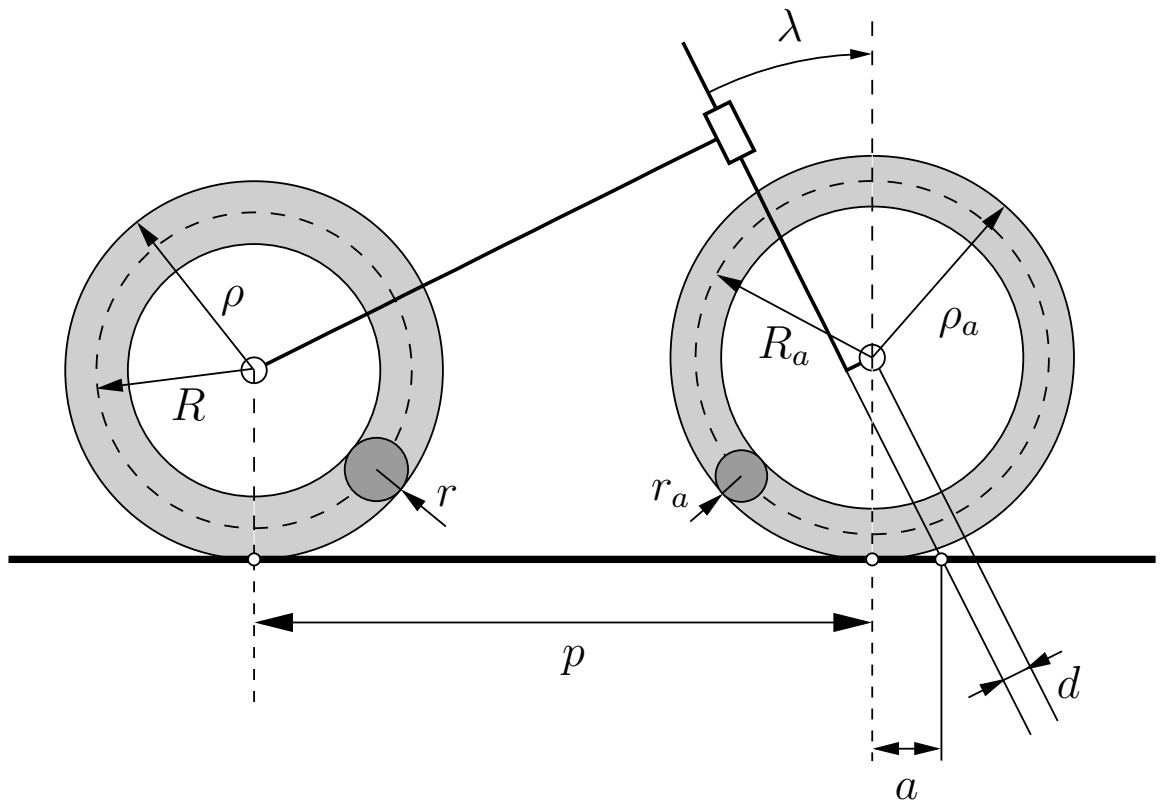

COMPLEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

Appunti dalle lezioni del Prof. Giovanni Frosali
I PARTE: DINAMICA DEI SISTEMI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA U.DINI

FIRENZE - 1 MARZO 2018

Indice

1	RICHIAMI di DINAMICA del PUNTO MATERIALE VINCOLATO	1
1.1	Prima analisi del concetto di vincolo	1
1.2	Velocità virtuale e di trascinamento	5
1.3	Equazioni di moto per un punto vincolato	8
1.4	Vincoli lisci e principio dei lavori virtuali	9
1.5	Punto materiale vincolato ad una linea liscia	11
1.6	Esercizi sul punto materiale vincolato ad una linea liscia	12
1.6.1	Esercizio	12
1.6.2	Esercizio	13
1.6.3	Esercizio	14
2	DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI	15
2.1	Introduzione	15
2.2	Forze interne e forze esterne	15
2.3	Equazioni Cardinali della Dinamica	16
2.4	Equazioni Cardinali della Statica	18
2.5	Questioni Energetiche	19
2.5.1	Caso di forze conservative	20
2.6	Potenziale	21
2.6.1	Potenziale di forze esterne	21
2.6.2	Potenziale di forze interne	21
3	DINAMICA dei SISTEMI OLONOMI	23
3.1	Generalità su un sistema di punti	23
3.1.1	Introduzione	23
3.1.2	Vincoli olonomi	24
3.1.3	Coordinate lagrangiane	25
3.2	Spazio delle configurazioni di un sistema a vincoli olonomi.	26
3.3	Vincoli olonomi lisci - Principio dei lavori virtuali e conseguenze	30
3.3.1	Ancora sui vincoli lisci. Esempio	32
4	EQUAZIONI DI LAGRANGE di I^a SPECIE	33
4.1	Introduzione	33
4.2	Equazioni di Lagrange di prima specie.	33
4.3	Esercizi sulle equazioni di Lagrange di I specie	34

