \neq 0$

**Definizione 8.8.1** Si dice che  $\mathcal{S}$  ha **struttura giroscopica** se esiste un sistema di riferimento **principale** con origine nel centro di massa  $P_0$ ,  $\mathcal{R}_0 = (P_0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tale che  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$  (indichiamo qui con  $\mathcal{J}_j$  le tre componenti non nulle della matrice d'inerzia).

Corrispondentemente l'asse di versore  $\vec{k}$  si dice **asse giroscopico** di  $\mathcal{S}$ .

Se poi  $O'$  è un punto qualunque dell'asse giroscopico, il sistema  $\mathcal{R}_{O'} = (O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  è ancora principale.

Infatti, indicate con  $\mathcal{J}_{ii}$  le componenti di  $\vec{\mathcal{J}}_{O'}$  su  $\mathcal{R}_{O'}$ , dalla formula di Huygens si ha:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{hk} = 0 & \text{se } h \neq k, \\ \mathcal{J}_{11} = \mathcal{J}_1 + mb^2 \\ \mathcal{J}_{22} = \mathcal{J}_2 + mb^2 = \mathcal{J}_{11} \\ \mathcal{J}_{33} = \mathcal{J}_3 \end{cases} \quad (8.16)$$

dove  $b$  è la distanza fra i punti  $P_0$  ed  $O'$ . In conclusione  $\mathcal{R}$  è un sistema principale con  $\mathcal{J}_{11} = \mathcal{J}_{22}$  (comunque si scelga l'origine del sistema di riferimento sull'asse giroscopico).

Supposto ora che  $O$  sia un **punto fisso**, allora prendiamo  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ , corrispondentemente la prima equazione cardinale e l'equazioni di Eulero divengono

$$m\ddot{P}_0 = \vec{F}^{(e,a)} + \vec{R}^{(e,v)} \quad (8.17)$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{11}\dot{\omega}_1 = (\mathcal{J}_{11} - \mathcal{J}_{33})\omega_2\omega_3 + \mathcal{M}_1^{(e,a)} + \mathcal{M}_1^{(e,v)} \\ \mathcal{J}_{11}\dot{\omega}_2 = (\mathcal{J}_{33} - \mathcal{J}_{11})\omega_3\omega_1 + \mathcal{M}_2^{(e,a)} + \mathcal{M}_2^{(e,v)} \\ \mathcal{J}_{33}\dot{\omega}_3 = \mathcal{M}_3^{(e,a)} + \mathcal{M}_3^{(e,v)} \end{cases} \quad (8.18)$$

Nelle (8.18) si è decomposto

$$\vec{F} = \vec{F}^{(e,a)} + \vec{R}^{(e,v)} \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{M}}_O^{(e)} = \vec{\mathcal{M}}_O^{(e,a)} + \vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)},$$

dove

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,a)} = \mathcal{M}_1^{(e,a)}\vec{i} + \mathcal{M}_2^{(e,a)}\vec{j} + \mathcal{M}_3^{(e,a)}\vec{k}, \quad (8.19)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} = \mathcal{M}_1^{(e,v)}\vec{i} + \mathcal{M}_2^{(e,v)}\vec{j} + \mathcal{M}_3^{(e,v)}\vec{k}, \quad (8.20)$$

essendo il momento delle reazioni vincolari esterne  $\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)}$ , così come  $\vec{R}^{(e,v)}$ , in generale incogniti. In effetti, si ha:

$$\vec{F}^{(e,a)} = \int_{C(t)} \rho(P,t)\vec{f}(P,t)dV \quad , \quad \vec{R}^{(e,v)} = \int_{\Sigma} \vec{\Phi}(Q, \vec{n}, t)d\sigma \quad (8.21)$$

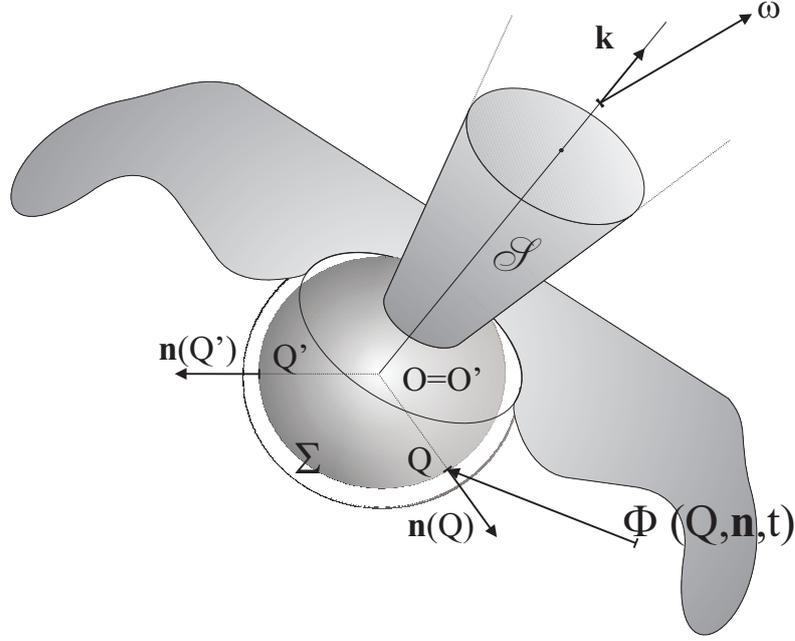
$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,a)} = \int_{C(t)} \rho(P,t)(P-O) \wedge \vec{f}(P,t)dV \quad , \quad \vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} = \int_{\Sigma} (Q-O) \wedge \vec{\Phi}(Q, \vec{n}, t)d\sigma \quad (8.22)$$

ove  $\Sigma$  è la piccola porzione di  $\partial C$  nell'intorno di  $O' \equiv O$ , in corrispondenza della quale il congegno meccanico che tiene fisso  $O'$  (giunto sferico) esercita un'**azione di sostegno**  $\vec{R}^{(e,v)}$  e un'**azione frenante**  $\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)}$  a causa degli attriti, cfr. Osservazione (??) e fig. (8.11).

