

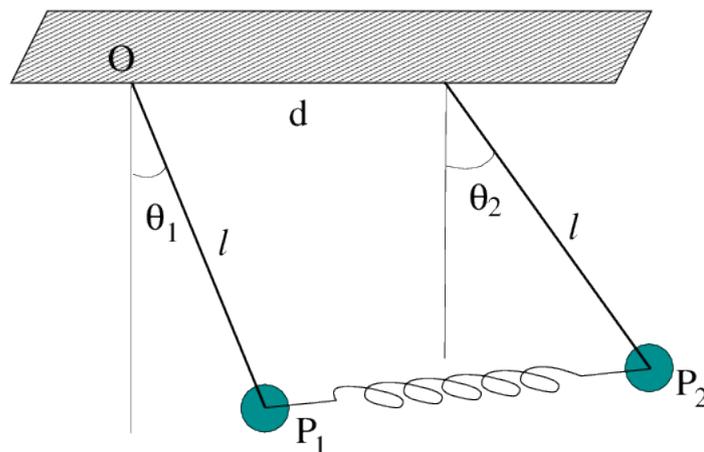
---

# COMPLEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

Appunti dalle lezioni del Prof. Giovanni FROSALI

## II PARTE: TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

---



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA U.DINI

FIRENZE - 19 APRILE 2018



# Indice

<b>1</b>	<b>LE PICCOLE OSCILLAZIONI</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Equazioni di moto in forma $\mathcal{L}$ agrangiana . . . . .	2
1.2.1	Equazioni di Lagrange con $\mathcal{L}$ agrangiana puramente quadratica . . . . .	3
1.3	Linearizzazione delle equazioni di moto . . . . .	3
1.4	Esempi . . . . .	6
1.4.1	Esempio: moto unidimensionale . . . . .	6
1.4.2	Esempio: il bipendolo . . . . .	7
1.5	Soluzione attraverso i modi normali . . . . .	8
1.6	Soluzione dell'equazioni di moto tramite disaccoppiamento . . . . .	12
1.7	Appendice 1: Elementi di Algebra Lineare . . . . .	13
<b>2</b>	<b>ESERCIZI sulle Piccole Oscillazioni</b>	<b>17</b>
2.1	Pendoli accoppiati . . . . .	17
2.2	Il doppiopendolo matematico . . . . .	24
2.3	Moto di un punto su una superficie . . . . .	27
2.4	Vibrazioni di molecole: la molecola diatomica . . . . .	30
2.5	La molecola triatomica . . . . .	31
2.6	Due oscillatori accoppiati . . . . .	35
2.7	Masse in serie . . . . .	38
2.8	Passaggio da un sistema discreto ad un sistema continuo . . . . .	40
2.9	Equazione delle corde vibranti . . . . .	43
2.9.1	Derivazione dell'equazione delle corde vibranti . . . . .	43
2.9.2	Soluzione dell'equazione di d'Alembert col metodo di Fourier . . . . .	45



# Capitolo 1

## LE PICCOLE OSCILLAZIONI

### 1.1 Introduzione

In molti campi della natura è facile incontrare sistemi che oscillano intorno alla loro configurazione di equilibrio stabile. La teoria che studia queste oscillazioni è molto sviluppata e si rivolge a seconda dei casi a sistemi meccanici, elettrici, chimici, biologici, ecc. Noi ci limitiamo a considerare alcuni semplici sistemi meccanici in condizioni molto particolari, tali da consentire una trattazione matematica semplice.

Nel secondo paragrafo presenteremo le ipotesi generali di lavoro e scriveremo le equazioni di moto in forma lagrangiana. Nel terzo paragrafo linearizzeremo le equazioni di moto e formuleremo l'ipotesi dei piccoli spostamenti nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile. Dopo alcuni semplici esempi per illustrare la tematica, nel quinto e nel sesto paragrafo risolveremo le equazioni di moto sfruttando due approcci differenti. Nel primo caso percorreremo la via analitica standard determinando le soluzioni particolari del problema (modi normali) che ci permetteranno di costruire la soluzione generale. Nel secondo seguiremo un approccio più algebrico ed arriveremo a diagonalizzare le equazioni di moto mediante un opportuno cambio di variabili. Nel settimo paragrafo riporteremo invece alcuni importanti risultati di algebra lineare che sono utili nella teoria.

Innanzitutto vediamo di illustrare il problema delle piccole oscillazioni.

Tutti sanno che la Lagrangiana del pendolo matematico, data da

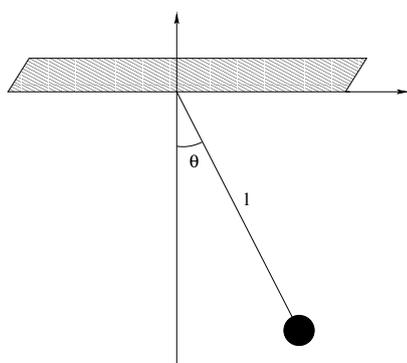
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

dà luogo all'equazione di moto nonlineare

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Per angoli piccoli è ormai risaputo che approssimando  $\sin \varphi$  con l'angolo  $\varphi$ , si ottiene l'equazione di moto per le piccole oscillazioni del pendolo

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (1.1)$$



Se si considera direttamente la  $\mathcal{L}$ agrangiana e si sviluppa il potenziale per angoli piccoli, si ha

$$mgl \cos \varphi = mgl \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} + o(\varphi^2) \right)$$

Quindi, è naturale approssimare la  $\mathcal{L}$ agrangiana (trascurando anche il termine costante) nel seguente modo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2.$$

E' facile verificare che questa  $\mathcal{L}$ agrangiana approssimata, che chiameremo  $\mathcal{L}$ agrangiana delle piccole oscillazioni dà luogo all'equazione di moto (1.1)

Il lettore attento osservi fin d'ora che la  $\mathcal{L}$ agrangiana che ha dato luogo all'equazione lineare (1.1) si è ottenuta separando dalla  $\mathcal{L}$ agrangiana originale la parte quadratica nella velocità e nell'angolo.

## 1.2 Equazioni di moto in forma $\mathcal{L}$ agrangiana

Si consideri un sistema di  $n$  punti materiali, a vincoli olonomi, bilateri, lisci e fissi, soggetto a forze conservative (nel senso di indipendenti dal tempo, posizionali e tali da ammettere un potenziale  $\mathcal{U}(P_1, P_2, \dots, P_n)$  di modo che, se  $\vec{F}_i$  è la risultante delle forze agenti sull' $i$ -esimo punto si abbia  $\text{grad}_{P_i}\mathcal{U} = \vec{F}_i$

Penseremo inoltre il nostro sistema caratterizzato localmente da  $l$  coordinate lagrangiane  $q_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, l$ , da noi opportunamente scelte, che indicheremo concisamente con

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l).$$

Sotto le nostre ipotesi, la  $\mathcal{L}$ agrangiana del sistema assumerà la forma

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + U(\vec{q})$$

dove, con riferimento al capitolo precedente,  $U(\vec{q}) = \mathcal{U}(P_1(\vec{q}), P_2(\vec{q}), \dots, P_n(\vec{q}))$  e

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(\vec{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Supporremo che le  $a_{hk}(\vec{q})$  e la  $U(\vec{q})$  siano funzioni lisce, almeno di classe  $C^2$ . Come ci insegna la Meccanica Razionale l'espressione di  $T$  è una forma quadratica definita positiva nelle  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l$ , ovvero  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0$  se e solo se  $\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0, \dots, \dot{q}_l = 0$ , e  $a_{hk}(\vec{q}) = a_{kh}(\vec{q})$ . Più in particolare

$$a_{hk}(\vec{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}.$$

Conosciuta l'espressione della  $\mathcal{L}$ agrangiana, possiamo scrivere le equazioni di Lagrange di seconda specie, che sappiamo essere equazioni differenziali ordinarie in virtù della forma di  $T$  e lineari nelle  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_l$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, & k = 1, 2, \dots, l \\ q_k(0) = q_k^0 \\ \dot{q}_k(0) = \dot{q}_k^0 \end{cases}$$

dove  $q_k^0$  e  $\dot{q}_k^0$  sono le condizioni iniziali, espresse in termini di coordinate lagrangiane. Queste equazioni ci permettono di avere una descrizione completa del moto.

Sotto le nostre ipotesi infatti i teoremi di esistenza e unicità ci assicurano l'esistenza di una e una sola  $l$ -pla di funzioni  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t)$ , che rappresentano la soluzione del nostro sistema di equazioni differenziali.

### 1.2.1 Equazioni di Lagrange con $\mathcal{L}$ Lagrangiana puramente quadratica

Si consideri il seguente esempio di un sistema a due gradi di libertà, caratterizzato dalle coordinate lagrangiane  $q_1$  e  $q_2$  avente una  $\mathcal{L}$  Lagrangiana della forma

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} b_{11} q_1^2 - b_{12} q_1 q_2 - \frac{1}{2} b_{22} q_2^2.$$

Scriviamo le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 & ; & \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -b_{11} q_1 - b_{12} q_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= a_{12} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 & ; & \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -b_{12} q_1 - b_{22} q_2, \end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} q_1 + b_{12} q_2 = 0 \\ a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{12} q_1 + b_{22} q_2 = 0 \end{cases}.$$

Introducendo le matrici  $A$  e  $B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e il vettore } \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

il sistema ottenuto si può scrivere nella forma

$$A \ddot{\vec{q}} + B \vec{q} = 0.$$

Si noti come in questo caso si sia ottenuto un sistema lineare di equazioni di moto.

## 1.3 Linearizzazione delle equazioni di moto

Innanzitutto ricordiamo che l'equilibrio statico di un sistema meccanico è caratterizzato dall'annullamento delle forze generalizzate, ovvero

$$Q_k = \left( \frac{\partial U}{\partial q_k} \right)_{(q_1^0, q_2^0, \dots, q_l^0)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Viceversa se le forze generalizzate sono nulle e le condizioni iniziali sono date da  $q_k(0) = q_k^o$  e  $\dot{q}_k(0) = 0$ , con  $k = 1, 2, \dots, l$ , allora le corrispondenti coordinate generalizzate rimangono costanti nel tempo ed uguali al valore  $q_k^o$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ .

Ricordiamo brevemente che una posizione di equilibrio è detta **stabile** se una piccola perturbazione del sistema, a partire dalla posizione di equilibrio (nello spazio delle fasi), ha come risultato solo un piccolo movimento attorno alla posizione di equilibrio. L'equilibrio è detto **instabile** se una perturbazione infinitesima (nello spazio delle fasi) produce un moto che non è limitato attorno alla posizione di equilibrio.

Il comportamento qualitativo del sistema intorno alla posizione di equilibrio può essere studiato indagando il diagramma delle fasi del sistema, ma questo studio esula dai nostri scopi. Limitiamoci per fissare le idee a considerare un sistema uni-dimensionale di cui si disponga dell'andamento del potenziale  $U$  o dell'energia potenziale  $V = -U$  in funzione dell'unica coordinata lagrangiana  $q$ . Il comportamento qualitativo può essere illustrato dal grafico del potenziale o dell'energia potenziale. Se l'energia potenziale ha un minimo  $\vec{q}^o$ , l'equilibrio sarà stabile in  $\vec{q}^o$ ; se l'energia potenziale ha un massimo od un punto di inflessione, allora l'equilibrio sarà instabile ed il sistema si muoverà verso posizioni con minore energia potenziale.

Torniamo al caso generale e supponiamo che  $\vec{q}^o$  sia un punto di equilibrio stabile del sistema. In termini esatti questo significa che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left\| (\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*) - (\vec{q}^o, 0) \right\| < \delta \\ \Rightarrow \left\| \left[ \vec{q}(t, \vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*), \dot{\vec{q}}(t, \vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*) \right] - (\vec{q}^o, 0) \right\| < \epsilon \quad \forall t > 0,$$

dove  $\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*$  sono posizione e velocità del punto perturbato, e  $\vec{q}(t, \vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*)$  e  $\dot{\vec{q}}(t, \vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*)$  sono posizione e velocità del punto in evoluzione, a partire dal punto  $(\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*)$ .

Si ricordi che in un punto simile l'energia potenziale  $V = -U$  presenta un minimo locale (mentre  $U$  un massimo locale). Qualitativamente si osserva che piccole perturbazioni del sistema, sia in posizione che in velocità, a partire dalla posizione di equilibrio stabile producono piccoli movimenti e piccole velocità attorno alla posizione di riposo.

Vogliamo ora soffermarci sui moti del sistema in un intorno sufficientemente piccolo di una sua posizione di equilibrio stabile.

Ci proponiamo quindi di sviluppare in serie di Taylor l'energia cinetica  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  con centro in  $(\vec{q}^o, 0)$  e l'energia potenziale  $V(\vec{q})$  con centro in  $\vec{q}^o$  e di limitarci a considerare solo i termini di ordine non superiore al secondo, nell'ipotesi che l'ampiezza dei moti in questione sia abbastanza piccola da giustificare tale assunzione.

Per l'energia potenziale  $V(\vec{q})$  si ha

$$V(\vec{q}) = V(\vec{q}^o) + \sum_{h=1}^l \left( \frac{\partial V}{\partial q_h} \right)_{(\vec{q}^o)} (q_h - q_h^o) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k} \right)_{(\vec{q}^o)} (q_h - q_h^o)(q_k - q_k^o) + \dots$$

dove i termini del primo ordine sono nulli dal momento che  $V$  ha un minimo locale in  $\vec{q}^o$ .