5	STATICA dei SISTEMI OLONOMI	41
5.1	Introduzione	41
5.2	Statica dei sistemi olonomi a vincoli lisci.	41
5.3	Statica dei sistemi rigidi	43
5.4	Applicazione del principio dei lavori virtuali.	43
6	Introduzione alle EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE	47
6.1	Introduzione	47
6.2	Le equazioni di Lagrange di II specie nel caso non conservativo . . .	47
6.3	Primi esercizi sul formalismo lagrangiano	49
6.3.1	Equazione di moto di una particella libera	49
6.3.2	Equazione di moto di una particella libera usando coordinate polari	49
6.4	Un semplice esempio: il pendolo composto	51
6.5	Un altro semplice esempio: la macchina di Atwood	52
6.6	Espressione lagrangiana dell'energia cinetica	53
7	Le EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE	55
7.1	Introduzione	55
7.2	L'equazione simbolica della dinamica	55
7.2.1	Come utilizzare l'equazione simbolica per determinare le equazioni di moto	56
7.3	Le equazioni di Lagrange di II specie	57
7.3.1	Caso conservativo.	58
7.4	La conservazione dell'energia meccanica nel caso di vincoli fissi . . .	59
7.5	Il potenziale generalizzato	60
7.6	Sommario	61
8	Le equazioni di Hamilton	65
8.1	Introduzione	65
8.2	La funzione di Hamilton	65
8.3	La trasformata di Legendre	67
8.4	La funzione Hamiltoniana come energia totale	69
8.5	Appendice: La trasformata di Legendre	70

Capitolo 1

RICHIAMI di DINAMICA del PUNTO MATERIALE VINCOLATO

1.1 Prima analisi del concetto di vincolo

In questo capitolo si studia la dinamica di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie o su una linea assegnate, nota l'azione della forza agente sul punto.

Prima di passare al problema del moto del punto, è necessario introdurre alcune considerazioni di tipo geometrico sui vincoli, per poi passare all'aspetto dinamico del problema, ovvero allo studio dell'azione del vincolo sul punto.

Innanzitutto introduciamo il concetto di vincolo, limitandoci al caso di un punto, utilizzando un formalismo che sarà facilmente generalizzabile nella dinamica di un sistema di punti.

Assegnare una configurazione significa assegnare la posizione del punto P nello spazio fisico \mathbb{R}^3 . Il punto si dice libero se non si impongono limitazioni alle coordinate di P . Il punto si dice vincolato nel caso invece che si impongano limitazioni alle coordinate di P .

Con riferimento ad un sistema di riferimento cartesiano, si chiama **vincolo semplice** una limitazione alle coordinate di P date dal legame

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.1)$$

dove f è una funzione sufficientemente liscia. L'analisi insegna che (1.1) è una superficie di livello zero della funzione f . Si richiede che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

sia non vuoto e che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0; \quad \forall (x, y, z) \in V. \quad (1.2)$$

Allora nell'intorno di ogni punto di V , una almeno delle variabili è esprimibile in funzione delle altre due, e quindi il numero delle variabili indipendenti si riduce a due.