**Osservazione 8.8.1** Confortati da risultati sperimentali, supponiamo che valgano le relazioni:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}(Q, \vec{n}, t) = -h(Q)\vec{n}(Q) - k(Q)\vec{v}(Q, t) & Q \in \Sigma \\ \vec{\Phi}(Q, \vec{n}, t) \simeq 0 & Q \notin \Sigma \end{cases} \quad (8.23)$$

ove le  $h(Q)$  e  $k(Q)$  sono funzioni non negative, a priori incognite, fig. (8.11).



**Figura 8.11** Cerniera sferica

Sostituendo la (8.23) nella (8.21), tenendo presente che  $\vec{v}(Q, t) = \vec{\omega}(t) \wedge (Q - O)$ , si ottiene

$$\vec{R}^{(e)} = - \int_{\Sigma} h(Q)\vec{n}(Q)d\sigma - \vec{\omega}(t) \wedge \int_{\Sigma} k(Q)(Q - O)d\sigma \cong - \int_{\Sigma} h(Q)\vec{n}(Q)d\sigma. \quad (8.24)$$

Infatti per ragioni di simmetria l'integrale  $\int_{\Sigma} k(Q)(Q - O)d\sigma$  è approssimativamente parallelo a  $\vec{\omega}$ ,  $(k(Q)(Q - O) + k(Q')(Q' - O)) = k(\bar{Q})[(Q - O') + (Q' - O)]$  con  $[(Q - O') + (Q' - O)]$  parallelo a  $\vec{\omega}$ .

Sostituendo la (8.23) nella (8.22) si ha poi

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} &= - \int_{\Sigma} h(Q)(Q - O) \wedge \vec{n}(Q)d\sigma - \int_{\Sigma} k(Q)(Q - O) \wedge \vec{v}(Q, t)d\sigma = \\ &= - \int_{\Sigma} k(Q)(Q - O) \wedge \vec{v}(Q, t)d\sigma \end{aligned} \quad (8.25)$$

dato che  $(Q - O)$  è parallelo a  $\vec{n}(Q)$ , cfr fig.(8.11).

Segue

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} &= - \int_{\Sigma} k(Q)(Q - O) \wedge [\vec{\omega}(t) \wedge (Q - O)]d\sigma = \\ &= - \int_{\Sigma} k(Q)(Q - O)^2 d\sigma \vec{\omega}(t) + \int_{\Sigma} k(Q)[(Q - O) \cdot \vec{\omega}(t)](Q - O)d\sigma. \end{aligned}$$

Quindi, se  $\vec{\omega} \cong \omega_3 \vec{k}$ , posto  $(Q - O) = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}$  si ricava

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} \cong - \left[ \int_{\Sigma} k(Q)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) d\sigma \right] \omega_3 \vec{k} + \int_{\Sigma} k(Q)[\omega_3 y_3](y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}) d\sigma .$$

Si conclude che vale la relazione

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(e,v)} \cong - \left[ \int_{\Sigma} k(Q)(y_1^2 + y_2^2) d\sigma \right] \vec{\omega} \quad (8.26)$$

dato che, per ragioni di simmetria,

$$\int_{\Sigma} k(Q) y_3 y_i d\sigma \cong 0 \quad , i = 1, 2 \quad . \quad \blacksquare$$

Ritornando al sistema (8.18), osserviamo che si ha:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -A\omega_2\omega_3 + \varphi_1^{(a)} + \varphi_1^{(v)} \\ \dot{\omega}_2 = A\omega_3\omega_1 + \varphi_2^{(a)} + \varphi_2^{(v)} \\ \dot{\omega}_3 = \varphi_3^{(a)} + \varphi_3^{(v)} \end{cases} \quad (8.27)$$

ove si è posto

$$A = \frac{\mathcal{J}_{33} - \mathcal{J}_{11}}{\mathcal{J}_{11}}$$

$$\varphi_i^{(a)}(t) = \frac{\mathcal{M}_i^{(e,a)}}{\mathcal{J}_{ii}} \quad , \quad \varphi_i^{(v)}(t) = \frac{\mathcal{M}_i^{(e,v)}}{\mathcal{J}_{ii}} \quad i = 1, 2, 3; \quad (8.28)$$

al sistema (8.27) associamo le condizioni iniziali:

$$\omega_1(t_0) = \omega_{10} \quad , \quad \omega_2(t_0) = \omega_{20} \quad , \quad \omega_3(t_0) = \omega_{30}. \quad (8.29)$$

Nel seguito supporremo che valgano le disuguaglianze seguenti:

$$|\varphi_i^{(a)}(t) + \varphi_i^{(v)}(t)| \leq \mu_i \quad , i = 1, 2, 3, \quad t \in [t_0, \bar{t}_0), \quad (8.30)$$

con  $\mu_i$  costanti opportune.

Innanzitutto, analizziamo il sistema allo scopo di stimare la componente angolare di rotazione propria. La (8.27/c) fornisce:

$$\omega_3(t) = \omega_{30} + \int_{t_0}^t [\varphi_3^{(a)}(s) + \varphi_3^{(v)}(s)] ds \quad , \quad t \in [t_0, \bar{t}_0) \quad (8.31)$$

e quindi

$$\left| \frac{\omega_3(t)}{\omega_{30}} - 1 \right| \leq \frac{\mu_3}{|\omega_{30}|} [\bar{t}_0 - t_0] \quad , \quad t \in [t_0, \bar{t}_0)$$

da cui si ha

$$\lim_{|\omega_{30}| \rightarrow +\infty} \left| \frac{\omega_3(t)}{\omega_{30}} - 1 \right| = 0 \quad \text{uniformemente in } t.$$

Si conclude che, se  $|\omega_{30}|$  è grande (per esempio in confronto a  $\sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$ ), vale la relazione:

$$\omega_3(t) \cong \omega_{30} \quad , \quad t \in [t_0, \bar{t}_0). \quad (8.32)$$

Notiamo che la (8.32) è “esatta” (vale col simbolo  $=$  al posto di  $\cong$ ) se  $\mu_3 = 0$ ; ciò implica che  $|\varphi^{(a)}(t) + \varphi^{(v)}(t)| \equiv 0$ , ovvero che  $\mathcal{M}_3^{(e,a)} + \mathcal{M}_3^{(e,v)} \equiv 0$ . In altri termini, la (8.32) è

esatta se la componente secondo l'asse giroscopico del momento motore  $\mathcal{M}_3^{(e,a)}$  è uguale e di segno opposto a quella del momento frenante  $\mathcal{M}_3^{(e,v)}$ .