Per quanto riguarda l'energia cinetica, poiché essa è già una forma quadratica nelle  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l$ , per ottenere  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  con l'ordine di approssimazione desiderato

(il secondo) è sufficiente limitare lo sviluppo dei coefficienti  $a_{hk}(\vec{q})$  con centro in  $\vec{q}^0$  all'ordine zero, valutando tutti i coefficienti in  $\vec{q}^0$ . Otteniamo di conseguenza

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(\vec{q}^0) \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Se si fosse eseguito lo sviluppo di Taylor della  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  in modo completo trascurando i termini di ordine superiore al secondo, gli unici coefficienti non nulli sarebbero stati infatti quelli del tipo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}(\vec{q}^0, 0) = a_{hk}(\vec{q}^0).$$

Per descrivere analiticamente gli spostamenti del sistema dall'equilibrio, indichiamo con  $\eta_k$  le variazioni che le coordinate lagrangiane subiscono a partire dalla posizione di equilibrio

$$q_k = q_k^0 + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

ed assumiamo queste variazioni come nuove coordinate generalizzate per descrivere il moto, (si ricorda che le  $\eta_k$  dovranno soddisfare l'ipotesi fondamentale di essere spostamenti piccoli). Sostituendo otteniamo

$$V(\vec{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l V_{hk} \eta_h \eta_k,$$

dove abbiamo posto  $V(\vec{q}^0)=0$  dato che l'energia potenziale è definita a meno di una costante, e

$$T(\vec{\eta}, \dot{\vec{\eta}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l M_{hk} \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k.$$

Per brevità abbiamo introdotto le seguenti matrici

$$V_{hk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(\vec{q}^0) \quad \text{e} \quad M_{hk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}(\vec{q}^0, 0) = a_{hk}(\vec{q}^0).$$

Ricaviamo così la  $\mathcal{L}$ agrangiana

$$\mathcal{L}(\vec{\eta}, \dot{\vec{\eta}}) = T(\vec{\eta}, \dot{\vec{\eta}}) - V(\vec{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l (M_{hk} \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k - V_{hk} \eta_h \eta_k)$$

da cui possiamo ricavare le **equazioni di Lagrange di II specie per il moto delle piccole oscillazioni**

$$\begin{cases} \sum_{h=1}^l (M_{kh} \ddot{\eta}_h + V_{kh} \eta_h) = 0, & k = 1, 2, \dots, l \\ \eta_k(0) = \eta_k^0, & k = 1, 2, \dots, l \\ \dot{\eta}_k(0) = \dot{\eta}_k^0 \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $\eta_k^0$  e  $\dot{\eta}_k^0$  sono le condizioni iniziali per il moto linearizzato delle piccole oscillazioni. Da quanto detto in precedenza si deduce che:

1. la matrice  $M_{hk}$  è simmetrica definita positiva in quanto  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  è una forma quadratica definita positiva nelle  $\dot{q}_k$ ,
2. la matrice  $V_{hk}$  è simmetrica poiché è l'hessiano di  $V(\vec{q})$  in  $q^{\vec{0}}$  e definita positiva poiché  $V(\vec{q})$  ha in  $q^{\vec{0}}$  un minimo locale,
3. la  $\mathcal{L}$ agrangiana è una funzione quadratica delle  $\eta_k$  e delle  $\dot{\eta}_k$ , mentre le equazioni di moto sono lineari nelle  $\eta_k$  e nelle  $\dot{\eta}_k$ ,
4. le equazioni del sistema dipendono in generale da tutte le coordinate  $\eta_k$ , e per questa ragione le equazioni (lineari) del sistema si dicono accoppiate,
5. sotto le nostre condizioni di regolarità, tale sistema ammette una e una sola soluzione locale.

## 1.4 Esempi

Prima di procedere, vediamo due semplici esempi.

### 1.4.1 Esempio: moto unidimensionale

L'esempio più semplice, si ha quando, con riferimento a (1.2), si ha  $m_{hk} = m$ ,  $v_{hk} = c > 0$ , e  $h = k = 1$ . Indicando con  $\eta$  la coordinata lagrangiana, l'equazione di moto assume la forma

$$\ddot{\eta} + \frac{c}{m} \eta = 0, \quad (1.3)$$

ben nota come equazione del moto armonico. Introducendo la variabile complessa  $z$ , la (1.3) può essere messa nella forma

$$\ddot{z} + \frac{c}{m} z = 0. \quad (1.4)$$

Poiché questa equazione contiene solo coefficienti reali, è evidente che ogni soluzione di (1.4) fornisce una soluzione di (1.3) data dalla parte reale

$$\eta = \operatorname{Re} z.$$

Se cerchiamo soluzioni nella forma esponenziale  $z = z_0 e^{i\omega t}$ , sostituendo nella (1.4) si ottiene **l'equazione agli autovalori per la frequenza  $\omega$**

$$\left( \omega^2 - \frac{c}{m} \right) z_0 = 0.$$

Supponendo  $z_0 \neq 0$ , l'equazione dà

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

La soluzione generale di (1.4) si ottiene così per sovrapposizione lineare

$$z(t) = \alpha e^{i\sqrt{\frac{c}{m}} t} + \beta e^{-i\sqrt{\frac{c}{m}} t},$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti complesse. La soluzione del problema originale può essere ottenuta direttamente da

$$\eta = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}).$$

dove  $\bar{z}$  rappresenta il complesso coniugato. Se si scrive  $\alpha + \bar{\beta} = Ae^{i\gamma}$ , allora la soluzione si scrive nella forma

$$\eta = \eta(t) = \operatorname{Re} \left( Ae^{i(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \gamma)} \right) = A \cos \left( \sqrt{\frac{c}{m}}t + \gamma \right).$$

Questa è la forma comune in cui si trova la soluzione del moto armonico. Si osservi che questa soluzione generale reale fa uso solo dell'autovalore positivo e ciò è dovuto al fatto che abbiamo preso la parte reale della soluzione  $z$ .

### 1.4.2 Esempio: il bipendolo

Si consideri un pendolo doppio costituito da un punto materiale pesante di massa  $M$  sospeso ad un filo flessibile, inestendibile di lunghezza  $L$  e da un secondo pendolo di massa  $m$  sospeso sotto di esso ad un filo di lunghezza  $l$ . Il sistema si muove su un piano verticale, sotto l'azione del peso, così da avere due gradi di libertà.

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$  che la verticale discendente forma con i fili di sospensione. Lasciamo al lettore di verificare che l'energia cinetica del sistema dei due punti è data da

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m \left[ L^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2lL\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right],$$

dove  $L\dot{\varphi}$  è la velocità del primo punto materiale mentre  $l\dot{\theta}$  è la velocità del secondo punto relativamente al primo. L'energia cinetica per le piccole oscillazioni intorno a  $\varphi = 0$  e  $\theta = 0$  prende la forma

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m \left[ L^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \right] + mlL\dot{\varphi}\dot{\theta} = \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m \left[ L\dot{\varphi} + l\dot{\theta} \right]^2.$$

Si osservi che con la nostra scelta di coordinate l'energia cinetica contiene termini misti del tipo  $\dot{\varphi}\dot{\theta}$ . Introduciamo ora le nuove coordinate

$$\begin{cases} x &= L\varphi \\ y &= L\varphi + l\theta \end{cases}.$$

Un facile calcolo dà per l'energia cinetica in termini di  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2,$$

che risulta essere la forma standard di  $T$ , contenente solo termini puramente quadratici delle velocità lagrangiane. Un tale tipo di coordinate, che qui sono state introdotte con un po' di fantasia al fine di semplificare la forma dell'energia cinetica, prende il nome di **coordinate ortogonali**.

La funzione energia potenziale del sistema, che in generale ha la forma

$$V = -MgL \cos \varphi - mg(L \cos \varphi + l \cos \theta),$$

quando gli angoli sono piccoli si approssima facilmente con

$$V = V_0 + MgL \frac{\varphi^2}{2} + mg \left( L \frac{\varphi^2}{2} + l \frac{\theta^2}{2} \right).$$

Facendo uso delle coordinate ortogonali introdotte sopra per semplificare la forma dell'energia cinetica si ottiene

$$V = V_0 + \frac{(M+m)g}{2L} x^2 + \frac{mg}{2l} (y-x)^2,$$

che però contiene ancora dei termini misti. La  $\mathcal{L}$ agrangiana approssimata ha quindi la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{(M+m)g}{2L} x^2 - \frac{mg}{2l} (y-x)^2.$$

Scriviamo allora le equazioni di Lagrange di moto per le coordinate  $x$  ed  $y$

$$\begin{cases} \ddot{x} = - \left[ \frac{(M+m)g}{ML} + \frac{mg}{Ml} \right] x + \frac{mg}{Ml} y \\ \ddot{y} = \frac{g}{l} x - \frac{g}{l} y \end{cases}.$$

Le equazioni che si sono ottenute non sono ancora in una forma esauriente, perchè anche se sono esplicite rispetto alle derivate seconde, rimangono ancora accoppiate nel secondo membro.

Nei prossimi paragrafi vedremo come si risolve il problema del disaccoppiamento delle piccole oscillazioni nella sua generalità.

## 1.5 Soluzione attraverso i modi normali

Consideriamo le equazioni di moto linearizzate

$$\sum_{k=1}^l M_{hk} \ddot{\eta}_k + V_{hk} \eta_k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, l \quad (1.5)$$

che in forma matriciale diventano

$$M \ddot{\vec{\eta}} + V \vec{\eta} = 0.$$

Il nostro scopo è quello di risolvere il sistema di equazioni accoppiate. Seguendo la procedura standard, introduciamo le variabili complesse  $z_k$  tali che

$$\eta_k = \operatorname{Re}(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, l$$

ed il sistema prende la forma

$$M \ddot{\vec{z}} + V \vec{z} = 0. \quad (1.6)$$

Ora cerchiamo soluzioni nella forma  $\vec{z} = \vec{z}^0 e^{i\omega t}$ : così facendo cerchiamo dei moti per cui tutte le coordinate oscillano con la stessa frequenza (tali moti sono detti **modi normali di oscillazione**).

Sostituendo nelle equazioni di moto (1.6) si ha

$$\sum_{k=1}^l (V_{hk} - \omega^2 M_{hk}) z_k^o = 0, \quad h = 1, 2, \dots, l.$$

ovvero in forma matriciale

$$(V - \omega^2 M) \vec{z}^o = 0. \quad (1.7)$$

In questo modo abbiamo trasformato l'originale problema di un sistema lineare omogeneo di  $l$  equazioni differenziali accoppiate con coefficienti reali costanti in un sistema algebrico di  $l$  equazioni lineari omogenee per le ampiezze  $\vec{z}_k^o$ .

Tale sistema ammette soluzioni non banali solo se

$$\det(V - \omega^2 M) = 0,$$

che corrisponde ad una equazione polinomiale di grado  $l$  in  $\omega^2$ , che ha  $l$  radici

$$\omega_s^2, \quad s = 1, 2, \dots, l.$$

Gli  $\omega_s^2$  sono detti gli autovalori della matrice  $V$  relativi alla matrice  $M$ , mentre i vettori non nulli che soddisfano (1.7) sono gli autovettori di  $V$  relativi a  $M$  associati ad  $\omega$ .

Tali radici, date le proprietà di  $M$  e  $V$  (vedi Cor. 1.7.4) saranno gli elementi della diagonale della matrice  $B^T V B$  con  $B = A_1 M_1^{-1/2} A_2$  dove:

$A_1$  è la matrice ortogonale che diagonalizza  $M$

$$M_1^{-1/2} = \text{diag}(\mu_1^{-1/2}, \dots, \mu_l^{-1/2}), \quad \text{con } \mu_1, \dots, \mu_l \text{ autovalori di } M$$

$A_2$  è la matrice ortogonale che diagonalizza  $M_1^{-1/2} A_1^T V A_1 M_1^{-1/2}$ .

L'algebra lineare ci dice inoltre che tali radici saranno tutte positive (vedi Teor. 1.7.8). Se qualche  $\omega_s^2$  fosse stato negativo avremmo avuto  $\omega_s$  complesse e di conseguenza soluzioni illimitate contrariamente all'ipotesi dei piccoli spostamenti nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.

Il problema iniziale è stato ridotto al problema agli autovettori e autovalori del tipo  $(V - \omega^2 M) \vec{z}^o = 0$  equivalente a  $(M^{-1} V - \omega^2) \vec{z}^o = 0$ . Ricordiamo che, anche se  $M$  e  $V$  sono simmetriche definite positive, non è detto che  $M^{-1} V$  sia simmetrica.

La seconda formulazione del teorema spettrale 1.7.6 non è quindi applicabile. La versione più generale 1.7.4 ci dice invece che, se consideriamo la forma bilineare simmetrica definita positiva  $\vec{x} M \vec{y}$  e l'endomorfismo  $M^{-1} V \vec{x}$  simmetrico rispetto alla forma (infatti  $(M^{-1} V \vec{x})^T M \vec{y} = \vec{x}^T V M^{-1} M \vec{y} = \vec{x}^T V \vec{y} = \vec{x}^T M M^{-1} V \vec{y} = \vec{x}^T M (M^{-1} V \vec{y})$ ), allora esiste una base costituita dagli autovettori per l'endomorfismo, ortonormale rispetto alla forma.

A questo punto possiamo determinare la base di autovettori e sfruttarla per scrivere la soluzione generale del problema in modo tale da coprire tutto lo spazio delle

soluzioni. Prima però osserviamo che, se  $\vec{z}_s^o$  è l'autovettore di  $V$  relativo ad  $M$ , corrispondente a  $\omega_s^2$ , nelle combinazioni lineari

$$\sum_{k=1}^l (V_{hk} - \omega_s^2 M_{hk}) z_{sk}^o = 0 \quad h = 1, 2, \dots, l, \text{ per ogni } s,$$

i coefficienti sono tutti reali. Ciò implica che i rapporti

$$\frac{z_{sr}^o}{z_{sl}^o} \quad r = 1, 2, \dots, l$$

sono reali. È dunque possibile scrivere l'autovettore nella forma

$$\vec{z}_s^o = \vec{\rho}_s e^{i\Phi_s},$$

dove  $\Phi_s$  è una costante arbitraria reale e  $\rho_{sk}$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) sono costanti reali che determineremo in seguito.

Sostituendo  $\vec{z}_s^o = \vec{\rho}_s e^{i\Phi_s}$  nel sistema lineare iniziale si ha

$$V \vec{\rho}_s = \omega_s^2 M \vec{\rho}_s. \quad (1.8)$$

Analogamente se  $\vec{z}_r^o$  è l'autovettore di  $V$  relativo ad  $M$ , corrispondente all'autovalore  $\omega_r^2$ , si ha  $V \vec{\rho}_r = \omega_r^2 M \vec{\rho}_r$  da cui

$$\vec{\rho}_r^T V = \omega_r^2 \vec{\rho}_r^T M. \quad (1.9)$$

Moltiplicando a sinistra la (1.8) per  $\vec{\rho}_r^T$ , moltiplicando a destra la (1.9) per  $\vec{\rho}_s$  e sottraendo membro a membro si ha

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2) \vec{\rho}_r^T M \vec{\rho}_s = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots, l. \quad (1.10)$$

Ciò mostra evidentemente l'ortogonalità di  $\vec{\rho}_r, \vec{\rho}_s$  rispetto a  $M$ .

Le (1.8) permetteranno come è noto di determinare gli autovettori solo a meno di  $l$  costanti. L'indeterminazione può essere eliminata imponendo l'ortonormalità rispetto a  $M$  e cioè ponendo

$$\vec{\rho}_r M \vec{\rho}_s = \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots, l \quad (1.11)$$

(con  $\delta_{rs}$  si intende il simbolo di Kronecker).

Facciamo notare che ciò era quanto avevamo previsto col teorema spettrale 1.7.4. Inoltre sempre in virtù di tale teorema siamo sicuri dell'esistenza di una base ortonormale di autovettori anche nei casi degeneri in cui uno o più autovalori  $\omega_s^2$  abbiano molteplicità non unitaria. In tale caso basta determinare una base di autovettori (che non sarà necessariamente ortogonale a  $f$ ) e applicare poi la procedura di Gram-Schmidt 1.7.5 che ci fornisce un'altra base (dello stesso spazio) di autovettori ortogonale alla nostra forma  $f$ .

Così facendo la validità formale della (1.11) rimane inalterata. Tutto questo semplifica notevolmente la risoluzione del problema poiché altrimenti in questi casi degeneri si sarebbe dovuti ricorrere alla teoria generale dei sistemi di equazioni differenziali lineari.