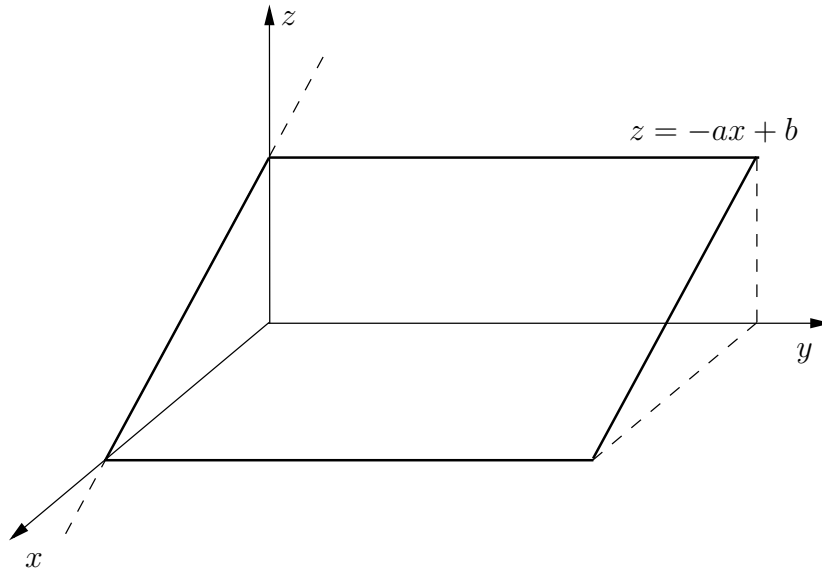


Figura 1.1: Vincolo dell'Esempio 2

ESEMPIO 1.1. Si consideri il vincolo $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \neq 0$. La superficie di livello è un piano. Poiché tutte e tre le derivate parziali sono diverse da zero, si può scegliere una qualsiasi delle coppie di coordinate ed esprimere la terza in funzione di esse.

ESEMPIO 1.2. Si consideri il vincolo $f(x, y, z) = ax + z - b$, con $a, b \neq 0$. Dobbiamo scegliere due coordinate, ed esprimere l'altra in funzione delle due. Consideriamo le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \neq 0,$$

L'analisi insegna che si può esplicitare solo le variabili x o z , rispetto alle quali la derivata è diversa da zero. In questo caso, si può esplicitare o la variabile z : $z = b - ax$ o la variabile x : $x = \frac{b-z}{a}$.

ESEMPIO 1.3. Si consideri il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, con $r > 0$. La superficie di livello è una sfera di raggio r , anche in questo caso si può scegliere una coppia qualsiasi di coordinate, ma occorre fare attenzione perché la terza può essere espressa solo localmente. Si noti che le coordinate sferiche sono più adatte a rappresentare tale superficie.

Fissato il valore di r , le due coordinate θ e φ sono legate dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

ESEMPIO 1.4. Si consideri il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. La superficie di livello si riduce al solo punto $(0, 0, 0)$, le ipotesi non sono soddisfatte ed il vincolo non è dunque ammissibile.

Se indichiamo con q_1, q_2 le coordinate che esplicitano la superficie in un opportuno intorno $I_1 \times I_2$, si può scrivere

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases}, \quad (q_1, q_2) \in I_1 \times I_2.$$

La (1.2) equivale al fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo ($= 2$).

In questo caso, ricapitolando, il vincolo semplice toglie un grado di libertà, due coordinate q_1 e q_2 sono sufficienti per individuare la configurazione di P . q_1 e q_2 sono dette **coordinate lagrangiane**.

Se introduciamo una coppia diversa di coordinate lagrangiane (q'_1, q'_2) , allora la matrice jacobiana della trasformazione

$$(q_1, q_2) \rightarrow (q'_1, q'_2)$$

dovrà avere determinante diverso da zero, in modo da avere la possibilità di passare da una coordinata all'altra.

La (1.2) si può scrivere anche come

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq 0, \quad \forall (x, y, z) \in V.$$

Se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, ad esempio, allora localmente la coordinata y si può esprimere in funzione delle altre due, cioè $y = g(x, z)$, e le coordinate (x, z) sono sufficienti ad individuare il punto P sulla superficie. Grazie al fatto che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è diversa da zero nell'intorno di P , l'analisi insegna che i vettori $\frac{\partial P}{\partial x} = \left(1, \frac{\partial g}{\partial x}, 0 \right)$ e $\frac{\partial P}{\partial z} = \left(0, \frac{\partial g}{\partial z}, 1 \right)$ sono indipendenti e costituiscono una base del piano tangente al vincolo $f = 0$, mentre il $\text{grad}f$ è normale al vincolo stesso.