Passiamo ad analizzare le altre equazioni del sistema. Posto  $\eta = A\omega_{30}$  e facendo uso della (8.32), la (8.27/a) e la (8.27/b) divengono:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 &= -\eta\omega_2 + \varphi_1^{(a)} + \varphi_1^{(v)} \\ \dot{\omega}_2 &= \eta\omega_1 + \varphi_2^{(a)} + \varphi_2^{(v)}. \end{cases} \quad (8.33)$$

La soluzione del sistema (8.33) (che è del tipo "seno e coseno") con le condizioni iniziali (8.29) si scrive, ponendo  $t' = t - t_0 \in [0, \bar{t}_0 - t_0)$

$$\omega_1(t) = C \cos(\eta t' + \alpha) + \int_0^{t'} \cos[\eta(t' - s')] \varphi_1(s' + t_0) ds' - \int_0^{t'} \sin[\eta(t' - s')] \varphi_2(s' + t_0) ds' , \quad (8.34)$$

$$\omega_2(t) = C \sin(\eta t' + \alpha) + \int_0^{t'} \sin[\eta(t' - s')] \varphi_1(s' + t_0) ds' + \int_0^{t'} \cos[\eta(t' - s')] \varphi_2(s' + t_0) ds' , \quad (8.35)$$

ove

$$C = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} , \quad \tan \alpha = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} ,$$

$$\varphi_i = \varphi_i^{(a)} + \varphi_i^{(v)} , \quad i = 1, 2, 3.$$

Poiché per dedurre le (8.34) e (8.35) si è utilizzato la (8.32), le (8.34) e (8.35) sono approssimate (per  $|\omega_{30}|$  grande) se  $\mu_3 > 0$  e sono esatte se  $\mu_3 = 0$ .

Dalle (8.34) e (8.35) si ha

$$|\omega_1(t)| \leq \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} + \left| \int_0^{t'} \cos[\eta(t' - s')] \varphi_1(s' + t_0) ds' \right| + \left| \int_0^{t'} \sin[\eta(t' - s')] \varphi_2(s' + t_0) ds' \right| , \quad (8.36)$$

$$|\omega_2(t)| \leq \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} + \left| \int_0^{t'} \sin[\eta(t' - s')] \varphi_1(s' + t_0) ds' \right| + \left| \int_0^{t'} \cos[\eta(t' - s')] \varphi_2(s' + t_0) ds' \right| .$$

Ricordiamo che  $\eta = A\omega_{30}$  e quindi  $\eta \rightarrow \infty$  se  $\omega_{30} \rightarrow \infty$ ; corrispondentemente si ha

$$\begin{cases} \lim_{\omega_{30} \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{t'} \cos[\eta(t' - s')] \varphi_i(s' + t_0) ds' \right| = 0 \\ \lim_{\omega_{30} \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{t'} \sin[\eta(t' - s')] \varphi_i(s' + t_0) ds' \right| = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 , \quad (8.37)$$

uniformemente rispetto a  $t' \in [0, \bar{t}_0 - t_0)$ .

Fissato allora  $\varepsilon > 0$ , per  $|\omega_{30}|$  sufficientemente grande, si ottiene dalle (8.36) e (8.37)

$$|\omega_i(t)| \leq \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} + 2\varepsilon , \quad i = 1, 2 \quad t \in [t_0, \bar{t}_0) . \quad (8.38)$$

La (8.38) mostra che se  $|\omega_{30}| \gg \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$  allora è  $|\omega_1(t)| \ll |\omega_{30}|$ ,  $|\omega_2(t)| \ll |\omega_{30}|$ . Si conclude che, se  $|\omega_{30}|$  è sufficientemente grande in confronto a  $|\omega_{10}|$  e  $|\omega_{20}|$ , allora  $|\omega_3(t)|$  si mantiene grande rispetto a  $|\omega_1(t)|$  e  $|\omega_2(t)|$ ,  $\forall t \in [t_0, \bar{t}_0)$ , cfr. la (8.32).

Vale dunque la relazione

$$\vec{\omega}_3(t) \cong \omega_{30} \vec{k}(t) \quad t \in [t_0, \bar{t}_0); \quad (8.39)$$

così se la rotazione iniziale di  $\mathcal{S}$  è essenzialmente intorno all'asse giroscopico (come del resto si fa quando si gioca con una trottola),  $\vec{\omega}(t)$  continua ad avere approssimativamente tale direzione durante tutto l'intervallo di tempo  $[t_0, \bar{t}_0)$ .

Notiamo pure che dalla (8.39) si ricava:

$$\frac{d\vec{k}}{dt}(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \cong \omega_{30} \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

e quindi l'asse giroscopico è approssimativamente fisso in  $\mathcal{R}$ .

### 8.8.2 Effetti giroscopici

Le proprietà dell'asse giroscopico possono essere ricavate anche nel modo seguente.