Troviamo ora la soluzione generale del problema. Se  $\vec{z}_s^0 = \vec{\rho}_s e^{i\Phi_s}$  è l'autovettore di  $V$  relativo ad  $M$ , corrispondente all'autovalore  $\omega_s^2$ , possiamo determinare le soluzioni particolari corrispondenti e cioè

$$z'_{sk} = \rho_{sk} e^{i\Phi'_s} e^{i\omega_s t}, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

e

$$z''_{sk} = \rho_{sk} e^{i\Phi''_s} e^{-i\omega_s t}, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

dove  $\Phi'_s$  e  $\Phi''_s$  sono costanti arbitrarie reali. Sfruttando la linearità del sistema e il fatto che i  $\vec{\rho}_s$  costituiscono una base ortonormale di autovettori possiamo scrivere la soluzione generale come combinazione lineare di quelle particolari

$$z_k(t) = \sum_{s=1}^l \left( A_s \rho_{sk} e^{i\Phi'_s} e^{i\omega_s t} + B_s \rho_{sk} e^{i\Phi''_s} e^{-i\omega_s t} \right), \quad k = 1, 2, \dots, l$$

con  $A_s, B_s$  costanti arbitrarie reali. Nella soluzione generale compaiono  $4l$  costanti reali ( $A_s, B_s, \Phi'_s, \Phi''_s$ ) sufficienti a soddisfare le  $2l$  condizioni iniziali complesse

$$\begin{aligned} z_k(0) &= z_k^o, & k &= 1, 2, \dots, l, \\ \dot{z}_k(0) &= \dot{z}_k^o, & k &= 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Poiché avevamo posto  $\eta_k(t) = \text{Re}(z_k(t))$  si ha

$$\eta_k(t) = \sum_{s=1}^l \left( A_s \rho_{sk} \cos(\omega_s t + \Phi'_s) + B_s \rho_{sk} \cos(-\omega_s t + \Phi''_s) \right) \quad k = 1, 2, \dots, l$$

e quindi

$$\eta_k(t) = \sum_{s=1}^l C_s \rho_{sk} \cos(\omega_s t + \Phi'''_s), \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (1.12)$$

Nella soluzione generale compaiono  $2l$  costanti reali ( $C_s, \Phi'''_s$ ) sufficienti a soddisfare le  $2l$  condizioni iniziali reali

$$\begin{aligned} \eta_k(0) &= \eta_k^o, & k &= 1, 2, \dots, l, \\ \dot{\eta}_k(0) &= \dot{\eta}_k^o, & k &= 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Le parti

$$\rho_{sk} \cos(\omega_s t + \Phi'''_s), \quad k = 1, 2, \dots, l$$

di cui è composta la somma nella soluzione (1.12) sono dette **modi normali del sistema**, (etichettati con  $s$ ). Questi non sono altro che le componenti armoniche di ampiezza  $\rho_{sk}$  e frequenza  $\frac{\omega_s}{2\pi}$  note, e di fase  $\Phi'''_s$  dipendenti dalle condizioni iniziali. Si ricorda infine che i termini  $C_s \rho_{sk}$  dipendenti anch'essi dalle condizioni iniziali dovranno essere sufficientemente piccoli da rispettare l'ipotesi di piccoli spostamenti. La matrice degli autovettori  $B = (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \dots, \vec{\rho}_l)$  è detta matrice modale e su di essa torneremo nel prossimo paragrafo.

## 1.6 Soluzione dell'equazioni di moto tramite disaccoppiamento

In questo paragrafo, come già preannunciato nell'introduzione, riconsidereremo il problema precedente da un punto di vista algebrico e arriveremo a determinare un cambiamento di variabili che ci permetterà di diagonalizzare le equazioni di moto. Come vedremo tale cambio di variabili sarà intrinsecamente legato alla matrice modale.

La  $\mathcal{L}$ agrangiana e l'equazioni di moto linearizzate hanno la forma matriciale

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{\eta}}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{\eta}}^T M \dot{\vec{\eta}} - \vec{\eta}^T V \vec{\eta})$$

$$M \ddot{\vec{\eta}} + V \dot{\vec{\eta}} = 0. \quad (1.13)$$

Ricordiamo inoltre che  $M$  e  $V$  sono simmetriche e definite positive. Il nostro intento è ora cercare un cambiamento di coordinate che ci permetta il disaccoppiamento immediato delle equazioni tramite la diagonalizzazione simultanea di  $M$  e  $V$ . Sostituendo nel sistema (1.13)  $\vec{\eta} = B \vec{\zeta}$ , si ottiene

$$MB \ddot{\vec{\zeta}} + VB \dot{\vec{\zeta}} = 0$$

e, moltiplicando a sinistra per  $B^T$ ,

$$B^T MB \ddot{\vec{\zeta}} + B^T VB \dot{\vec{\zeta}} = 0.$$

La difficoltà sta nel trovare  $B$  tale che  $B^T MB = I$  e  $B^T VB = F$  con  $F$  diagonale. Un risultato simile ce lo assicura però l'algebra lineare. Se operiamo infatti il cambio di variabili  $\vec{\eta} = B \vec{\zeta}$  con  $B = A_1 M_1^{-\frac{1}{2}} A_2$  in cui

$A_1$  è la matrice ortogonale che diagonalizza  $M$   
 $M_1^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}(\mu_1^{-\frac{1}{2}}, \mu_2^{-\frac{1}{2}}, \dots, \mu_l^{-\frac{1}{2}})$  con  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$  autovalori di  $M$   
 $A_2$  è la matrice ortogonale che diagonalizza  $M_1^{-\frac{1}{2}} A_1^T V A_1 M_1^{-\frac{1}{2}}$ ,

il teorema 1.7.7 ci garantisce che non solo  $B^T MB = I$  ma anche  $B^T VB = F$ , dove  $F = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$ , ed inoltre, come aggiungono il corollario 1.7.4 ed il teorema 1.7.8,  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$  sono le radici dell'equazione

$$\det(\lambda M - V) = \det(V - \lambda M) = 0,$$

$\nu_k > 0$ , per  $k = 1, 2, \dots, l$ , e con riferimento al paragrafo precedente

$$\nu_k = \omega_k^2.$$

A questo punto

$$B^T MB \ddot{\vec{\zeta}} + B^T VB \dot{\vec{\zeta}} = 0$$

diventa finalmente  $\ddot{\vec{\zeta}} + F\vec{\zeta} = 0$  ovvero

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0, \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, l.$$

Allo stesso risultato si sarebbe ovviamente giunti anche operando direttamente sulla lagrangiana. Sostituendo avremmo avuto

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{\zeta}}, \vec{\zeta}) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{\zeta}}^T B^T M B \dot{\vec{\zeta}} - \vec{\zeta}^T B^T V B \vec{\zeta})$$

e quindi

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{\zeta}}, \vec{\zeta}) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{\zeta}}^T \dot{\vec{\zeta}} - \vec{\zeta}^T F \vec{\zeta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l (\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2).$$

Procedendo, anche in questo modo, si ottengono le equazioni di moto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_k} = \ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0, \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, l.$$

Il sistema lineare e disaccoppiato può essere ora facilmente risolto. Ricordando che tutti i  $\omega_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  sono positivi si ottiene

$$\zeta_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t), \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, l$$

dove le  $2l$  costanti reali sono sufficienti a soddisfare le  $2l$  condizioni iniziali

$$\vec{\zeta}(0) = \vec{\zeta}^o = B^{-1} \vec{\eta}^o$$

$$\dot{\vec{\zeta}}(0) = \dot{\vec{\zeta}}^o = B^{-1} \dot{\eta}^o.$$

E' interessante sottolineare come B non sia altro che la matrice modale, ovvero  $B = (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \dots, \vec{\rho}_l)$ . L'essere

$$\vec{\rho}_r^T M \vec{\rho}_s = \delta_{rs}, \quad \text{con } r, s = 1, 2, \dots, l$$

implica infatti che  $B^T M B = I$ . Inoltre sappiamo che

$$(V - \omega_s^2 M) \vec{\rho}_s = 0, \quad \text{ovvero } V \vec{\rho}_s = \omega_s^2 M \vec{\rho}_s, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, l;$$

moltiplicando a sinistra per  $\vec{\rho}_r^T$ , concludiamo quindi che

$$\vec{\rho}_r^T V \vec{\rho}_s = \omega_s^2 \vec{\rho}_r^T M \vec{\rho}_s = \omega_s^2 \delta_{rs}, \quad \text{con } r, s = 1, 2, \dots, l$$

ovvero che  $B^T V B = F$ .

## 1.7 Appendice 1: Elementi di Algebra Lineare

In questa sezione indichiamo con:

1.  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  finita

2.  $E$  un endomorfismo di  $V$  (applicazione lineare  $E : V \rightarrow V$ ) di matrice associata  $A$
3.  $f$  una forma bilineare (applicazione  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ) (una forma quadratica nel nostro caso).

e diamo le seguenti

### Definizioni

1.  $f$  è detta simmetrica se  $f(v, w) = f(w, v), \forall v, w \in V$
2.  $f$  è detta definita positiva se  $f(v, v) > 0, \forall v \neq 0$
3.  $E$  è detto simmetrico rispetto a  $f$  simmetrica se  $f(E(v), w) = f(v, E(w)), \forall v, w \in V$
4. Una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  è ortonormale rispetto a  $f$  se  $f(v_i, v_j) = \delta_{ij}$   
dove  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$

**Teorema 1.7.1.** *Gli autovalori di una matrice quadrata simmetrica sono reali.*

**Teorema 1.7.2.** *Se  $f$  è una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale  $V$  e  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormale rispetto a  $f$ , allora un endomorfismo  $E$  di  $V$  è simmetrico rispetto a  $f$  se e solo se la matrice associata a  $E$  rispetto alla base  $B$  è simmetrica.*

**Teorema 1.7.3.** *Siano  $\lambda_1, \lambda_2$  due autovalori distinti di un endomorfismo  $E$  di uno spazio vettoriale  $V$  e  $\psi_1, \psi_2$  due autovettori corrispondenti. Se  $E$  è simmetrico rispetto a una forma bilineare simmetrica  $f$ , allora  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono ortogonali rispetto a  $f$ , ossia  $f(\psi_1, \psi_2) = 0$ .*

**Teorema 1.7.4. TEOREMA SPETTRALE REALE (versione 1)**

*Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $f$  una forma bilineare simmetrica definita positiva su  $V$ . Se  $E$  è un endomorfismo simmetrico rispetto a  $f$ , allora esiste una base  $B$  di  $V$  costituita da autovettori per  $E$  ortonormale rispetto a  $f$ , ossia posto  $B = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  si ha  $E(\psi_i) = \lambda_i \psi_i$  e  $f(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$ .*

**Teorema 1.7.5. PROCEDIMENTO DI GRAM- SCHMIDT**

*Sia  $f$  una forma bilineare simmetrica definita positiva su uno spazio vettoriale  $V$  e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ . I vettori  $\{w_1, \dots, w_n\}$  dati da*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{f(v_2, w_1)}{f(w_1, w_1)} w_1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{f(v_3, w_2)}{f(w_2, w_2)} w_2 - \frac{f(v_3, w_1)}{f(w_1, w_1)} w_1 \\ w_n &= v_n - \frac{f(v_n, w_{n-1})}{f(w_{n-1}, w_{n-1})} w_{n-1} - \dots - \frac{f(v_n, w_1)}{f(w_1, w_1)} w_1 \end{aligned}$$

*formano una base di  $V$  e sono ortogonali rispetto a  $f$ .*

**Teorema 1.7.6.** *TEOREMA SPETTRALE (versione 2)*

*Sia  $E$  una applicazione lineare con matrice associata  $A$  simmetrica. Allora esiste una base ortonormale di  $V$  formata dagli autovettori di  $E$ .*

**Corollario 1.7.1.** *Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile (simile a una matrice diagonale). Inoltre esiste  $C$  ortogonale tale che  $C^T A C = D$  dove  $D$  è diagonale e possiede sulla diagonale principale gli autovalori di  $A$ .*

**Corollario 1.7.2.** *La matrice ortogonale  $C$  di cui sopra è formata dagli autovettori ortonormali di  $A$ .*

**Corollario 1.7.3.** *Se  $A$  è una matrice simmetrica definita positiva tutti i suoi autovalori sono reali e positivi.*

**Teorema 1.7.7.** *Siano  $M$  e  $V$  due matrici reali e simmetriche  $l \times l$  e sia  $M$  definita positiva. Allora esiste  $B$  non singolare tale che :*

$$B^T M B = I \quad e \quad B^T V B = F$$

con  $F$  diagonale.

Limitiamoci a dare la dimostrazione del Teorema 1.7.7 che gioca un ruolo importante nella teoria delle piccole oscillazioni.

**Dimostrazione**

Sia  $A_1$  la matrice ortogonale che diagonalizza  $M$ . Allora  $M_1 = A_1^T M A_1$  con  $M_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_l)$ , dove  $\mu_1, \dots, \mu_l$  sono gli autovalori di  $M$  e  $\mu_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, l$ . Esistono quindi  $M_1^{1/2} = \text{diag}(\mu_1^{1/2}, \dots, \mu_l^{1/2})$  e  $M_1^{-1/2} = \text{diag}(\mu_1^{-1/2}, \dots, \mu_l^{-1/2})$  tali che  $M_1 = M_1^{1/2} M_1^{1/2}$  e che  $M_1^{1/2} M_1^{-1/2} = I = M_1^{-1/2} M_1^{1/2}$  e di conseguenza

$$I = M_1^{-1/2} M_1^{1/2} = M_1^{-1/2} M_1 M_1^{-1/2} = M_1^{-1/2} A_1^T M A_1 M_1^{-1/2}.$$

Si osserva che  $V_1 = M_1^{-1/2} A_1^T V A_1 M_1^{-1/2}$  è simmetrica essendo simmetrica  $V$  (basta trasporla per notarlo).

Sia ora  $A_2$  la matrice ortogonale diagonalizzante  $V_1$ , allora

$$F = A_2^T V_1 A_2 = A_2^T M_1^{-1/2} A_1^T V A_1 M_1^{-1/2} A_2 = B^T V B$$

dove  $F = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_l)$  con  $\rho_1, \dots, \rho_l$  autovalori di  $V_1$  e  $B = A_1 M_1^{-1/2} A_2$ . Osserviamo infine che  $I = A_2^T A_2 = A_2^T M_1^{-1/2} A_1^T M A_1 M_1^{-1/2} A_2 = B^T M B$  da cui l'assunto.

**Corollario 1.7.4.** *Gli elementi  $\rho_1, \dots, \rho_l$  della diagonale della matrice  $F$  sono le radici dell'equazione  $\det(V - \lambda M) = \det(\lambda M - V) = 0$*

**Dimostrazione**

$(\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2) \dots (\lambda - \rho_l) = \det(\lambda I - F) = \det(\lambda B^T M B - B^T V B) = \det(B^T (\lambda M - V) B) = (\det B)^2 \det(\lambda M - V) = 0$ . Poiché  $\det B \neq 0$  l'affermazione è provata.