Infatti è facile verificare che questi due vettori sono ortogonali al vettore gradiente di $f(x, y, z) = y - g(x, z)$ dato da

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, 1, -\frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

essendo

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, 1, -\frac{\partial g}{\partial z} \right) \cdot \left(1, \frac{\partial g}{\partial x}, 0 \right) = 0 \quad , \quad \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, 1, -\frac{\partial g}{\partial z} \right) \cdot \left(0, \frac{\partial g}{\partial z}, 1 \right) = 0.$$

Si chiama **vincolo doppio** una limitazione alle coordinate di P date dal sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove f_1 ed f_2 sono funzioni sufficientemente lisce. Anche in questo caso, si richiede che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = 0 \text{ e } f_2(x, y, z) = 0\}$$

sia non vuoto e che

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

abbia rango massimo ($= 2$), ovvero le normali ai vincoli siano fra loro indipendenti. Allora nell'intorno di ogni punto di V , due delle variabili sono esprimibili in funzione dell'altra. Sia q la variabile indipendente, allora il vincolo in un opportuno intorno I è rappresentato da una linea di equazione

$$\begin{cases} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{cases}, \quad q \in I.$$

ESEMPIO 1.5. Si consideri il vincolo doppio costituito dai due piani

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a due. La linea sul quale si muove P è l'asse z , e si può scegliere proprio z come variabile lagrangiana.

La variabile q può essere una delle tre coordinate x, y, z , oppure no. Si pensi al seguente esempio.

ESEMPIO 1.6. Si consideri il vincolo costituito dal piano $z = 0$ e dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Il punto è così vincolato alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sul piano $z = 0$. Invece della coordinata x , oppure y si può scegliere l'angolo φ per individuare la configurazione del punto P .

Si chiama **vincolo triplo** una limitazione alle coordinate di P date dal sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove f_1, f_2 ed f_3 sono funzioni sufficientemente lisce. Se la matrice jacobiana corrispondente ha rango tre, allora la configurazione di P è univocamente determinata.

ESEMPIO 1.7. *Si consideri il vincolo triplo costituito dai tre piani*

$$\begin{cases} a x + b y + c z = d \\ a' x + b' y + c' z = d' \\ a'' x + b'' y + c'' z = d'' . \end{cases}$$

Se la matrice corrispondente ha determinante diverso da zero, allora i tre piani sono indipendenti e la loro intersezione si riduce ad un solo punto (nel caso $d = d' = d'' = 0$ l'origine del sistema di riferimento).

Nel caso di tre funzioni qualsiasi f_1 , f_2 e f_3 , il fatto che la matrice jacobiana relativa ai vincoli $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$, abbia rango massimo corrisponde alla lineare indipendenza fra i tre piani tangenti, nel punto (x, y, z) intersezione delle tre superficie.

Le definizioni date sopra sono facilmente generalizzabili al caso dipendente dal tempo. Un vincolo di equazione

$$f(P, t) = f(x, y, z, t) = 0, \quad (1.4)$$

con l'ipotesi (1.2) data sopra per ogni tempo t , rappresenta un vincolo semplice mobile.

Analogamente, si ha il vincolo doppio mobile

$$\begin{cases} f_1(P, t) = f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(P, t) = f_2(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

ed il vincolo triplo mobile

$$\begin{cases} f_1(P, t) = f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(P, t) = f_2(x, y, z, t) = 0, \\ f_3(P, t) = f_3(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

dove f_1 , f_2 ed f_3 sono funzioni sufficientemente lisce dipendenti sia dalla posizione che dal tempo.

Si osserva che tutti i vincoli sopradefiniti sono espressi da uguaglianze, e sono detti **vincoli bilateri**, ma si possono considerare anche **vincoli unilateri** del tipo

$$f(P, t) = f(x, y, z, t) \leq 0,$$

che caratterizzano regioni dello spazio, in generale variabili col tempo, delimitate in ogni istante dalla superficie $f(P, t) = 0$. Il punto durante il suo moto per effetto delle forze si può muovere all'interno della regione, senza sorpassare la superficie che la delimita.

1.2 Velocità virtuale e di trascinamento

Si consideri un punto P vincolato con un vincolo semplice mobile $f(P, t) = 0$, che soddisfi la condizione (1.2). Se $x = x(t), y = y(t)$ e $z = z(t)$ è la traiettoria di P durante il moto, allora per ogni istante di tempo t si ha