Il sistema (8.18) può scriversi

$$\frac{d}{dt}[\sigma(O)\vec{\omega}] = \vec{\mathcal{M}}_0^{(e)} \quad . \quad (8.40)$$

D'altra parte,

$$\sigma(O)\vec{\omega} = \mathcal{J}_{11}\omega_1\vec{i} + \mathcal{J}_{22}\omega_2\vec{j} + \mathcal{J}_{33}\omega_3\vec{k} \cong \mathcal{J}_{33}\omega_3\vec{k}(t) \quad (8.41)$$

e quindi la (8.40) fornisce

$$\frac{d\vec{k}}{dt}(t) \cong \frac{1}{\mathcal{J}_{33}\omega_3} \vec{\mathcal{M}}_0^{(e)} \quad (8.42)$$

La (8.42) mostra che

1. Le variazioni del versore  $\vec{k}(t)$  sono parallele al momento  $\vec{\mathcal{M}}_0$  (e **non** all'eventuale forza  $\vec{F}$  che, applicata in un punto  $Q$  dell'asse giroscopico, genera il momento  $\vec{\mathcal{M}}_O^{(e)} = (Q - O) \wedge \vec{F}$ );
2.  $\left\| \frac{d\vec{k}}{dt} \right\|$  è piccolo se  $|\omega_{30}|$  è grande e quindi  $\vec{k}(t)$  è approssimativamente fisso in  $\mathcal{R}$ , (**effetti giroscopici elementari**).

È tuttavia necessario sottolineare che in generale *non è lecito* derivare (per es. rispetto a  $t$ ) una relazione approssimata quale la (8.41). Infatti,

$$\sigma(O)\vec{\omega} = \mathcal{J}_{33}\omega_3\vec{k}(t) + \vec{\theta}(t)$$

ove  $\|\vec{\theta}(t)\|$  è una quantità piccola; segue

$$\frac{d}{dt}[\sigma(O)\vec{\omega}] = \mathcal{J}_{33}\omega_3 \frac{d\vec{k}}{dt}(t) + \frac{d\theta}{dt}$$

ove  $\left\| \frac{d\theta}{dt} \right\|$  può *non* essere piccolo.

Ciò giustifica le valutazioni più accurate di  $|\omega_1(t)|$  e di  $|\omega_2(t)|$  ricavate nel paragrafo precedente.

## 8.9 Esercizi sul giroscopio

### 8.9.1 Un semplice esperimento con un giroscopio

Supponiamo di avere un semplice giroscopio, della forma come in figura, che ruoti rapidamente intorno al suo asse di simmetria  $z$  con velocità  $\dot{\varphi}$ . In assenza di forze il giroscopio continua a ruotare intorno al proprio asse giroscopico  $z$  coincidente con  $\xi$ .

Applichiamo poi una forza  $\vec{F}$  costante in modulo diretta secondo l'asse  $\zeta$ , ovvero ortogonale all'asse giroscopico.

È facile eseguire il seguente esperimento. Se si imprime una forza  $\vec{F}$  diretta come sopra, quando il giroscopio non ruota, è facile spostare la direzione dell'asse.

Se invece si imprime la forza  $\vec{F}$  quando il giroscopio ruota, allora non è facile spostare la direzione dell'asse giroscopico. Per spostare tale asse è necessario che la forza  $\vec{F}$  sia tanto maggiore quanto maggiore è la velocità rotazionale  $\dot{\varphi}$  del giroscopio intorno al proprio asse.

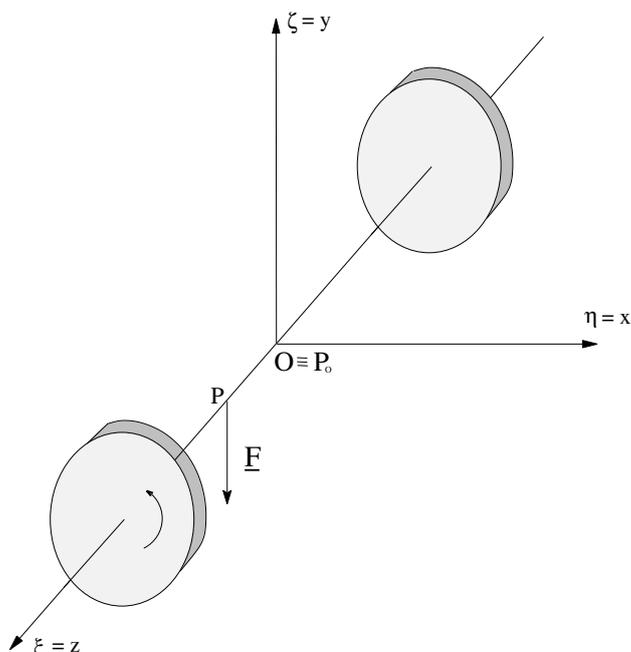


Figura 8.12 *Giroscopio*

Questo fenomeno viene chiamato **tenacia dell'asse giroscopico**.

Supponiamo ora che la forza  $\vec{F}$  sia riuscita a muovere l'asse giroscopico, allora si nota che ogni suo punto si muove con velocità parallela al momento della forza. Questa proprietà viene chiamata **tendenza al parallelismo al momento risultante**. È bene chiarire che non è l'asse che tende a disporsi parallelo al momento, bensì i suoi punti tendono a muoversi con velocità parallele al momento. Quindi si può concludere che l'asse giroscopico tende a spostarsi su un **piano parallelo al momento e non alla forza**.

Con riferimento alla figura,  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  è il sistema solidale al giroscopio che inizialmente si trova con l'asse  $z$  diretta secondo l'asse fisso  $\xi$ . Allora la velocità angolare è  $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$  e la forza  $\vec{F} = -F\vec{j}$ , ed il momento è

$$\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F} = l\vec{k} \wedge (-F\vec{j}) = Fl\vec{i}$$

Come sappiamo il giroscopio con un punto fisso ha tre gradi di libertà e possiamo scegliere i tre angoli di Eulero per individuarne la configurazione.