**Teorema 1.7.8.** *Se  $V$  è definita positiva anche  $F$  lo è e  $\rho_k > 0, k = 1, 2, \dots, l$ .*

**Dimostrazione**

Se  $\vec{q}$  è un vettore di  $\mathbb{R}^l$  e  $V$  è definita positiva allora  $\vec{q}^T V \vec{q} > 0 \quad \forall \vec{q} \in \mathbb{R}^l$ . Applicando il cambio di variabili  $\vec{q} = B\vec{\zeta}$  si ha

$$0 < (B\vec{\zeta})^T V (B\vec{\zeta}) = \vec{\zeta}^T B^T V B \vec{\zeta} = \vec{\zeta}^T F \vec{\zeta}, \quad \forall \vec{\zeta} \in \mathbb{R}^l$$

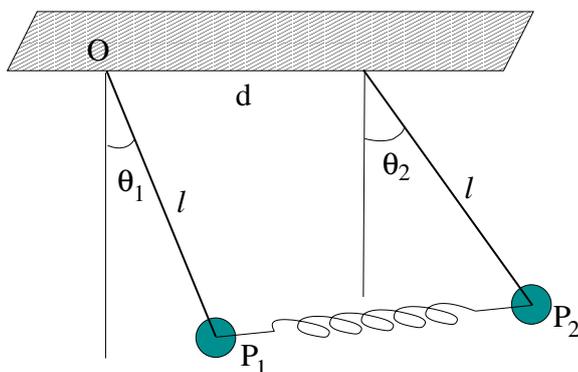
da cui si deduce che  $F$  è definita positiva e tutti i suoi autovalori (e cioè gli elementi della sua diagonale)  $\rho_1, \dots, \rho_l$  sono  $> 0$ .

## Capitolo 2

# ESERCIZI sulle Piccole Oscillazioni

In questo capitolo presenteremo alcuni classici problemi di piccole oscillazioni, allo scopo di illustrare l'applicazione dei metodi presentati nel precedente capitolo ed allo stesso tempo di analizzarne l'interpretazione pratica tramite i concetti di frequenze e modi normali di oscillazione.

### 2.1 Pendoli accoppiati



Si consideri il sistema costituito da due punti  $P_1$  e  $P_2$ , ciascuno di massa  $m$  e fissato ad un soffitto con un filo (flessibile ed inestendibile) di lunghezza  $l$  e collegati fra loro con una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $d$ , tutto situato in un piano verticale.

Innanzitutto ricaviamo posizioni e velocità di ciascuno dei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

Le posizioni, con riferimento ad un sistema con origine in  $O$ , sono date da

$$P_1 - O = (l \sin \theta_1, -l \cos \theta_1) , \quad P_2 - O = (d + l \sin \theta_2, -l \cos \theta_2)$$

quindi, derivando, le velocità sono

$$\dot{P}_1 = (l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1, l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1) , \quad \dot{P}_2 = (l\dot{\theta}_2 \cos \theta_2, l\dot{\theta}_2 \sin \theta_2) .$$

Il potenziale del peso è dato da

$$U_{peso} = mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2$$

mentre quello della forza elastica

$$\begin{aligned} U_{molla} &= -\frac{1}{2}k(|P_2 - P_1| - d)^2 \\ &= -\frac{1}{2}k \left[ \sqrt{(d + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_1 - l \cos \theta_2)^2} - d \right]^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

È facile verificare che, agli effetti dell'approssimazione del potenziale della molla, è possibile limitarsi a considerare il potenziale nel caso  $d = 0$ . Infatti consideriamo il potenziale nella forma

$$\begin{aligned} U'_{molla} &= -\frac{1}{2}k \left[ (l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_1 - l \cos \theta_2)^2 \right], \\ &= -\frac{1}{2}k \left[ 2l^2 - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right], \\ &\sim k l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \end{aligned}$$

dove nell'ultima espressione abbiamo tenuto conto che il potenziale può essere definito a meno di una costante. Questo ha la stessa matrice hessiana

$$\begin{bmatrix} -kl^2 & kl^2 \\ kl^2 & -kl^2 \end{bmatrix},$$

del potenziale  $U_{molla}$ , riportato in (2.1).

Si osservi infine che anche il potenziale nella forma

$$\begin{aligned} U''_{molla} &= -\frac{1}{2}kl^2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2, \\ &= -\frac{1}{2}kl^2(\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

presenta la stessa matrice hessiana. In questo caso il potenziale è scritto tenendo conto degli spostamenti orizzontali  $l \sin \theta_1$  ed  $l \sin \theta_2$  e trascurando le componenti verticali dei punti  $P_1$  e  $P_2$ , che possono essere trascurate perché infinitesimi d'ordine superiore.

Procediamo utilizzando il potenziale nella forma  $U'_{molla}$  e riscriviamo l'energia potenziale completa

$$V = -U_{peso} - U'_{molla} = \frac{1}{2}mgl^2\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl^2\theta_2^2 - kl^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

mentre l'energia cinetica ha la forma

$$T = \frac{1}{2}m\dot{P}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{P}_2^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2. \quad (2.2)$$

Dall'analisi delle derivate parziali dell'energia potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

si nota che un punto di stabilità per  $V$  è  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ . Poiché la matrice hessiana di  $V$  in  $(0,0)$  è

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 \end{bmatrix},$$

essa è definita positiva e quindi il punto di equilibrio è stabile.

L'energia potenziale per le piccole oscillazioni assume quindi la forma

$$V = \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_1^2 - kl^2\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_2^2$$

mentre l'energia cinetica data da (2.2) è già quella per le piccole oscillazioni.

Con riferimento alle notazioni introdotte, la matrice  $M$  nel punto di equilibrio stabile fornisce

$$\left[ \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\theta}_i \partial \dot{\theta}_j} \right]_{(0,0,0,0)} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}$$

Esamineremo nei dettagli questo esercizio, seguendo passo passo la ricerca delle soluzioni, e lasciamo alla fine come seguendo la teoria la soluzione possa essere ottenuta più concisamente.

Scriviamo la  $\mathcal{L}$ agrangiana delle piccole oscillazioni per il sistema dei due pendoli accoppiati nella seguente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2) - \frac{k}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2 - \frac{mg}{2l}(l^2\theta_1^2 + l^2\theta_2^2). \quad (2.3)$$

Introducendo le due nuove variabili

$$\eta_1 = l\theta_1, \quad \eta_2 = l\theta_2$$

si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{k}{2}(\eta_1 - \eta_2)^2 - \frac{mg}{2l}(\eta_1^2 + \eta_2^2). \quad (2.4)$$

Le equazioni di Lagrange di II specie sono

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)\eta_1 - k\eta_2 = 0 \\ m\ddot{\eta}_2 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)\eta_2 - k\eta_1 = 0. \end{cases}$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\begin{cases} \eta_1(t) = C\rho_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ \eta_2(t) = C\rho_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

che corrispondono a soluzioni che diano oscillazioni che oscillano con la stessa frequenza. Sostituiamo le espressioni di  $\eta_1$  e di  $\eta_2$  e

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) = -C\rho_1\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\eta}_2(t) = -C\rho_2\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

nelle equazioni di moto, ottenendo dopo semplici calcoli il seguente sistema in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{l} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}.$$

Si è ottenuto così un problema agli autovalori. Per cui cercando soluzioni non nulle si deve avere il seguente determinante nullo:

$$\begin{vmatrix} k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

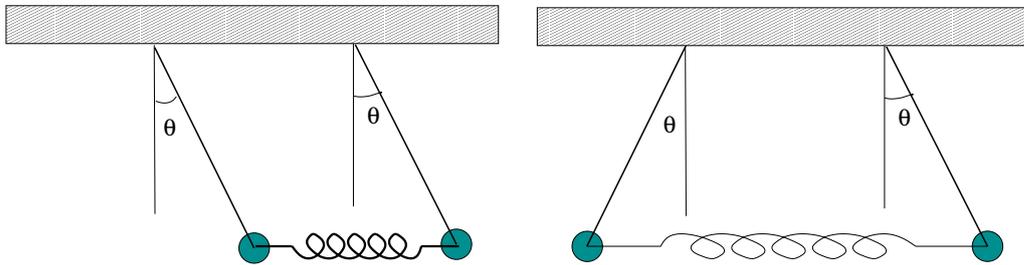
da cui

$$\left(\frac{mg}{l} - m\omega^2\right) \left(\frac{mg}{l} - m\omega^2 + 2k\right) = 0,$$

le cui soluzioni sono (a meno del segno)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}.$$

Le due frequenze corrispondono ai due moti principali



I due autovettori corrispondenti sono (a meno di una costante)

$$\begin{cases} \rho_1^1 \\ \rho_2^1 = \rho_1^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 = -\rho_1^2 \end{cases}$$

e dopo normalizzati

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si costruisce così la **matrice modale**

$$B = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e quindi, facendo uso della matrice modale e della matrice delle masse  $M$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix},$$

si possono introdurre le nuove coordinate. Se indichiamo con  $\xi$  la nuova variabile tale che  $\vec{\eta} = B\vec{\xi}$ , tenendo conto che  $B^{-1} = B^T M$  si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{\xi} = B^{-1}\vec{\eta} = B^T M \vec{\eta} &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1 + \eta_2) \\ \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1 - \eta_2) \end{cases}.$$

Eseguiamo il cambio di coordinate,

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\xi_1 + \xi_2) \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\xi_1 - \xi_2) \end{cases}. \quad (2.5)$$

direttamente sulla  $\mathcal{L}$ agrangiana (2.4), ottenendo la nuova  $\mathcal{L}$ agrangiana in forma diagonale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 - \omega_1^2 \xi_1^2 + \dot{\xi}_2^2 - \omega_2^2 \xi_2^2), \quad (2.6)$$

dove

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}.$$

sono le **frequenze normali**. Allora le equazioni di moto per le nuove coordinate diventano

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0 \end{cases}.$$

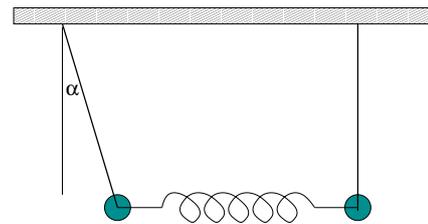
Quindi la soluzione è

$$\begin{cases} \xi_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \xi_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}.$$

dove  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\alpha_1$ , e  $\alpha_2$  dipendono dalle condizioni iniziali. Sempre con la matrice modale si può tornare alle vecchie coordinate (vedi (2.5))

$$\vec{\eta} = B\vec{\xi}.$$

Consideriamo il caso, con condizioni iniziali  $\eta_1(0) = \alpha$ ,  $\dot{\eta}_1(0) = 0$  e  $\eta_2(0) = 0$ ,  $\dot{\eta}_2(0) = 0$ .



Con un po' di algebra, si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $C_1 = C_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\alpha$ . Quindi

$$\begin{cases} \eta_1(t) = \frac{\alpha}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ \eta_2(t) = \frac{\alpha}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \eta_1(t) = \alpha \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = \alpha \cos \omega t \cos \Omega t \\ \eta_2(t) = \alpha \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = \alpha \sin \omega t \sin \Omega t \end{cases}.$$

Ricordando le frequenze normali  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  e  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}$ , se

$$k \ll \frac{mg}{l}$$

si ha  $\sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \sim 1 + \frac{kl}{mg} \sim 1$ . Quindi  $\omega_2$  supera di poco  $\omega_1$  se  $k \ll \frac{mg}{l}$ , allora in questa condizione si ha una modulazione tramite la frequenza fondamentale  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

Sotto queste condizioni,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  differiscono di poco fra loro, poniamo

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \gg \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega$$

Allora il fattore

$$\eta_1^m = \cos \omega t$$

varia molto lentamente rispetto al fattore

$$\eta_1^f = \cos \Omega t$$

Il fattore  $\eta_1^m$  è una modulazione armonica dell'oscillazione fondamentale  $\eta_1^f$ .

Questo fenomeno è conosciuto come modulazione di ampiezza: la portante, ovvero il segnale (oscillazione) con frequenza alta, viene modulato dal segnale con frequenza più bassa. Quando si sommano due oscillazioni le cui frequenze differiscono di poco si ha il ben noto fenomeno dei battimenti.

Con un po' di esperienza l'esercizio può essere risolto più brevemente facendo uso della teoria illustrata nel precedente capitolo. Per completezza ripercorriamo la soluzione di questo esercizio.

Infatti utilizzando direttamente le espressioni delle matrici  $M$  e  $V$ , le equazioni di moto linearizzate risultano essere

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

A questo punto procediamo come nella teoria determinando autovalori e autovettori della matrice  $V$  relativi alla matrice  $M$  del problema. L'equazione degli autovalori  $\det(V - \omega^2 M) = 0$  fornisce

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}.$$

Gli autovettori ortonormali corrispondenti si determinano risolvendo

$$(V - \omega_s^2 M)\vec{\rho}_s = 0 \quad s = 1, 2.$$

Ricaviamo così

$$\vec{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ml^2}}, \quad \vec{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ml^2}}.$$

I due moti normali di vibrazione sono dunque

$$\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi') \quad e \quad \vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi'')$$

corrispondenti ai moti del sistema.

La soluzione generale si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi') + B\vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi'')$$

dove  $(A, B, \Phi', \Phi'')$  sono 4 costanti reali sufficienti a soddisfare le 4 condizioni iniziali. E' facile vedere che il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

con  $B$  matrice modale

$$B = (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

disaccoppia le equazioni di moto.

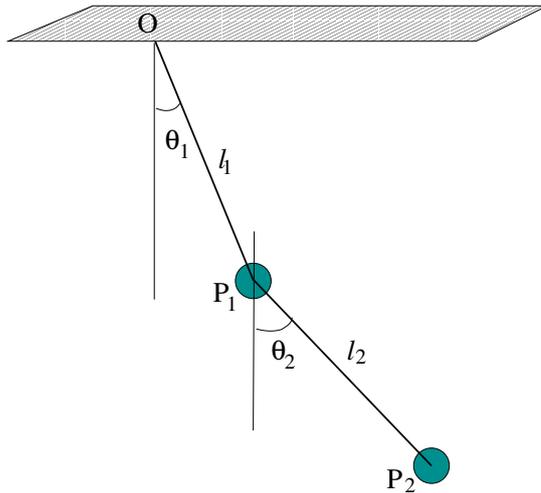
Infatti sostituendo  $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$  e premoltiplicando per  $B^T$  si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

L'inversione del cambio di coordinate fornisce nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Il doppiopendolo matematico



Si consideri in un piano verticale il sistema costituito da due punti  $P_1$  e  $P_2$ , di massa  $m_1$  ed  $m_2$  collegati il primo con un punto fisso con un filo (inestensibile e flessibile) lungo  $l_1$  e fra loro con un filo (inestensibile e flessibile) lungo  $l_2$ .