$$f(x(t), y(t), z(t), t) = 0.$$

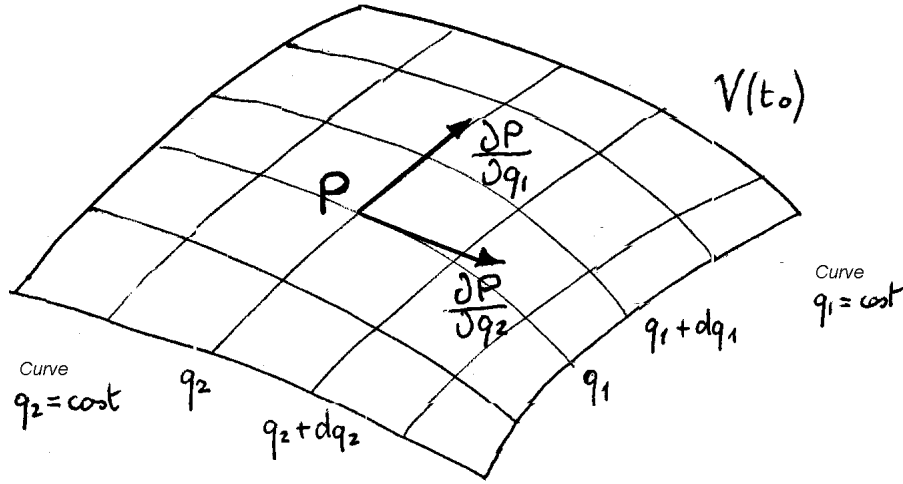


Figura 1.2: Base del piano tangente

Derivando rispetto al tempo si ottiene, in ogni istante t ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

che si può scrivere come

$$\text{grad} f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

La (1.6) definisce le **velocità possibili** compatibili con il vincolo, istante per istante.

In seguito a quanto detto nella sezione precedente, si possono scegliere due **coordinate lagrangiane** q_1, q_2 e quindi il punto P viene rappresentato come

$$P = P(q_1, q_2, t).$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Definendo

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad \text{e} \quad \vec{v}^* = \frac{\partial P}{\partial t},$$

la velocità di P è data dalla somma

$$\vec{v} = \hat{v} + \vec{v}^*, \quad (1.7)$$

dove \hat{v} è detta **velocità virtuale** e \vec{v}^* è detta **velocità di trascinamento**.

Nel caso di un vincolo doppio mobile $f_1(P, t) = 0$, $f_2(P, t) = 0$, con la condizione (1.3), derivando rispetto al tempo le relazioni f_1 ed f_2 si ottiene, in ogni istante di tempo t ,

$$\begin{aligned} \text{grad} f_1 \cdot \vec{v} + \frac{\partial f_1}{\partial t} &= 0, \\ \text{grad} f_2 \cdot \vec{v} + \frac{\partial f_2}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

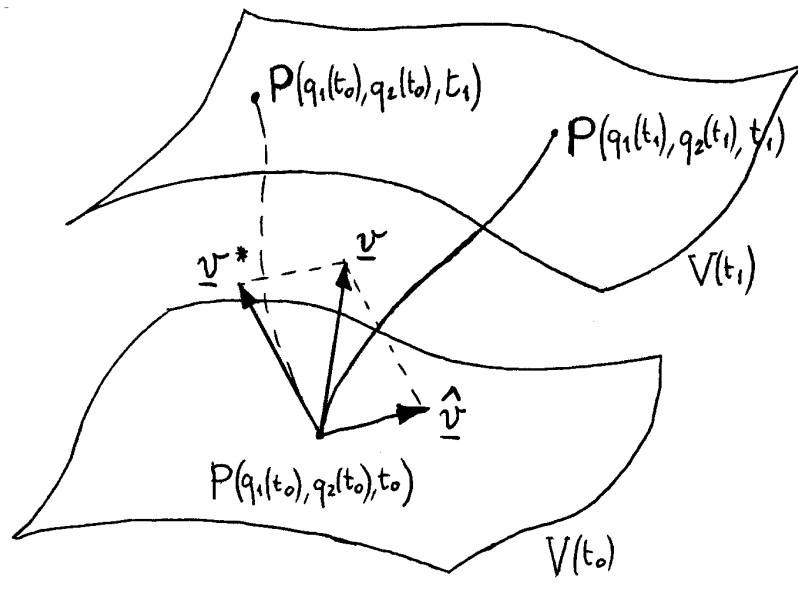


Figura 1.3: Velocità virtuale e di trascinamento

che definiscono le **velocità possibili** compatibili con i vincoli, istante per istante.

Anche in questo caso, si può scegliere una **coordinata lagrangiana** q e quindi il punto P viene rappresentato da $P = P(q, t)$. Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Definendo nuovamente la velocità virtuale e la velocità di trascinamento

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad \text{e} \quad \vec{v}^* = \frac{\partial P}{\partial t}$$

la velocità di P è data dalla somma $\vec{v} = \hat{v} + \vec{v}^*$.