Supponiamo che  $\dot{\varphi}$  sia molto grande rispetto alle altre componenti della velocità angolare e che quindi si possa approssimare il momento della quantità di moto con la sola componente dovuta alla rotazione  $\dot{\varphi}$ , cioè

$$\vec{K} \cong I\dot{\varphi}\vec{k} \quad (8.43)$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse  $\vec{k}$  (solidale). Considerando che il momento della quantità di moto sia dato dall'espressione (8.43), la seconda equazione cardinale assume la forma

$$\frac{d\vec{K}}{dt} \cong \frac{d}{dt}(I\dot{\varphi}\vec{k}) \cong \vec{M}$$

ovvero

$$I\ddot{\varphi}\vec{k} + I\dot{\varphi}\frac{d\vec{k}}{dt} \cong Fl\vec{i}. \quad (8.44)$$

Da cui, in assenza di momento secondo la direzione  $\vec{k}$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$  implica  $\dot{\varphi} \cong \text{costante} = \dot{\varphi}_0$ , e l'equazione (8.44) si riduce a

$$I\dot{\varphi}_0\frac{d\vec{k}}{dt} \cong Fl\vec{i}, \quad (8.45)$$

da cui la variazione del versore dell'asse giroscopico è data da

$$\frac{d\vec{k}}{dt} \cong \frac{Fl}{I\dot{\varphi}_0}\vec{i}. \quad (8.46)$$

Dalla (8.46) si possono fare le seguenti considerazioni:

- fissato il momento, tanto più rapida è la rotazione tanto più è grande  $\dot{\varphi}_0$  e tanto più piccola è la variazione della direzione dell'asse giroscopico (**tenacia dell'asse giroscopico**).
- la variazione di  $\vec{k}$  avviene secondo il versore  $\vec{i}$ , ovvero l'asse giroscopico si sposta su un piano parallelo al momento  $\vec{M}$  (e non alla forza  $\vec{F}$ ) (**tendenza al parallelismo al momento sollecitante**).

### 8.9.2 Esempio: la trottola simmetrica pesante

Se la forza di massa agente sul rigido  $\mathcal{S}$ , dotato di struttura giroscopica, è del tipo

$$\vec{f}(P, t) = -g\vec{k}_1 \quad (8.47)$$

si dice che  $\mathcal{S}$  è una trottola simmetrica pesante.

Nell'ipotesi (8.47), dalle (8.21a/b) si ottiene

$$\vec{F}^{(e,a)} = -mg\vec{k}_1, \quad \vec{\mathcal{M}}_0^{(e,a)} = -mg(P_0 - O) \wedge \vec{k}_1 = mgb\vec{k}_1 \wedge \vec{k}, \quad (8.48)$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(e,a)} &= mgb\vec{k}_1 \wedge \vec{k} \cdot \vec{i} = mgb\vec{k}_1 \cdot \vec{k} \wedge \vec{i} = mgb\vec{k}_1 \cdot \vec{j}, \\ \mathcal{M}_2^{(e,a)} &= mgb\vec{k}_1 \wedge \vec{k} \cdot \vec{j} = -mgb\vec{k}_1 \cdot \vec{i}, \\ \mathcal{M}_3^{(e,a)} &= mgb\vec{k}_1 \wedge \vec{k} \cdot \vec{k} = -mgb\vec{k}_1 \cdot \vec{k} \wedge \vec{k} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

D'altra parte la (8.26) con  $\omega \cong \omega_3\vec{k}$  conduce alle relazioni

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(e,v)} &= \mathcal{M}_2^{(e,v)} = 0 \\ \mathcal{M}_3^{(e,v)} &= -K\vec{\omega} \cdot \vec{k} = -K\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

ove

$$K = \int_{\Sigma} k(Q)(y_1^2 + y_2^2) d\sigma > 0 \quad .$$

Facendo uso delle (8.49a/b) e delle (8.28) si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(a)} &= \frac{mgb}{\mathcal{J}_{11}} \vec{k}_1 \cdot \vec{j} \quad , \quad \varphi_2^{(a)} = -\frac{mgb}{\mathcal{J}_{11}} \vec{k}_1 \cdot \vec{i} \quad , \quad \varphi_3^{(a)} = 0 \\ \varphi_1^{(v)} &= \varphi_2^{(v)} = 0 \quad , \quad \varphi_3^{(v)} = -\frac{K\omega_3}{\mathcal{J}_{33}} \quad , \end{aligned}$$

e la (8.27/b) diviene:

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{\tau} \omega_3 \quad , \quad \tau = \frac{\mathcal{J}_{33}}{K} \quad . \quad (8.51)$$

La soluzione della (8.51) con la condizione iniziale  $\omega_3(t_0) \cong \omega_{30}$  si scrive

$$\omega_3(t) = \omega_{30} \exp \left[ -\frac{t-t_0}{\tau} \right] \quad , \quad t \in [t_0, \bar{t}_0] \quad . \quad (8.52)$$

Si conclude che la componente giroscopica  $\omega_3$  decresce esponenzialmente al crescere di  $t$ , con costante di tempo  $\tau$ ; dunque, nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_0 + \tau]$ ,  $\omega_3(t)$  resta sempre dello stesso ordine di grandezza di  $\omega_{30}$ . Si noti che  $\tau$  è direttamente proporzionale a  $\mathcal{J}_{33}$  e inversamente alla “costante di attrito”  $K$ .

### 8.9.3 Il giroscopio come indicatore di direzione fissa

Il sistema rigido  $\mathcal{S}$  abbia struttura giroscopica, con asse giroscopico coincidente con l'asse di versore  $\vec{k}$  del sistema di riferimento principale  $\mathcal{R}_0 = (P_0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Supposto che il punto fisso *coincida con*  $P_0$ , possiamo prendere  $O \equiv P_0$ ,  $O$  essendo come al solito l'origine del sistema fisso  $\mathcal{R}$ . Un tale sistema rigido  $\mathcal{S}$ , a struttura giroscopica e con  $P_0$  fisso in  $\mathcal{R}$ , dicesi comunemente *giroscopio*.