Innanzitutto ricaviamo posizioni e velocità di ciascuno dei due punti  $P_1$  e  $P_2$ .

$$P_1 - O = (l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1)$$

$$P_2 - O = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2)$$

quindi, derivando, le velocità

$$\dot{P}_1 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1),$$

$$\dot{P}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2).$$

L'energia cinetica dei due punti è data da

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)].$$

Il potenziale del peso è dato da

$$U = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$

È evidente che le posizioni  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = 0$  sono quelle di equilibrio stabile. L'energia cinetica per le piccole oscillazioni è quindi

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2],$$

mentre il potenziale per le piccole oscillazioni assume la forma

$$U = -\frac{1}{2} m_1 g l_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g (l_1 \theta_1^2 + l_2 \theta_2^2).$$

La  $\mathcal{L}$ agrangiana delle piccole oscillazioni per il sistema dei due punti risulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2.$$

Le equazioni di Lagrange di II specie sono

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

D'ora in avanti, per semplicità consideremo il caso in cui

$$l_1 = l_2 = l \quad \text{e} \quad m_1 = m_2 = m$$

e ponendo  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  le equazioni di moto diventano

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Si cercano soluzioni in forma complessa del tipo

$$\begin{cases} \theta_1(t) = C_1 e^{i\lambda t} \\ \theta_2(t) = C_2 e^{i\lambda t} \end{cases}$$

che corrispondono ad oscillazioni con la stessa frequenza, ma ampiezza diversa. Si ottiene il seguente sistema algebrico,

$$\begin{cases} 2(\omega^2 - \lambda^2)C_1 - \lambda^2 C_2 = 0 \\ -\lambda^2 C_1 + (\omega^2 - \lambda^2)C_2 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

che ammette soluzioni  $C_1$  e  $C_2$  non identicamente nulle se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\begin{vmatrix} 2(\omega^2 - \lambda^2) & -\lambda^2 \\ -\lambda^2 & \omega^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

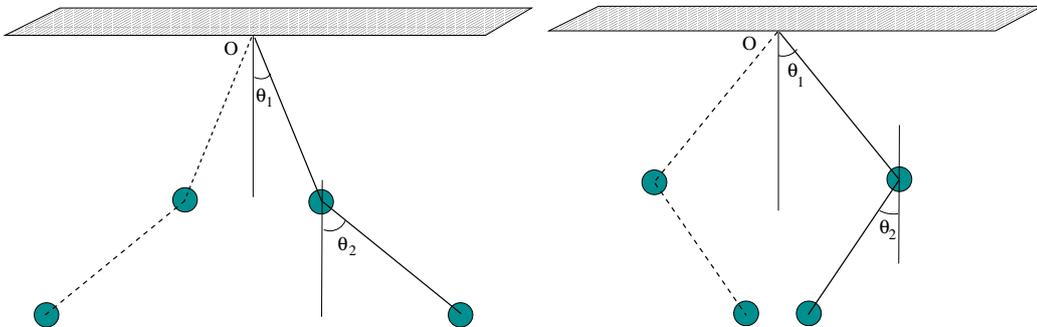
da cui

$$\lambda^4 - 4\omega^2\lambda^2 + 2\omega^4 = 0,$$

le cui soluzioni sono (a meno del segno)

$$\lambda_1 = \omega\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \omega\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Le due frequenze corrispondono ai due moti principali in figura.



Passiamo ora al problema del disaccoppiamento delle equazioni nel sistema (2.7). Un sistema di coordinate che gode di tale proprietà è sicuramente quello individuato

dalle oscillazioni indipendenti  $e^{i\lambda_1 t}$  e  $e^{i\lambda_2 t}$ , che costituiscono le autofunzioni della matrice associata al sistema (2.8). Il sistema ammette infinite (alla uno) soluzioni, una delle incognite deve essere scelta arbitrariamente, ad esempio ponendo  $C_1 = 1$ , l'altra soluzione si ottiene sottraendo nel sistema (2.8) la prima equazione dalla seconda, ottenendo

$$\omega^2 C_2 - (2\omega^2 - \lambda^2) = 0.$$

Quindi

$$C_2 = \frac{2\omega^2 - \lambda^2}{\omega^2}.$$

A conti fatti, in corrispondenza delle frequenze  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si ottengono le seguenti soluzioni per le ampiezze

$$C_{1,1} = 1, \quad C_{2,1} = \sqrt{2}; \quad C_{1,2} = 1, \quad C_{2,2} = -\sqrt{2}.$$

Le soluzioni particolari del sistema (2.7) sono

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= e^{i\lambda_1 t} + e^{i\lambda_2 t} \\ \theta_2(t) &= \sqrt{2}e^{i\lambda_1 t} - \sqrt{2}e^{i\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Considerando le oscillazioni indipendenti trovate, la fisica del problema suggerisce il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \theta_1 = \eta_1 + \eta_2 \\ \theta_2 = \sqrt{2}(\eta_1 - \eta_2) \end{cases},$$

ovvero le nuove coordinate in funzione delle vecchie sono

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{4}(2\theta_1 + \sqrt{2}\theta_2) \\ \eta_2 = \frac{1}{4}(2\theta_1 - \sqrt{2}\theta_2) \end{cases}.$$

La nuova  $\mathcal{L}$ agrangiana assume la forma diagonale

$$\mathcal{L} = ml^2 \left[ (2 + \sqrt{2}) \dot{\eta}_1^2 + (2 - \sqrt{2}) \dot{\eta}_2^2 \right] - 2mgl (\eta_1^2 + \eta_2^2).$$

Se vogliamo proprio le coordinate normali, dobbiamo fare l'ulteriore cambio di coordinate

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{2ml^2 (2 + \sqrt{2})} \eta_1 \\ \xi_2 = \sqrt{2ml^2 (2 - \sqrt{2})} \eta_2 \end{cases}.$$

La  $\mathcal{L}$ agrangiana diventa, ricordando le espressioni di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2} (\lambda_1^2 \xi_1^2 + \lambda_2^2 \xi_2^2).$$

e le equazioni di moto

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_2^2 \xi_2 = 0 \end{cases}.$$

Quindi si ottengono due soluzioni oscillatorie indipendenti di pulsazione  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$

$$\begin{cases} \xi_1(t) = A_1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) \\ \xi_2(t) = A_2 \cos(\lambda_2 t + \alpha_2) \end{cases}.$$

dove  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$ , e  $\alpha_2$  dipendono dalle condizioni iniziali. Lasciamo al lettore di costruire la matrice modale per questo esercizio. Con la matrice modale si potrà poi tornare alle vecchie coordinate.

**Nota 2.2.1.** Se si definiscono le matrici

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

allora il determinante (2.9) è dato da  $\det(V - \lambda^2 T) = 0$ .

## 2.3 Moto di un punto su una superficie

Supponiamo di avere la superficie di equazione parametrica

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(q_1, q_2) \\ y(q_1, q_2) \\ z(q_1, q_2) \end{pmatrix}$$

dove  $q_1, q_2$  sono le nostre coordinate lagrangiane. Se  $\dot{\vec{x}}$  è la velocità di un punto che si muove sulla superficie avremo

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{q_1} \dot{q}_1 + x_{q_2} \dot{q}_2 \\ y_{q_1} \dot{q}_1 + y_{q_2} \dot{q}_2 \\ z_{q_1} \dot{q}_1 + z_{q_2} \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \vec{x}_{q_1} \dot{q}_1 + \vec{x}_{q_2} \dot{q}_2.$$

Se pensiamo il punto soggetto solo al suo peso avremo

$$V = mgz(q_1, q_2).$$

Troviamo poi l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{1}{2} m \left[ \vec{x}_{q_1} \cdot \vec{x}_{q_1} \dot{q}_1^2 + 2\vec{x}_{q_1} \cdot \vec{x}_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \vec{x}_{q_2} \cdot \vec{x}_{q_2} \dot{q}_2^2 \right]$$

e definendo i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie

$$E(q_1, q_2) = \vec{x}_{q_1} \cdot \vec{x}_{q_1}, \quad F(q_1, q_2) = \vec{x}_{q_1} \cdot \vec{x}_{q_2}, \quad G(q_1, q_2) = \vec{x}_{q_2} \cdot \vec{x}_{q_2}$$

si ha

$$T = \frac{1}{2} m \left( E \dot{q}_1^2 + 2F \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G \dot{q}_2^2 \right).$$

La  $\mathcal{L}$  Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m(E\dot{q}_1^2 + 2F\dot{q}_1\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2) - mgz.$$

Supponiamo ora che  $(q_1^o, q_2^o)$  sia un minimo locale della superficie, ovvero che

$$z_{q_1}(q_1^o, q_2^o) = 0, \quad z_{q_2}(q_1^o, q_2^o) = 0$$

con

$$\begin{bmatrix} z_{q_1, q_1} & z_{q_1, q_2} \\ z_{q_1, q_2} & z_{q_2, q_2} \end{bmatrix}_{(q_1^o, q_2^o)}$$

definita positiva.

Consideriamo ora la lagrangiana e sviluppiamo con Taylor in  $(q_1^o, q_2^o, 0, 0)$  trascurando i termini di ordine superiore al secondo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= \frac{1}{2}m(E^* \dot{q}_1^2 + 2F^* \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G^* \dot{q}_2^2) \\ &- \frac{1}{2}mg \left[ z_{q_1, q_1}^* (q_1 - q_1^o)^2 + 2z_{q_1, q_2}^* (q_1 - q_1^o)(q_2 - q_2^o) + z_{q_2, q_2}^* (q_2 - q_2^o)^2 \right] \end{aligned}$$

dove  $E^*, F^*, G^*, z_{q_1, q_1}^*, z_{q_1, q_2}^*, z_{q_2, q_2}^*$  sono  $E, F, G, z_{q_1, q_1}, z_{q_1, q_2}, z_{q_2, q_2}$  calcolati in  $(q_1^o, q_2^o)$ . Poniamo infine

$$Q_1 = q_1 - q_1^o, \quad Q_2 = q_2 - q_2^o$$

in modo da avere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2) &= \frac{1}{2}m(E^* \dot{Q}_1^2 + 2F^* \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + G^* \dot{Q}_2^2) \\ &- \frac{1}{2}mg \left[ z_{q_1, q_1}^* Q_1^2 + 2z_{q_1, q_2}^* Q_1 Q_2 + z_{q_2, q_2}^* Q_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni di Lagrange possiamo ora scrivere le equazioni di moto linearizzate

$$m \begin{bmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{pmatrix} + mg \begin{bmatrix} z_{q_1, q_1}^* & z_{q_1, q_2}^* \\ z_{q_1, q_2}^* & z_{q_2, q_2}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dal problema agli autovalori corrispondente

$$\det \left[ mg \begin{bmatrix} z_{q_1, q_1}^* & z_{q_1, q_2}^* \\ z_{q_1, q_2}^* & z_{q_2, q_2}^* \end{bmatrix} - \omega^2 m \begin{bmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{bmatrix} \right] = 0$$

si possono infine trovare le frequenze proprie e i modi normali di vibrare del sistema. Per curiosità facciamo notare che se consideriamo i coefficienti della seconda forma fondamentale di una superficie

$$e(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{q_1, q_1} & y_{q_1, q_1} & z_{q_1, q_1} \\ x_{q_1} & y_{q_1} & z_{q_1} \\ x_{q_2} & y_{q_2} & z_{q_2} \end{vmatrix}$$

$$f(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{q_1, q_2} & y_{q_1, q_2} & z_{q_1, q_2} \\ x_{q_1} & y_{q_1} & z_{q_1} \\ x_{q_2} & y_{q_2} & z_{q_2} \end{vmatrix}$$

$$g(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{q_2, q_2} & y_{q_2, q_2} & z_{q_2, q_2} \\ x_{q_1} & y_{q_1} & z_{q_1} \\ x_{q_2} & y_{q_2} & z_{q_2} \end{vmatrix}$$

è facile far vedere che, poiché nel nostro caso si ha  $z_{q_1} = z_{q_2} = 0$ ,

$$e^* = z_{q_1, q_1}^*, \quad f^* = z_{q_1, q_2}^*, \quad g^* = z_{q_2, q_2}^*.$$

Ricordando che le curvature principali di una superficie  $K_1, K_2$  in un suo punto qualsiasi  $(q_1^o, q_2^o)$  sono gli autovalori del problema

$$\det \left( \begin{bmatrix} e^* & f^* \\ f^* & g^* \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{bmatrix} \right) = 0$$

si nota subito che

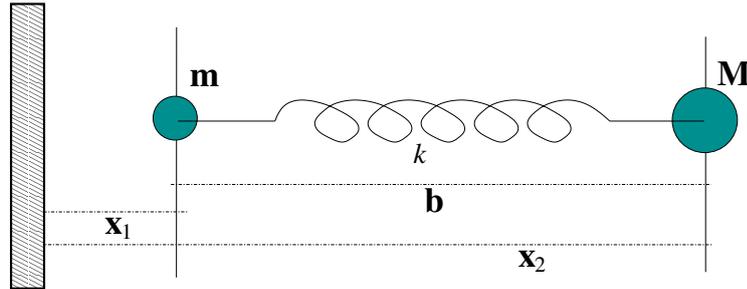
$$K_1 = \frac{\omega_1^2}{g}, \quad K_2 = \frac{\omega_2^2}{g}.$$

Le frequenze proprie delle piccole oscillazioni nell'intorno del punto di equilibrio stabile  $(q_1^o, q_2^o)$  sono quindi proporzionali alle curvature principali della superficie in quel punto.

## 2.4 Vibrazioni di molecole: la molecola diatomica

Si vogliono studiare le vibrazioni di una molecola. Si consideri, in questo primo esercizio, una molecola diatomica, che possiamo modellare come due masse  $m$  ed  $M$ , connesse con una forza elastica di costante  $k$  e lunghezza a riposo  $b$  e libere di oscillare lungo la linea retta che unisce le due masse.

Siano  $x_1$  e  $x_2$  le coordinate come in figura.



Notiamo che non si può parlare di spostamento dall'equilibrio perché la coordinata  $x_1$  può essere qualsiasi. L'energia cinetica e l'energia potenziale sono:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - b)^2.$$

Innanzitutto rendiamo l'espressione del potenziale omogenea con la trasformazione

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 - b,$$

ottenendo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(z_2 - z_1)^2.$$

Combinando opportunamente le coordinate  $z_1$  e  $z_2$  si può passare alle **coordinate normali**

$$\eta_1 = \frac{m}{M}z_1 + z_2, \quad \eta_2 = z_1 - z_2,$$

ovvero

$$z_1 = \frac{M}{m+M}(\eta_1 + \eta_2), \quad z_2 = \frac{M}{m+M}\eta_1 - \frac{m}{m+M}\eta_2.$$

La  $\mathcal{L}$ agrangiana della molecola diatomica diventa

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{m+M} \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} k \eta_2^2.$$

Lasciamo al lettore di verificare che le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{k(m+M)}{mM} \eta_2 = 0 \end{cases}$$

Se eccitiamo il modo  $\eta_1$ , allora dobbiamo sopprimere il modo  $\eta_2$ , ovvero

$$0 = \eta_2 = z_1 - z_2$$

cioè

$$x_1 = z_1 = z_2 = x_2 - b$$

col risultato che durante il movimento  $x_1$  e  $x_2$  devono differire per una costante, ovvero devono muoversi di traslazione uniforme. In questo caso  $\omega_1 = 0$ , e non si ha oscillazione.