Prima di passare al problema della meccanica del punto, illustriamo il concetto di velocità virtuale e di trascinamento.

Nel caso di vincolo semplice, si consideri la superficie $V(t_0)$ e si disegni su di essa le curve coordinate $q_1 = \text{costante}$ e $q_2 = \text{costante}$. Le derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ rappresentano i vettori tangenti in (q_1, q_2) alle curve $q_1 = \text{costante}$ e $q_2 = \text{costante}$.

La velocità virtuale è la velocità compatibile col vincolo all'istante di tempo t ed è data da

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2.$$

Indichiamo ora con $V(t_1)$ lo spazio delle configurazioni all'istante $t_1 > t_0$.

La velocità virtuale sta sul piano tangente in $(q_1(t_0), q_2(t_0))$, mentre la velocità di trascinamento, essendo la velocità che si ottiene fissando i valori delle coordinate lagrangiane in $P(q_1, q_2, t)$, è la componente di \vec{v} che risulta tangente alla curva che il punto percorrerebbe (virtualmente) se al variare del tempo le coordinate $(q_1(t_0), q_2(t_0))$ si mantenessero costanti.

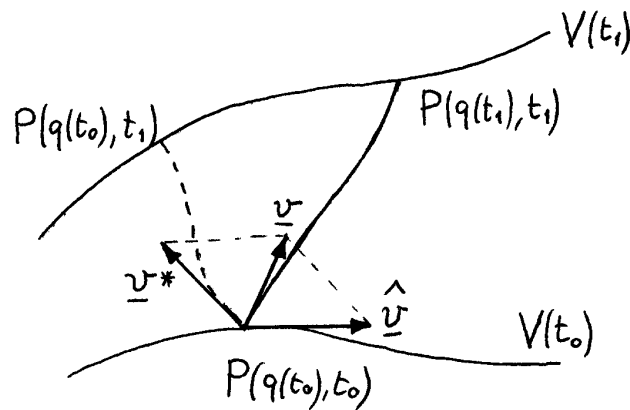


Figura 1.4: Velocità virtuale e di trascinamento

Nel caso di vincolo doppio $V(t_0)$ e $V(t_1)$ sono due linee nello spazio, come si vede dalla figura, la velocità virtuale è tangente a $V(t_0)$, la velocità effettiva è tangente alla traiettoria del punto, mentre la velocità di trascinamento è tangente alla traiettoria che percorrerebbe il punto se non si muovesse rispetto al vincolo.

ESEMPIO 1.8. Si consideri il vincolo $f(x, y, z) = 0$ in \mathbb{R}^3 , che si espliciti localmente con $z = g(x, y)$. Allora scelto $q_1 = x$ e $q_2 = y$, il punto si rappresenta come $P = P(x, y, g(x, y)) = P(q_1, q_2)$, e si ha

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial q_1}\right), \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial q_2} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial q_2}\right).$$

È facile verificare (come abbiamo fatto precedentemente) che il vettore gradiente $\text{grad}f$ con $f = z - g(x, y)$ dato da

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$$

è ortogonale ai vettori $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$.

1.3 Equazioni di moto per un punto vincolato

Sia (P, m) un punto materiale vincolato ad un vincolo bilatero semplice $f(P, t) = 0$ (o ad un vincolo doppio $f_1(P, t) = 0; f_2(P, t) = 0$). Sul punto P agisce una forza direttamente applicata $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$. Sotto l'azione della sola forza direttamente applicata, la traiettoria del punto non potrà soddisfare l'equazione vincolare e ciò potrà essere possibile solo se durante il moto il vincolo eserciterà sul punto P una azione opportuna. Tale azione, detta **reazione vincolare**, congiunta a quella della forza direttamente applicata servirà a fare sì che il moto risultante soddisfi istante per istante l'equazione vincolare. Ovviamente le condizioni iniziali devono essere assegnate in modo da soddisfare il vincolo.

In un riferimento inerziale, l'equazione di moto di un punto vincolato e l'equazione del vincolo sono date da

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \vec{\phi}(t), \\ f(P, t) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

a partire da fissate condizioni iniziali, dove le incognite sono le tre coordinate (in funzione del tempo t) e le tre componenti della reazione vincolare $\vec{\phi}(t)$. Le equazioni scalari corrispondenti sono 4, mentre le incognite sono 6: le tre coordinate di $P(t)$ e le tre componenti della reazione. Il problema è dunque indeterminato, in quanto le incognite sono più delle equazioni.