Nelle applicazioni pratiche, valgono le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1^{(e,a)} = \mathcal{M}_2^{(e,a)} = 0 \quad , \quad \mathcal{M}_3^{(e,a)} + \mathcal{M}_3^{(e,v)} = 0, \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_0] \\ \mathcal{M}_1^{(e,v)} = \mathcal{M}_2^{(e,v)} = 0, \quad \forall t \in [t_0 + \tau_0, \bar{t}_0] \end{cases} \quad (8.53)$$

ove  $\tau_0$  è assegnato (ed è in generale molto minore di  $\bar{t}_0 - t_0$ ).

Le (8.53) mostrano che il momento “motore”  $\vec{\mathcal{M}}^{(ea)}(P_0)$  (dovuto per esempio ad un motore elettrico di cui  $\mathcal{S}$  può essere il rotore) ha solo componente lungo l'asse giroscopico e che tale componente  $\mathcal{M}_3^{(e,a)}$  è uguale e di segno opposto alla componente  $\mathcal{M}_3^{(e,v)}$  dovuta agli attriti (ovvero, il motore fornisce esattamente l'energia che viene dissipata per attrito dal congegno meccanico che tiene fisso  $P_0$ ). Le componenti di  $\mathcal{M}_{P_0}^{(e,v)}$  normali all'asse giroscopico sono poi *non nulle soltanto* durante il piccolo intervallo di tempo  $[t_0, t_0 + \tau_0]$  e sono dovute a sollecitazioni di breve durata che si trasmettono ad  $\mathcal{S}$  attraverso la struttura che tiene fisso  $P_0$ . Notiamo pure che, per la (8.48), il peso ha momento nullo rispetto a  $P_0 \equiv O$ . Nelle ipotesi fatte il sistema (8.27) diviene:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 &= -A\omega_2\omega_3 + \varphi_1^{(v)} \\ \dot{\omega}_2 &= A\omega_3\omega_1 + \varphi_2^{(v)} \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{cases} \quad (8.54)$$

dove ora  $A = (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)/\mathcal{J}_1$  e  $\varphi_1^{(v)}, \varphi_2^{(v)}$  sono non nulli *solo* per  $t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$ .

La terza delle (8.54) implica la costanza (*rigorosa*) della componente giroscopica di  $\omega$ :

$$\omega_3 = \omega_{30} \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_0] \quad . \quad (8.55)$$

Corrispondentemente, le prime due di (8.54) si scrivono

$$\dot{\omega}_1 = -A'\omega_2 + \varphi_1^{(v)} \quad , \quad \dot{\omega}_2 = A'\omega_1 + \varphi_2^{(v)} \quad , \quad t \in [t_0, t_0 + \tau_0] \quad (8.56)$$

$$\dot{\omega}_1 = -A'\omega_2 \quad , \quad \dot{\omega}_2 = A'\omega_1 \quad , \quad t \in [t_0 + \tau_0, \bar{t}_0] \quad (8.57)$$

ove  $A' = A\omega_{30}$  (le (8.56, 8.57) sono *rigorose* dato che la (8.55) lo è).

Supposto che  $|\omega_{30}|$  sia sufficientemente grande (in un giroscopio di grandi dimensioni, usato per stabilizzare le navi,  $|\omega_{30}|$  può essere dell'ordine di 500 giri/minuto  $\cong 52.3$  rad/sec; in un giroscopio di piccole dimensioni, usato per i congegni direzionali di un missile,  $|\omega_{30}|$  può essere dell'ordine di 50.000 giri/minuto  $\cong 5.233$  rad/sec), la (8.38) mostra che  $|\omega_1(t)|$  e  $|\omega_2(t)|$  si mantengono dell'ordine di grandezza di  $\sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$ ,  $\forall t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$ .

In particolare si ha

$$|\omega_i(t_0 + \tau_0)| \leq \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} + 2\varepsilon \quad i = 1, 2 \quad .$$

Le (8.57) forniscono poi, al di fuori dell'intervallo iniziale,

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \quad ,$$

$$\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = \omega_1^2(t_0 + \tau_0) + \omega_2^2(t_0 + \tau_0), \quad \forall t \in [t_0 + \tau_0, \bar{t}_0] \quad . \quad (8.58)$$

Si conclude che  $|\omega_1(t)|$  e  $|\omega_2(t)|$  si mantengono dell'ordine di  $\sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$  durante *tutto* l'intervallo  $[t_0, \bar{t}_0]$ . Poiché nelle applicazioni pratiche  $|\omega_3|$  è molto più grande delle possibili  $|\omega_{10}|$  e  $|\omega_{20}|$ , la relazione

$$\vec{\omega}(t) \cong \omega_{30} \vec{k}(t)$$

è “essenzialmente esatta”. Segue

$$\frac{d}{dt} \vec{k}(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{k}(t) \cong \omega_{30} \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

e l'asse giroscopico è invariante nel tempo rispetto al sistema  $\mathcal{R}$ . Si conclude che il giroscopio  $\mathcal{S}$  può essere usato come indicatore di una direzione fissa in  $\mathcal{R}$  (per es. nei sistemi di guida dei sottomarini nucleari), anche in presenza di azioni perturbanti di durata  $\tau_0$ .

### 8.9.4 Esercizio: la vibrodina

Il corpo rigido  $\mathcal{S}'' = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , costituito da un cilindro omogeneo  $\mathcal{S}$  di massa  $m$ , altezza  $h$  e raggio  $a$ , e da due punti  $P_1$  e  $P_2$  situati in periferia di massa  $m_1$ , ruota con velocità di rotazione costante  $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}' = \dot{\theta} \vec{k}'$ , cfr. fig. 8.13. Determinare la reazione vincolare (esterna)  $\vec{R} = \vec{R}_{K_1} + \vec{R}_{K_2}$  che i cuscinetti  $K_1$  e  $K_2$  applicano sull'asse  $l$ .