Se eccitiamo il modo  $\eta_2$ , allora dobbiamo sopprimere il modo  $\eta_1$ , ovvero

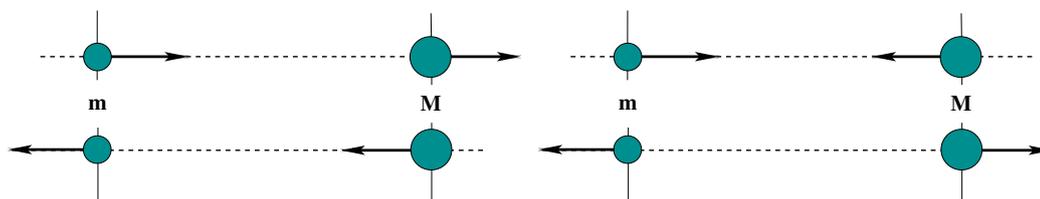
$$0 = \eta_1 = \frac{m}{M}z_1 + z_2$$

cioè

$$x_1 = z_1 = -\frac{M}{m}z_2 = -\frac{M}{m}(x_2 - b).$$

Si noti che abbiamo  $mx_1 + Mx_2 = Mb$ , per cui il centro di massa  $x_0 = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M} =$  costante rimane fermo. Questo equivale a due punti che si muovono oscillando intorno al centro di massa. In questo caso la frequenza con la quale le due masse oscillano è

$$\omega_2^2 = \frac{k(m+M)}{mM}$$



Nella figura sono mostrati schematicamente i due possibili modi normali della molecola diatomica.

## 2.5 La molecola triatomica

Si consideri una molecola di diossido di carbonio  $CO_2$ .  $CO_2$  è una molecola lineare triatomica, e se il moto è vincolato ad una retta, i suoi gradi di libertà sono tre e tre sono i modi normali.

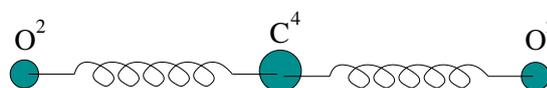
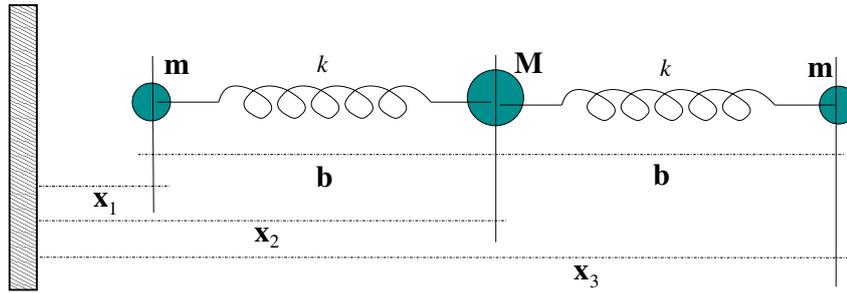


Figura 2.1. Molecola di  $CO_2$

Si modella una molecola triatomica con due masse laterali di massa  $m$  ed una massa centrale di massa  $M$ , connesse con due forze elastiche di costante  $k$  aventi lunghezza a riposo  $b$ .



Con le variabili lagrangiane scelte come in figura, le espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - b)^2.$$

L'analisi di  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$  con  $i = 1, 2, 3$  ci dice che  $V$  è stabile in tutti i punti del tipo

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s + b \\ s + 2b \end{pmatrix} \quad s \in R.$$

La forma delle matrici  $M$  e  $V$  è invece

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}.$$

E' facile vedere che la matrice  $V$  ha determinante nullo ed è solo semidefinita positiva. L'essere  $\det V = 0$  indica che a rigore non possiamo dire nulla sul tipo di equilibrio in questione. È intuitivamente chiaro però che si tratta di **equilibrio indifferente** (fatto che risalta all'occhio se osserviamo la struttura di  $V$ ). Il fatto invece che  $V$  sia solo semidefinita positiva implica la possibile esistenza di autovalori nulli nel problema agli autovalori e autovettori che analizzeremo tra poco.

Poniamo ora

$$\eta_i = x_i - x_{0i} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad \text{con } s = 0,$$

di modo che

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 \quad e \quad V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2,$$

mentre le equazioni di moto diventano

$$M\ddot{\vec{\eta}} + V\vec{\eta} = 0,$$

ovvero

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 - k\eta_2 & = 0 \\ M\ddot{\eta}_2 + 2k\eta_2 - k\eta_1 - k\eta_3 & = 0 \\ m\ddot{\eta}_3 + k\eta_3 - k\eta_2 & = 0 \end{cases} .$$

Il problema agli autovalori e autovettori di  $V$  relativi ad  $M$  è il seguente:

$$(V - \omega^2 M)\vec{\rho} = 0$$

che richiede

$$\det(V - \omega^2 M) = 0.$$

Da esso ricaviamo

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right).$$

L'annullarsi di un autovalore deriva dal fatto che la molecola può traslare rigidamente lungo il proprio asse, moto questo che non ha nulla a che vedere con una vibrazione. In tal caso l'energia potenziale è nulla benché le  $\eta_i$  con  $i = 1, 2, 3$  siano tutte uguali e diverse da zero, in accordo col fatto che  $V$  è solo semidefinita positiva. (Si ricordi che si aveva una traslazione rigida nella molecola diatomica, che avevamo ricavato dalle equazioni di moto senza averne dato una interpretazione matematica.)

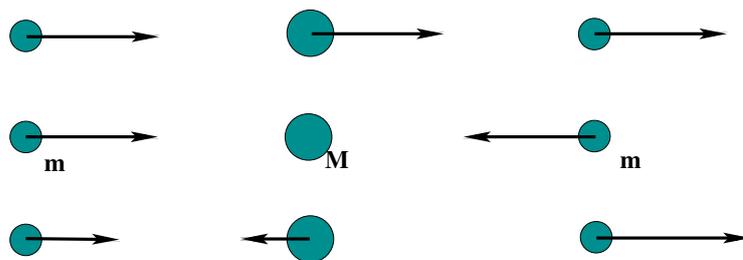
Sostituendo i valori di  $\omega^2$  in

$$(V - \omega^2 M)\vec{\rho} = 0$$

possiamo trovare gli autovettori del problema ovvero

$$\vec{\rho}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2M(2+\frac{M}{m})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}$$

corrispondenti ai modi normali



In questo caso la matrice modale è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{2M(2+\frac{M}{m})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}.$$

Facciamo notare come per determinare  $B$  si sia partiti dalla  $V$  singolare e semidefinita positiva. I teoremi 1.7.4 e 1.7.7 continuano tuttavia a valere (solo che la matrice  $M^{-1}V$  associata all'endomorfismo del teorema T4 diviene ora singolare mentre la matrice  $V$  del teorema 1.7.7 è anch'essa singolare ma continua ad essere simmetrica).

La matrice  $B$  mantiene quindi le sue proprietà diagonalizzanti. Un prezzo però lo paghiamo: la singolarità di  $V$  si riflette infatti nella singolarità di  $B^T V B = F$ , sulla diagonale principale della quale compare, come abbiamo visto, un autovalore nullo. È facile vedere a questo punto che il cambiamento di coordinate

$$\vec{\eta} = B\vec{\zeta}$$

disaccoppia le equazioni di moto. Infatti sostituendo  $\vec{\eta} = B\vec{\zeta}$  e premoltiplicando per  $B^T$  si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_2 \\ \ddot{\zeta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m}(1 + \frac{2m}{M}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

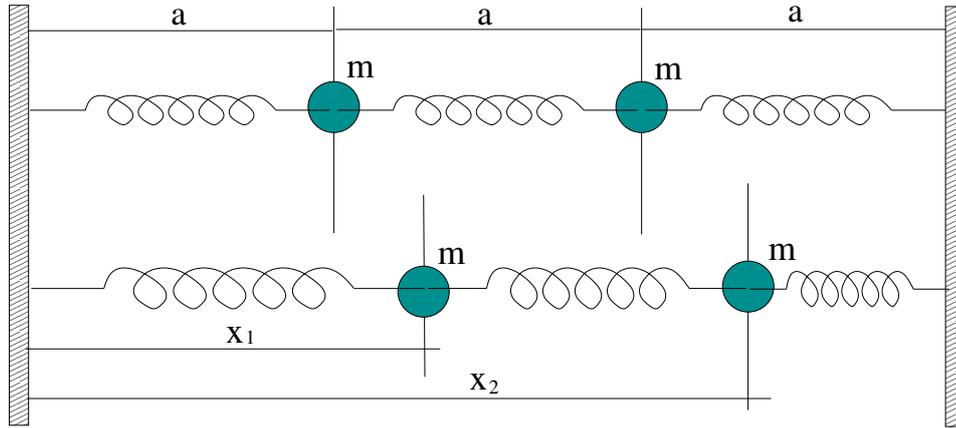
La prima equazione di moto  $\ddot{\zeta}_1 = 0$  conferma in sintonia con quanto detto precedentemente la presenza dell'aspetto traslatorio del moto. Osserviamo infine che se avessimo voluto avremmo potuto impostare il problema in modo che la radice  $\omega_1^2 = 0$  (che può trarre in inganno) rimanesse esclusa sin dal principio. Avremmo per esempio potuto imporre fin dall'inizio che il centro di massa (che normalmente si muove di moto rettilineo uniforme essendo il sistema isolato) resti fisso nell'origine cioè che

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

In tal caso lo studio della molecola triatomica si sarebbe ridotto ad un problema con due soli gradi di libertà.

## 2.6 Due oscillatori accoppiati

Si consideri un sistema di due masse collegate fra loro con molle e con due pareti distanti fra loro  $3a$  come in figura. Le due masse hanno la stessa massa  $m$ , sono collegate fra loro con molle di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo uguale ad  $a$ .



Introdotte le coordinate come in figura, le forze agenti sui punti sono

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - a) + k(x_2 - x_1 - a) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1 - a) + k(2a - x_2). \end{aligned}$$

L'energia potenziale ed l'energia cinetica del sistema sono

$$\begin{aligned} V = -U &= \frac{1}{2}k(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(2a - x_2)^2 \\ T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2. \end{aligned}$$

L'analisi di

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

ci dice che  $V$  ha un punto di stabilità in  $(a, 2a)$ . La matrice  $V$  in tale punto è

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{(a, 2a, 3a)} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

ed essendo definita positiva indica che il punto di equilibrio è stabile.

La matrice  $M$  è invece:

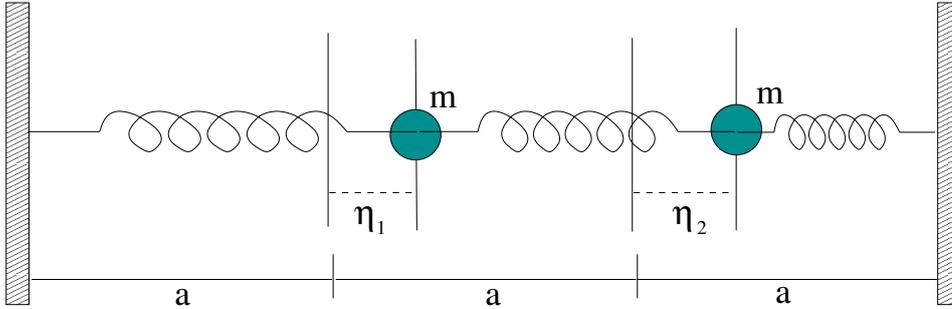
$$\left[ \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right]_{(a, 2a, 0, 0)} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Con il cambio di coordinate

$$\eta_1 = x_1 - a, \quad \eta_2 = x_2 - 2a,$$

(che non sono altro che i piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio) otteniamo la  $\mathcal{L}$ agrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}k\eta_1^2 - \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 - \frac{1}{2}k\eta_2^2$$



e quindi le equazioni di moto (lineari) sono

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Possiamo a questo punto trovare autovalori e autovettori di  $V$  rispetto ad  $M$ .

L'equazione  $\det(V - \omega^2 M) = 0$  ci fornisce

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}. \quad (2.10)$$

Gli autovettori ortonormali rispetto ad  $M$  corrispondenti si determinano risolvendo

$$(V - \omega_s^2 M)\vec{\rho}_s = 0, \quad s = 1, 2.$$

Imponiamo che sia nullo il suo determinante, e con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dati da (2.10) ricaviamo così gli autovettori

$$\vec{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \vec{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

I due modi normali di vibrazione sono dunque

$$\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi'), \quad \vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi''),$$

corrispondenti ai moti del sistema.

La soluzione generale si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = A\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi') + B\vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi'')$$

dove  $(A, B, \Phi', \Phi'')$  sono le 4 costanti reali sufficienti a soddisfare le 4 condizioni iniziali.

In questo problema la matrice modale sarà

$$B = (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ed è facile vedere come, a partire dalle equazioni di moto lineari, col cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

e premoltiplicando per  $B^T$  si ottiene il sistema lineare e disaccoppiato

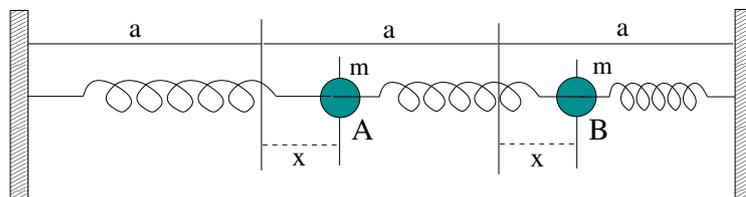
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{3k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

L'inversione del cambiamento di coordinate fornisce nel nostro caso

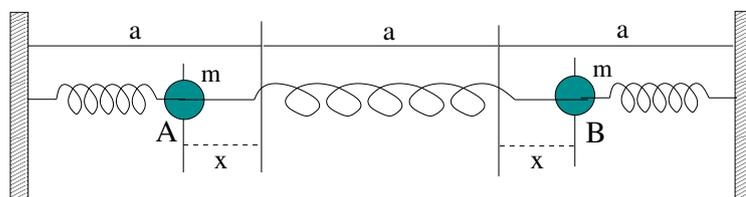
$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Come sappiamo con le coordinate normali l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $V$  prendono una forma senza termini misti, cioè sia  $T$  che  $V$  sono forme quadratiche omogenee. Ciascuna delle equazioni di moto contiene solo una coordinata normale, ovvero le equazioni sono separate e ciascuna delle soluzioni rappresenta un solo modo separato di vibrare.