Situazione analoga si ha per un punto vincolato ad una linea, le equazioni di moto e del vincolo sono

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \vec{\phi}(t), \\ f_1(P, t) = 0, \\ f_2(P, t) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

dove le incognite sono ancora 6 mentre le equazioni sono 5 ma insufficienti, rendendo ancora il problema indeterminato.

Fino a questo punto abbiamo caratterizzato un vincolo solo dal punto di vista geometrico e quindi cinematico, senza caratterizzare come tale vincolo possa intervenire a modificare il moto di P sul vincolo stesso. Conviene decomporre la reazione vincolare $\vec{\phi}(t)$ nella sua componente tangente al vincolo $\vec{\phi}_t(t)$ (o parallela alla linea nel caso di vincolo doppio) e nella sua componente normale $\vec{\phi}_n(t)$.

Per risolvere il problema del punto vincolato è necessario caratterizzare come il vincolo interviene a modificare il moto di P sul vincolo stesso. Tale caratterizzazione può essere suggerita solo da fatti sperimentali, pensando a situazioni reali in cui il vincolo si limiti a mantenere il punto sul vincolo senza frenarlo nel suo moto.

1.4 Vincoli lisci e principio dei lavori virtuali

Nel caso di un punto materiale vincolato ad una superficie o ad una linea, si può caratterizzare un vincolo richiedendo che la reazione sia ortogonale al vincolo stesso.

Definizione. Un vincolo bilatero semplice (1.1), oppure bilatero doppio (1.3), si dice **liscio** se la reazione $\vec{\phi}(t)$ è in ogni istante di tempo ortogonale allo spazio delle configurazioni, ovvero all'insieme delle disposizioni di P compatibili con il vincolo.

Nel caso di una superficie e di una linea è facile esprimere le direzioni ortogonali tramite il gradiente, ottenendo così nel caso di una superficie

$$\vec{\phi}(t) = \lambda(t)\text{grad}f$$

e nel caso di una linea intersezione di due superficie $f_1 = 0$ ed $f_2 = 0$

$$\vec{\phi}(t) = \lambda_1(t)\text{grad}f_1 + \lambda_2(t)\text{grad}f_2.$$

Vediamo quindi come il problema è risolto in quanto il numero di incognite è ora uguale al numero di equazioni. L'equazione di moto di un punto vincolato ad un

vincolo semplice di equazione $f(P, t) = 0$ è

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \lambda(t)\text{grad}f, \\ f(P, t) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

L'equazione di moto di un punto vincolato ad un vincolo doppio di equazioni $f_1(P, t) = 0$ e $f_2(P, t) = 0$ è

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \lambda_1(t)\text{grad}f_1 + \lambda_2(t)\text{grad}f_2, \\ f_1(P, t) = 0, \\ f_2(P, t) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Le equazioni di moto (1.10) e (1.11) sono dette **equazioni di Lagrange di 1^a specie**.

È importante dare ora una definizione di vincolo liscio, equivalente alla precedente, che possa essere generalizzata quando studieremo un sistema di punti vincolati.

Ricordando la definizione di velocità virtuale, è facile verificare che imporre l'ortogonalità della reazione rispetto al vincolo è equivalente a richiedere che la potenza virtuale della reazione sia nulla. Naturalmente per fare questo sarà necessario calcolare la potenza della reazione “*come se il vincolo non variasse nel tempo*”.

Enunciamo ora un teorema che caratterizza un vincolo liscio per mezzo della velocità virtuale.

Teorema 1.4.1. *Un vincolo bilatero semplice (o doppio) è liscio se e solo se, in ogni istante t ed in ogni punto P dello spazio delle configurazioni, è*

$$\hat{W}_\phi = \vec{\phi}(t) \cdot \hat{\vec{v}} = 0 \quad (1.12)$$

qualunque sia la velocità virtuale $\hat{\vec{v}}$.

La verifica di questo teorema si basa sulla definizione di velocità virtuale $\hat{\vec{v}}$ e sull'aspetto geometrico di $\hat{\vec{v}}$.

A volte può essere comodo introdurre lo spostamento virtuale δP dato da $\hat{\vec{v}}dt$, si parlerà quindi di lavoro virtuale anziché potenza virtuale. La definizione di vincolo liscio può essere assunta come una ipotesi di lavoro, che viene comunemente chiamato **principio dei lavori virtuali**.