*Suggerimento:*  $\mathcal{R} = (O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  è il sistema di riferimento fisso, mentre  $\mathcal{R}' = (O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  è il sistema di riferimento solidale, come in figura. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{33} &= \frac{1}{2} m a^2 + 2 m_1 a^2 \\ \mathcal{J}_{11} &= \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{12} m h^2 + 2 m_1 \left( a^2 + \frac{h^2}{4} \right) \\ \mathcal{J}_{22} &= \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{12} m h^2 + 2 m_1 \frac{h^2}{4} \\ \mathcal{J}_{12} &= \mathcal{J}_{13} = 0 \\ \mathcal{J}_{23} &= - \left( m_1 a \frac{h}{2} - m_1 a \frac{h}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

e quindi  $\mathcal{R}' = (O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  è principale. Il centro di massa  $G_0$  di  $S''$  appartiene al piano  $z' = 0$  ed è tale che

$$(m + 2m_1)(G - O') = m(P_0 - O') + 2m_1(Q - O') = 2m_1(Q - O')$$

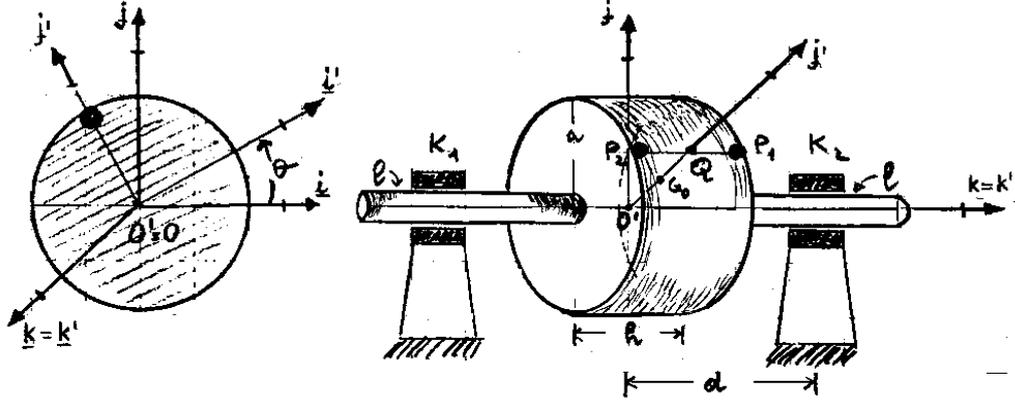


Figura 8.13 Modello schematico di vibrodina

dato che  $P_0$  è il centro di massa del volano  $\mathcal{S}$  (quindi  $P_0 \equiv O'$ ) e  $Q$  è il centro di massa del sistema  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , costituito dai due punti  $P_1$  e  $P_2$ , cfr. fig. 8.13. Segue

$$G_0 - O' = \frac{2m_1}{m + 2m_1}(Q - O') = \frac{2m_1}{m + 2m_1}a\vec{j}'$$

$$\frac{d}{dt}(G_0 - O') = \frac{2am_1}{m + 2m_1}\omega_0\vec{k}' \wedge \vec{j}' = -\frac{2am_1\omega_0}{m + 2m_1}\vec{i}'$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(G_0 - O') = -\frac{2am_1\omega_0}{m + 2m_1}\omega_0\vec{k}' \wedge \vec{i}' = -\frac{2am_1\omega_0^2}{m + 2m_1}\vec{j}' = -\frac{2am_1\omega_0^2}{m + 2m_1}[-\sin\theta\vec{i}' + \cos\theta\vec{j}].$$

Dalla prima equazione cardinale, scritta per il centro di massa  $G_0$  di  $S''$ , si ricava:

$$2am_1\omega_0^2[\sin\theta\vec{i}' - \cos\theta\vec{j}] = \vec{F}^{(e)} = \vec{R} - (m + 2m_1)g\vec{j} \quad ,$$

ove si è supposto che  $\vec{j}$  sia il versore dalla verticale ascendente.

Dunque, essendo  $\theta = \omega_0 t$ , si ha

$$\vec{R} = (m + 2m_1)g\vec{j} + 2am_1\omega_0^2[\sin(\omega_0 t)\vec{i}' - \cos(\omega_0 t)\vec{j}]. \quad (8.59)$$

Si conclude che il rigido ruotante  $S''$  agisce sul terreno con una forza periodica del tipo

$$[-(m + 2m_1)g + 2am_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)]\vec{j} \quad . \quad (8.60)$$

Infine dalla seconda equazione cardinale, tenendo conto che

$$\vec{\omega} = \omega_0\vec{k}' \quad , \quad \dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad ,$$

$$\sigma(O')\vec{\omega} = \mathcal{J}_{33}\omega_0\vec{k}' \quad , \quad \vec{\omega} \wedge \sigma(O')\vec{\omega} = \omega_0\vec{k}' \wedge \mathcal{J}_{33}\omega_0\vec{k}' = 0 \quad ,$$

si ottiene

$$\vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}^{(e)} \quad , \quad \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}^{(e,a)} + \vec{\mathcal{M}}_{O'}^{(e,v)} \quad . \quad (8.61)$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{(e,a)} &= (P_1 - O') \wedge (-m_1 g \vec{j}) + (P_2 - O') \wedge (-m_1 g \vec{j}) + \chi \vec{k}' = \\ &= -2m_1 g \vec{j} \wedge (Q - O') + \chi \vec{k}' = -2m_1 g \vec{j} \wedge a \vec{j}' + \chi \vec{k}',\end{aligned}$$

ove  $\chi \vec{k}' = \chi \vec{k}$  è il momento motore e si è tenuto conto del fatto che  $(P_1 - O') + (P_2 - O') = 2(Q - O')$ . Inoltre,

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{(e,v)} = (K_1 - O') \wedge \vec{R}_{K_1} + (K_2 - O') \wedge \vec{R}_{K_2} - \mu \vec{k}' = d \vec{k}' \wedge (\vec{R}_{K_2} - \vec{R}_{K_1}) - \mu \vec{k}' ,$$

ove  $-\mu \vec{k}' = -\mu \vec{k}$  è il momento frenante dovuto ai cuscinetti e si è tenuto conto del fatto che  $(K_2 - O') = -(K_1 - O') = d \vec{k}'$ .