### Commento 2.6.1.



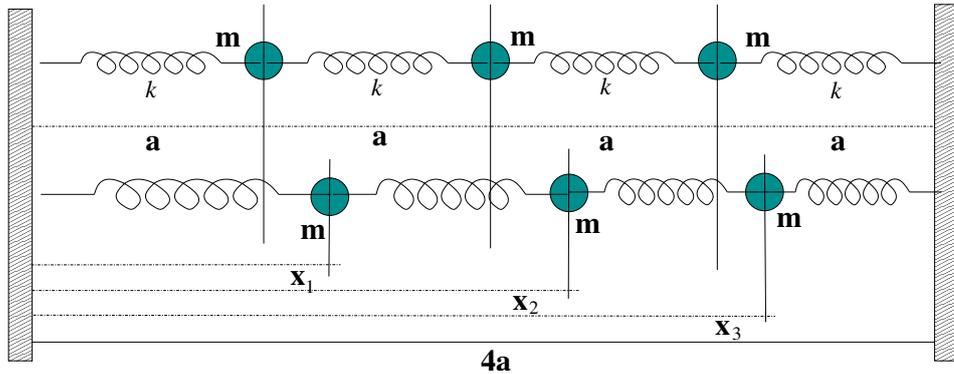
Se poniamo l'attenzione su un modo simmetrico e supponiamo, come in figura, che entrambi i punti siano spostati a destra della stessa distanza  $x$ , si osserva facilmente che la molla mediana non subisce allungamenti e la sola forza sul punto  $B$  è  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  che spinge verso sinistra. Questo in accordo col fatto che la pulsazione è uguale a  $\omega_1$ .



Se poniamo l'attenzione su un modo antisimmetrico e supponiamo, come in figura, che i punti siano spostati a sinistra ed a destra della stessa distanza  $x$ , si osserva facilmente che la molla mediana subisce un allungamento  $2x$  e quelle laterali un accorciamento  $x$ . Pertanto la sola forza sul punto  $B$  è  $\vec{F} = -3kx\vec{i}$  che spinge verso sinistra. Questo in accordo col fatto che la pulsazione è uguale a  $\omega_2$ .

## 2.7 Masse in serie

Si consideri un sistema di tre masse collegate fra loro con molle e con due pareti distanti fra loro  $4a$  come in figura. Le tre masse hanno la stessa massa  $m$ , sono collegate fra loro con molle di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo uguale ad  $a$ .



Introdotta le coordinate come in figura, le forze agenti sui punti sono

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - a) + k(x_2 - x_1 - a) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1 - a) + k(x_3 - x_2 - a) \\ F_3 &= -k(x_3 - x_2 - a) + k(3a - x_3). \end{aligned}$$

L'energia potenziale ed l'energia cinetica del sistema sono

$$\begin{aligned} V = -U &= \frac{1}{2}k(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - a)^2 + \frac{1}{2}k(3a - x_3)^2 \\ T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \end{aligned}$$

L'analisi di

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

ci dice che  $V$  ha un punto di stabilità in  $(a, 2a, 3a)$ . La matrice  $V$  in tale punto è

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{(a, 2a, 3a)} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

ed essendo definita positiva indica che il punto di equilibrio è stabile.

La matrice  $M$  è invece:

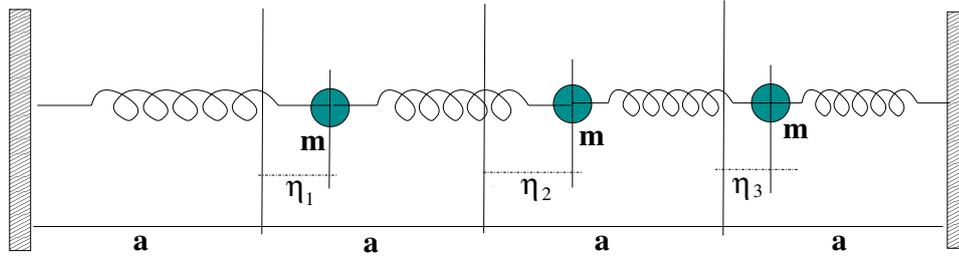
$$\left[ \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right]_{(a, 2a, 3a, 0, 0, 0)} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}.$$

Con il cambio di coordinate

$$\eta_1 = x_1 - a, \quad \eta_2 = x_2 - 2a, \quad \eta_3 = x_3 - 3a,$$

(che non sono altro che i piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio) otteniamo la *La*grangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2) - \frac{1}{2}k\eta_1^2 - \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 - \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 - \frac{1}{2}k\eta_3^2$$



e quindi le equazioni di moto (lineari) sono

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Possiamo a questo punto trovare autovalori e autovettori di  $V$  rispetto ad  $M$ . L'equazione  $\det(V - \omega^2 M) = 0$ , imponendo che sia nullo il suo determinante

$$(2k - m\omega^2)(m\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2) = 0,$$

fornisce

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}, \quad \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}.$$

Gli autovettori ortonormali rispetto ad  $M$  corrispondenti si determinano risolvendo

$$(V - \omega_s^2 M)\vec{\rho}_s = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

ricavando così gli autovettori

$$\vec{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \vec{\rho}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \vec{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

I tre modi normali di vibrazione sono dunque

$$\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi'), \quad \vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi''), \quad \vec{\rho}_3 \cos(\omega_3 t + \Phi''')$$

corrispondenti ai moti del sistema.

La soluzione generale si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = A\vec{\rho}_1 \cos(\omega_1 t + \Phi') + B\vec{\rho}_2 \cos(\omega_2 t + \Phi'') + C\vec{\rho}_3 \cos(\omega_3 t + \Phi''')$$

dove  $(A, B, C, \Phi', \Phi'', \Phi''')$  sono le 6 costanti reali sufficienti a soddisfare le 6 condizioni iniziali.

In questo problema la matrice modale sarà

$$B = (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ed è facile vedere come, a partire dalle equazioni di moto lineari, col cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

e premoltiplicando per  $B^T$  si ottiene il sistema lineare e disaccoppiato

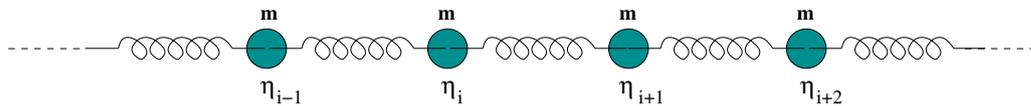
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_2 \\ \ddot{\zeta}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

L'inversione del cambiamento di coordinate fornisce nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}.$$

## 2.8 Passaggio da un sistema discreto ad un sistema continuo

Consideriamo infinite masse  $m$  in serie connesse tra loro da molle di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $a$  e studiamo le vibrazioni longitudinali del sistema.



Per comodità scegliamo come variabili lagrangiane gli spostamenti  $\eta_i$  dei punti  $P_i$  dalla loro posizione di equilibrio stabile. In tal modo si ha

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{\eta}_i^2$$

$$F_i = -k(\eta_i - \eta_{i+1}) - k(\eta_i - \eta_{i-1}), \text{ con } i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

$$V = \frac{1}{2}k \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\eta_{i+1} - \eta_i)^2.$$

La matrice  $M$  è dunque

$$\begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & & \\ \vdots & m & 0 & \vdots & \\ \vdots & 0 & m & \vdots & \\ & \dots & \dots & \ddots & \end{pmatrix},$$

mentre  $V$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \\ \vdots & 2k & -k & 0 & \vdots \\ \vdots & -k & 2k & -k & \vdots \\ \vdots & 0 & -k & 2k & \vdots \\ & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{\eta}}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{\eta}}^T M \dot{\vec{\eta}} - \vec{\eta}^T V \vec{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2]$$

e le equazioni di moto

$$m\ddot{\eta}_i - k(\eta_{i+1} - \eta_i) + k(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0 \quad \text{con} \quad i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty.$$

Questo risultato era prevedibile in quanto sia  $T$  che  $V$  erano già quadratiche. Scriviamo la lagrangiana e le equazioni di moto nella seguente forma:

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{\eta}}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a \left[ \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right]$$

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left[ \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{a} - \frac{(\eta_i - \eta_{i-1})}{a} \right] = 0, \quad \text{con} \quad i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty.$$

Pensiamo ora di approssimare col nostro sistema discreto un sistema continuo costituito da una sbarra omogenea di lunghezza infinita. Supporremo che tale corpo sia trattabile con l'elasticità lineare e andremo a considerare in esso le onde elastiche longitudinali (le dimensioni della sezione della sbarra, che assumeremo costante, sono trascurabili rispetto alla sua infinita lunghezza).

Per effettuare l'approssimazione faremo tendere  $a$  a 0 e studieremo il comportamento al limite sia di  $\mathcal{L}(\dot{\vec{\eta}}, \vec{\eta})$  che delle equazioni di moto.

Osserviamo subito due cose:

1. nell'elasticità lineare  $k = \frac{EA}{a}$  dove  $A$  è la sezione della sbarra e  $E$  il suo modulo di Young. Ne consegue che  $ka = EA$ .

2. la massa  $m$  può essere pensata come la massa corrispondente al tratto  $i$ -esimo di lunghezza a riposo  $a$  e scritta come  $\rho a$  (con  $\rho$  densità lineare). Se ne deduce che  $\frac{m}{a} = \rho$ .

Nel passaggio dal discreto al continuo l'indice  $i$  diventa un indice continuo che chiameremo  $x$ . Come in precedenza ad ogni punto  $i$  corrispondeva  $\eta_i$ , adesso ad ogni punto  $x$  corrisponde  $\eta(x)$ . L'indice  $x$  è dunque interpretabile come una coordinata di posizione. Poiché poi  $\eta$  dipenderà anche dal tempo scriveremo  $\eta(x, t)$ . Per quanto detto è evidente che le seguenti grandezze sono interpretabili come segue:

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

$$\frac{\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} - \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a}}{a} = \frac{\frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} - \frac{\eta(x) - \eta(x-a)}{a}}{a}$$

e al limite diventano

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

La transizione discreto-continuo ci permette infine di notare che nella lagrangiana, al limite per  $a$  che tende a 0, la sommatoria discreta sulle particelle diventa un integrale sulla variabile  $x$  (si noti in proposito l'importanza del fattore  $a$  che assume il ruolo del  $dx$ ).

A questo punto possiamo scrivere la lagrangiana

$$\mathcal{L} \left( \eta, \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} EA \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx$$

e l'equazione di moto del nostro sistema continuo:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Quest'ultima è la nota equazione alle derivate parziali che governa il moto delle onde elastiche longitudinali in un corpo elastico lineare mono-dimensionale omogeneo ( $\rho$  ed  $E$  costanti). Ricordiamo che la velocità di propagazione delle onde è

$$v = \sqrt{\frac{EA}{\rho}}.$$

Come sappiamo ad un sistema avente  $n$  gradi di libertà si associano  $n$  equazioni di moto. Analogamente al nostro sistema discreto dotato di un'infinità numerabile di gradi di libertà abbiamo associato un'infinità numerabile di equazioni di moto. Dopo aver fatto tendere  $a$  a 0 i gradi di libertà sono invece diventati un'infinità non numerabile ma apparentemente l'equazione di moto è una sola. Questo fatto non deve sorprendere poiché quella che abbiamo adesso è una equazione alle derivate parziali. Nella dipendenza di  $\eta$  da  $x$  oltre che da  $t$  si manifesta infatti l'infinità non numerabile dei gradi di libertà del sistema (non bisogna dimenticare che  $x$  altro non è che la variabile continua che ha sostituito l'indice discreto  $i$ ).

## 2.9 Equazione delle corde vibranti

In questa sezione consideriamo l'equazione delle corde vibranti. Le considerazioni che svolgeremo si adattano pure ad una sbarra elastica, ed i riferimenti che faremo sulle vibrazioni sonore indotte dalla corda, si possono trasferire ad un corpo elastico unidimensionale.

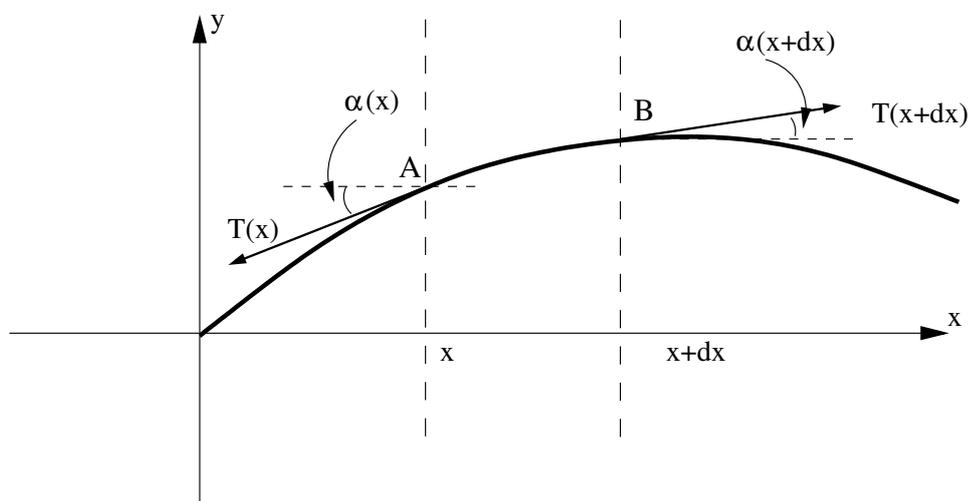
Lasciamo al lettore di pensare alla versione multidimensionale dell'equazione delle corde vibranti, dove si dovrà sostituire la derivata seconda con il laplaciano. L'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

è alla base dello studio dei fenomeni vibratorii nei mezzi continui.

### 2.9.1 Derivazione dell'equazione delle corde vibranti

Si consideri una corda omogenea di lunghezza  $l$  fissata ai propri estremi. Si assume che la corda sia flessibile e inestensibile, in modo da non offrire resistenza ai cambiamenti della propria forma, senza cambiare la lunghezza della corda stessa. In altre parole si intende un modello di continuo unidimensionale che ammette solo sforzi di trazione. Si assume poi che la tensione nella corda sia molto più grande delle forze gravitazionali, quindi le forze dovute alla gravità verranno trascurate. Sotto queste condizioni possiamo supporre che la corda si trovi in equilibrio lungo l'asse  $x$ . Qui considereremo solo le vibrazioni trasverse (e non quelle longitudinali) della corda.



Introduciamo un sistema di riferimento con origine in un estremo della corda, con l'asse  $x$  diretto secondo la corda e l'asse  $y$  sul piano in cui avviene il moto. Indichiamo con  $u = u(x, t)$  lo spostamento al tempo  $t$  della corda dalla posizione di equilibrio e supponiamo che gli spostamenti  $u = u(x, t)$  siano piccoli insieme alle loro derivate  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Si consideri un piccolo tratto  $AB$  della corda di lunghezza  $ds$ , avente estremi  $x$  e  $x + dx$ , ovvero di lunghezza orizzontale  $dx$ .

L'ipotesi di inestensibilità della corda consente di dire che la lunghezza  $l(t)$  della corda a ogni istante sia tale che  $\frac{l(t)}{l} \approx 1$ . Quindi per i piccoli spostamenti la lunghezza del tratto  $AB$  non cambia, in accordo col fatto che l'allungamento è dato da  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx$  e che, per la piccolezza della derivata, coincide con  $dx$ . Se indichiamo con  $\alpha(x)$  l'angolo che la tangente in  $x$  alla corda forma con la direzione positiva dell'asse, possiamo assumere

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t). \quad (2.11)$$

Mostriamo innanzitutto che la tensione  $T$  può essere considerata indipendente da  $x$ , e quindi  $T = T_0$ . Infatti le forze agenti sul tratto  $AB$  sono le tensioni  $T(x)$  e  $T(x + dx)$  tangenti alla corda nei punti estremi  $A$  e  $B$  e le forze inerziali. Nella direzione dell'asse  $x$  la risultante delle forze deve essere zero, e poiché le forze inerziali ed esterne sono dirette secondo l'asse  $y$  la risultante secondo  $x$  si riduce a

$$T(x) \cos \alpha(x) - T(x + dx) \cos \alpha(x + dx) = 0. \quad (2.12)$$

Poiché, come abbiamo detto, gli angoli sono piccoli, i coseni si possono approssimare con 1, e quindi da (2.12) segue

$$T(x) \approx T(x + dx).$$

Per l'arbitrarietà dei punti  $x$  e  $x + dx$  sulla corda, la tensione è indipendente da  $x$  e si ha

$$T(x) \approx T_0, \quad \text{per tutti gli } x \text{ e } t.$$

Deriviamo ora l'equazione delle corde vibranti, facendo uso del principio di d'Alembert che richiede che le forze agenti su un dato segmento della corda, incluse le forze d'inerzia, siano in equilibrio.

Come già osservato ci limitiamo al solo moto trasversale (laterale) della corda, pertanto la risultante delle forze nella direzione  $y$ , relativamente al tratto di corda fra  $x_1$  ed  $x_2$  è

$$\sum F_y = T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1, \quad (2.13)$$

dove  $\alpha_i$  sono gli angoli formati dalle tangenti in  $x_i$ . Sia  $u = u(x, t)$  lo spostamento laterale della corda nel punto  $x$  al tempo  $t$ , si ricava l'accelerazione

$$ma_y = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

dove si è tenuto conto che la massa del tratto di corda fra  $x_1$  e  $x_2$  è dato da  $\rho dx$ , dove  $\rho$  è la densità (costante) nel punto della corda. Pertanto, in accordo alla legge di Newton,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1. \quad (2.14)$$

Riguardo al secondo membro di (2.14), possiamo tenere conto della (2.11) e quindi

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 \approx T \tan \alpha_2 - T \tan \alpha_1 \approx T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_2} - T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_1}.$$

L'equazione (2.14) diventa

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_1} \right],$$

Se teniamo conto della pendenza della curva approssimandola secondo Taylor come

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_2} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\alpha_1} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{\alpha_1} dx,$$

a meno di infinitesimi d'ordine superiore, si ha

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Possiamo quindi ottenere l'equazione nella forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

è dimensionalmente una velocità in quanto data dal rapporto di una forza  $[LMT^{-2}]$  e di una densità lineare  $[L^{-1}M]$ .  $c$  è detta velocità dell'onda con cui l'onda si propaga lungo la corda.

### 2.9.2 Soluzione dell'equazione di d'Alembert col metodo di Fourier

Il metodo di Fourier per risolvere l'equazione delle onde è noto come metodo della separazioni delle variabili. Tale metodo è adatto per risolvere anche altri tipi di equazioni alle derivate parziali, ma noi ci limitiamo al caso delle equazione delle onde.

Un vantaggio di questo metodo è dovuto al fatto che in questo modo è possibile ottenere lo spettro dell'equazione.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.15)$$

dove  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ . Supponiamo che al tempo  $t = 0$  lo spostamento e la velocità della corda siano assegnati (condizioni iniziali)

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} &= v_0(x), \end{aligned}$$

e che inoltre la corda abbia gli estremi fissati (condizioni al contorno)

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

per tutti i tempi  $t$ . Cerchiamo soluzioni di (2.15) a variabili separate, cioè del tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.16)$$

in modo da ridurre l'equazione ad una uguaglianza fra due espressioni che siano funzioni della sola  $x$  e della sola  $t$ . Sostituendo nell'equazione (2.15), si ottiene

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t), \quad (2.17)$$

da cui dividendo per  $c^2 X(x)T(t)$  si ottengono termini che sono a loro volta dipendenti dalla sola  $x$  e dalla sola  $t$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

La precedente relazione deve valere per qualsiasi valore di  $x$  e  $t$ , pertanto le espressioni dei due termini devono essere costanti. Sia  $-\omega^2$  il valore di questa costante, (il segno meno sta ad indicare che l'accelerazione dell'elemento della corda è sempre diretta verso la posizione d'equilibrio, si noti poi che non vogliamo soluzioni esponenziali che vanno all'infinito) il nostro problema si riduce ad uno nuovo del tipo

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\omega^2 X(x), & x \in (0, l), \\ T''(t) &= -\omega^2 c^2 T(t), & t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Le soluzioni generali delle precedenti equazioni sono

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin \omega x + B \cos \omega x, \\ T(t) &= C \sin \omega ct + D \cos \omega ct, \end{aligned}$$

dove  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono costanti da determinarsi tenendo conto sia delle condizioni iniziali che di quelle al contorno. Sostituendo in (2.16), si ottiene

$$u(x, t) = (A \sin \omega x + B \cos \omega x) (C \sin \omega ct + D \cos \omega ct). \quad (2.18)$$

Imponiamo le due condizioni al contorno, corrispondenti a richiedere gli estremi fissi, per ogni tempo  $t$ :  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ , ottenendo

$$\begin{aligned} A \sin \omega 0 + B \cos \omega 0 &= 0, \\ A \sin \omega l + B \cos \omega l &= 0. \end{aligned}$$

La prima equazione implica  $B = 0$ . mentre la seconda, escludendo la soluzione banale, implica

$$\sin \omega l = 0, \text{ ovvero } \omega l = n\pi,$$

dove  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Introducendo l'indice  $n$  si ha

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Sostituendo in (2.18), si ottiene una soluzione

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi}{l} x \left( C \sin \frac{n\pi}{l} ct + D \cos \frac{n\pi}{l} ct \right), \quad (2.19)$$

ma abbiamo una soluzione per ogni  $n \in \mathbb{R}$ , caratterizzata da essere periodica in  $t$  con frequenza

$$\mu_n = \frac{\omega_n c}{2\pi} = \frac{n}{2l}c = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Per ogni  $n$  abbiamo una soluzione del tipo (2.19), quindi definendo le costanti arbitrarie  $a_n = AC$  e  $b_n = AD$  possiamo scrivere la cosiddetta **soluzione fondamentale** dell'equazione delle onde

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l}x \left( a_n \sin \frac{n\pi c}{l}t + b_n \cos \frac{n\pi c}{l}t \right). \quad (2.20)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, è soluzione del nostro problema anche

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{l}x \left( a_n \sin \frac{n\pi c}{l}t + b_n \cos \frac{n\pi c}{l}t \right). \quad (2.21)$$

Non è scopo di queste note discutere la convergenza di questa serie, comunque se convergente, questa è ancora una soluzione che contiene infinite costanti arbitrarie. È comodo riscrivere la soluzione generale (2.21) nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l}x \cos \left( \frac{n\pi c}{l}t + \theta_n \right). \quad (2.22)$$

dove le nuove costanti arbitrarie sono legate alle precedenti dalle seguenti relazioni

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = -\arctan \frac{a_n}{b_n}.$$

Valutiamo ora la velocità iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi}{l}x \sin \theta_n, \quad (2.23)$$

da cui si ricava che se la velocità iniziale è nulla, allora tutte le costanti  $\theta_n$  sono nulle. Pertanto la soluzione è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l}x \cos \frac{n\pi c}{l}t. \quad (2.24)$$

**Nota 2.9.1.** Applicando le condizioni iniziali alla soluzione generale (2.21) è possibile ricavare i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$ . La teoria della serie di Fourier insegna che le costanti  $a_n$  e  $b_n$  sono date dai seguenti integrali

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Diamo ora una interpretazione della soluzione (2.22). La più generale vibrazione della corda vibrante è data dalla sovrapposizione di vibrazioni del tipo

$$u_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x \cos \left( \frac{n\pi c}{l}t + \theta_n \right). \quad (2.25)$$

Ciascuna di queste vibrazioni rappresenta un particolare modo di vibrare della corda. Se fissiamo un tempo  $t$ , allora la forma della vibrazione è caratterizzata dal termine  $\sin \frac{n\pi}{l}x$ , ovvero nella lunghezza  $l$  della corda si ha un numero intero  $n$  di semilunghezze d'onda. Due nodi coincideranno con gli estremi fissi della corda, e successivamente gli altri divideranno lunghezza della corda in 2, 3, ... parti. Tutte queste onde sono dette **onde stazionarie**. Esse sono soluzioni periodiche in  $t$ , di periodo

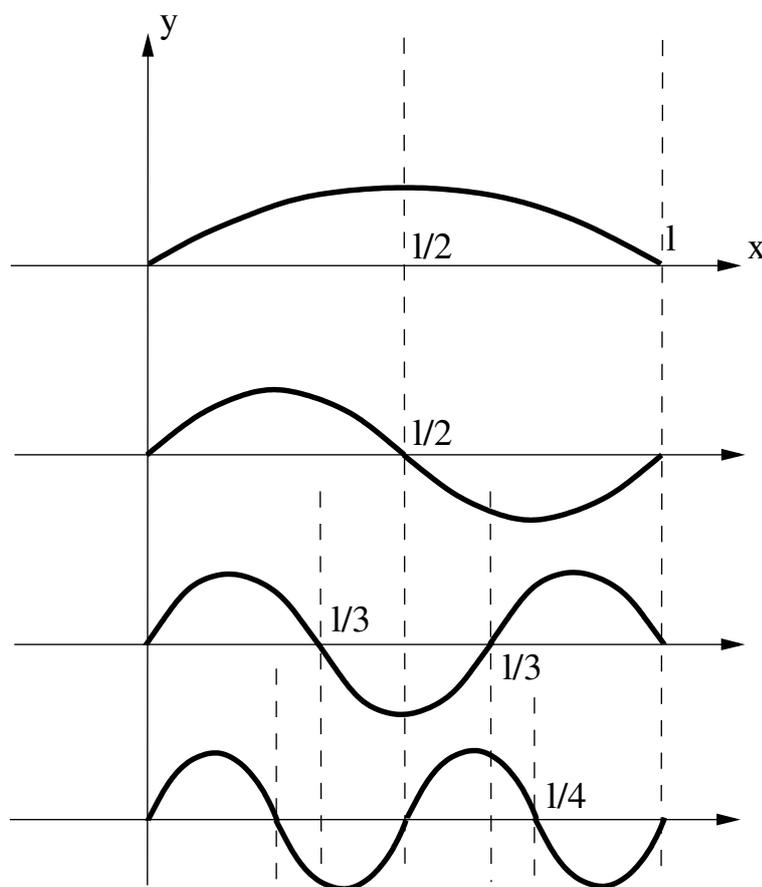
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n c} = \frac{2l}{nc},$$

quindi oscillano tanto più rapidamente quando  $n$  è grande, ovvero di frequenza  $\nu_n = \frac{nc}{2l}$ . Ciascuna avrà una lunghezza d'onda (periodo spaziale)

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Se si riscrive la (2.26) nella forma  $n\lambda_n = 2l$ , si vede che le lunghezze d'onda possibili sono tutte e sole quelle per cui l'intervallo  $(0, l)$  è coperto esattamente da  $n$  semilunghezze d'onda

Ciascuno dei punti della corda seguirà un moto oscillatorio armonico avente fase  $\theta_n$  e ampiezza  $c_n \sin \frac{n\pi}{l}x$ . La corda vibrante produce un suono la cui altezza dipende dalla frequenza dell'oscillazione. La frequenza più bassa è detta **frequenza fondamentale** ed è data da



$$\frac{c}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{per } n = 1).$$

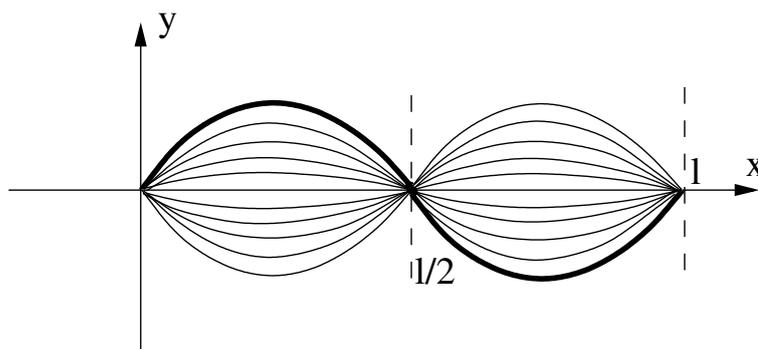
ovvero il primo termine con questa frequenza rappresenta il modo di vibrare intorno alla posizione di equilibrio con  $\frac{c}{2l}$  cicli al secondo.

I toni che corrispondono a frequenze più alte sono detti overtone, mentre quelle frequenze che sono multiple della frequenza fondamentale sono chiamate armoniche. Il tono fondamentale sarà detto prima armonica, il tono con frequenza doppia sarà detto seconda armonica, e così via.

Ciascuna delle onde stazionarie date da (2.25) può essere interpretata come un'onda di frequenza  $\frac{n}{2l}$  con una ampiezza variabile nel tempo con frequenza

$$\frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

ovvero il modo di vibrare ha una frequenza  $\nu_n = n\nu_1$  con  $n\nu_1$  cicli al secondo. Vedi per esempio in figura la seconda armonica, con  $n = 2$ .



Più precisamente queste soluzioni hanno il nome di onde stazionarie perché la forma della corda ad un qualsiasi tempo  $t$  si può ottenere da quella al tempo iniziale moltiplicando tutte le ordinate per un medesimo fattore che non dipende da  $x$ . Quindi l'onda al variare del tempo si gonfia e si sgonfia mantenendo le stesse posizioni dei nodi e dei punti di massimo o minimo.

Per completezza ricordiamo che la combinazione delle varie armoniche produce il **timbro** che è differente da uno strumento musicale all'altro ed è dovuto alle varie armoniche. Un suono accompagnato da diversi sovratoni, come quello degli strumenti musicali, è particolarmente piacevole a sentirsi, l'ampiezza dell' $n$ -esima armonica svanisce nei punti

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l,$$

poiché questi sono i punti per cui  $\sin \frac{n\pi}{l}x = 0$ . Questi punti sono chiamati i nodi dell' $n$ -esima armonica.

L'ampiezza dell' $n$ -esima armonica raggiunge il suo massimo nei punti

$$x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)l}{2n},$$

poiché la funzione  $\sin \frac{n\pi}{l}x$  ha in questi punti il suo massimo. Questi punti sono chiamati gli antinodi dell' $n$ -esima armonica.

Se noi blocchiamo la nostra corda lunga  $l$  nel suo punto di mezzo, cioè nell'antinodo della vibrazione fondamentale, allora le ampiezze degli altri toni aventi un antinodo in quel punto spariranno. Tutte le armoniche dispari verranno soppresse, ma le armoniche che hanno un nodo nel punto di mezzo non verranno toccate. In questo modo rimarranno solo le armoniche pari e la frequenza più bassa sarà  $\frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , quindi doppia rispetto alla fondamentale.