In pratica, il momento motore  $\chi \vec{k}'$  è regolato in modo che sia

$$\chi \vec{k}' - 2m_1 g \vec{j} \wedge a \vec{j}' - \mu \vec{k}' = \vec{0} .$$

Di conseguenza, la condizione (8.61) implica:

$$d \vec{k}' \wedge (\vec{R}_{K_2} - \vec{R}_{K_1}) = \vec{0}$$

ovvero

$$\vec{R}_{K_2} - \vec{R}_{K_1} = \beta \vec{k}' , \quad (8.62)$$

dove  $\beta$  è una costante opportuna.

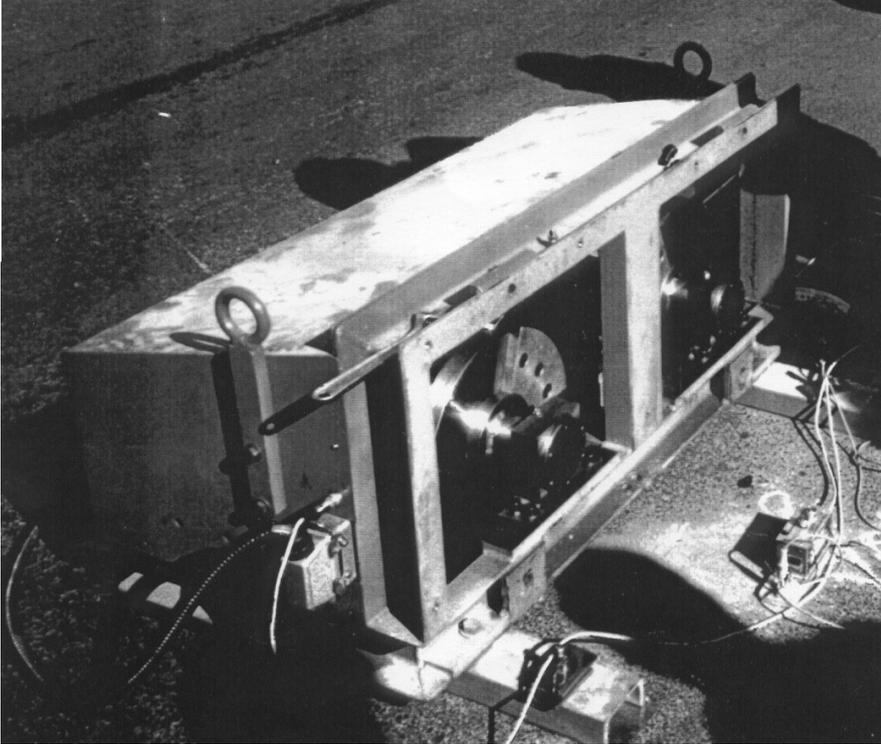


Figura 8.14 Vibrodina

Tenendo presente che  $\vec{R} = \vec{R}_{K_2} - \vec{R}_{K_1}$ , dalla (8.62) e dalla (8.60) segue:

$$\vec{R}_{K_1} = -\frac{1}{2}\beta\vec{k}' + \frac{1}{2}(m + 2m_1)g\vec{j} + am_1\omega_0^2[\sin(\omega_0 t)\vec{i} - \cos(\omega_0 t)\vec{j}] \quad ,$$

$$\vec{R}_{K_2} = \frac{1}{2}\beta\vec{k}' + \frac{1}{2}(m + 2m_1)g\vec{j} + am_1\omega_0^2[\sin(\omega_0 t)\vec{i} - \cos(\omega_0 t)\vec{j}] \quad ,$$

Nelle precedenti è  $\beta = 0$  (e quindi  $\vec{R}_{K_1} = \vec{R}_{K_2}$ ) se i cuscinetti sono montati in modo da *non* sottoporre l'asse  $l$  a compressione oppure a tensione.



# Indice

<b>8</b>	<b>DINAMICA DEI SISTEMI RIGIDI</b>	<b>1</b>
8.1	Sistemi rigidi liberi . . . . .	1
8.2	Rotazioni di un corpo rigido intorno ad un asse fisso . . . . .	2
8.2.1	Rotazione libera . . . . .	2
8.2.2	Rotazione con forza applicata sull'asse . . . . .	2
8.2.3	Problema della bicicletta . . . . .	4
8.3	Precessioni. Equazioni di Eulero . . . . .	6
8.4	Precessioni per inerzia. Moto alla Poinsot . . . . .	7
8.5	Interpretazione geometrica delle precessioni per inerzia . . . . .	10
8.6	Proprietà dinamiche degli assi principali di inerzia. . . . .	11
8.7	Moto di una trottola pesante con un punto fisso . . . . .	15
8.7.1	Equazioni di Lagrange applicate alla trottola pesante . . . . .	18
8.7.2	Commenti e considerazioni finali . . . . .	19
8.8	Giroscopio . . . . .	22
8.8.1	Rotazioni intorno ad un punto fisso: il caso $M_O^{(e)} \neq 0$ . . . . .	22
8.8.2	Effetti giroscopici . . . . .	26
8.9	Esercizi sul giroscopio . . . . .	27
8.9.1	Un semplice esperimento con un giroscopio . . . . .	27
8.9.2	Esempio: la trottola simmetrica pesante . . . . .	28
8.9.3	Il giroscopio come indicatore di direzione fissa . . . . .	29
8.9.4	Esercizio: la vibrodina . . . . .	30