Nel caso di vincoli unilateri, il vincolo interviene sul punto quando questo si avvicina alla frontiera, in tal caso la reazione sarà sempre rivolta verso la parte degli spostamenti virtuali, quindi l'ipotesi che il vincolo sia liscio si trasforma nel richiedere che la potenza virtuale sia positiva o nulla

$$\hat{W}_\phi \geq 0$$

per ogni velocità virtuale, in ogni istante ed in ogni configurazione compatibile col vincolo.

Vediamo ora che forma assume il **teorema delle forze vive** nel caso di un punto vincolato.

Nel caso di vincoli lisci e fissi, le velocità virtuali coincidono con le velocità effettive, quindi la potenza virtuale coincide con la potenza effettiva, e quindi la variazione di

energia cinetica è tutta da attribuire alla potenza della forza direttamente applicata, come nel caso di un punto libero.

Nel caso di vincoli lisci e mobili, si dovrà invece tenere conto anche della potenza della reazione. Calcoliamo la potenza della reazione vincolare (nel caso di un vincolo semplice)

$$W_\phi(t) = \vec{\phi}(t) \cdot \vec{v} = \lambda(t) \text{grad} f \cdot \vec{v}.$$

Ricordando la definizione di velocità possibile, si sa che

$$\text{grad} f \cdot \vec{v} = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

e quindi

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi = W_F - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}.$$

dove W_F e W_ϕ rappresentano la potenza della forza direttamente applicata e della reazione sul punto P , rispettivamente.

Nel caso di un vincolo doppio, la potenza effettiva è

$$W(t) = \vec{\phi}(t) \cdot \vec{v} = \lambda_1(t) \text{grad} f_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2(t) \text{grad} f_2 \cdot \vec{v}.$$

Utilizzando le relazioni ottenute dalla definizione di velocità possibile

$$\begin{aligned} \text{grad} f_1 \cdot \vec{v} &= -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \text{grad} f_2 \cdot \vec{v} &= -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \end{aligned}$$

si ottiene la nuova forma del teorema delle forze vive

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi = W_F - \lambda_1(t) \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2(t) \frac{\partial f_2}{\partial t}.$$

1.5 Punto materiale vincolato ad una linea liscia

Nello studio di un punto vincolato ad una linea, può essere conveniente introdurre un sistema di riferimento intrinseco, dato dai versori tangente \vec{t} , normale \vec{n} e binormale \vec{b} . Come si insegna nei corsi di Analisi, data una curva, sufficientemente liscia, nello spazio, è conveniente individuare la curva scegliendo l'arco s percorso dal punto P , a partire da un dato punto iniziale, corrispondente alla lunghezza dell'arco stesso. Nel punto P , relativo all'arco s , si determinano il versore tangente \vec{t} , il versore normale \vec{n} ed il versore binormale \vec{b} , a loro volta funzioni dell'arco s . Il moto del punto P viene così determinato dalla conoscenza della legge $s = s(t)$. Se la linea è parametrizzata da $(x(t), y(t), z(t))$ (qui t rappresenta il parametro tempo), l'analisi insegna che l'arco s è dato da

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)} d\tau.$$

Ricordando la forma dell'accelerazione in coordinate intrinseche, le equazioni di moto di un punto vincolato prendono la forma

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{t} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{t}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{n} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{n}, \\ 0 &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{b} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{b}. \end{cases}$$

Nell'ipotesi di vincolo liscio si ha

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{t}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{n} + \vec{\phi}_n(t), \\ 0 &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{b} + \vec{\phi}_b(t), \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $s(0) = s_0$, e $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$, e dove $\vec{\phi}_n$ e $\vec{\phi}_b$ sono le componenti incognite della reazione.

La prima idea per risolvere il problema del punto vincolato è trovare la soluzione $s = s(t)$ della prima equazione e poi dopo avere sostituito nelle altre due ricavare le componenti della reazione. Purtroppo l'equazione di moto è di difficile integrazione, anche in casi semplici, si pensi ad esempio al caso del pendolo non lineare. Se ci si accontenta di calcolare la reazione del vincolo non in funzione del tempo, ma in funzione della posizione, si può ricorrere, nel caso che la forza \vec{F} sia posizionale, al teorema delle forze vive, che, poiché la reazione non compie lavoro, dà l'integrale primo

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\dot{s}_0^2 = \int_{P_0P} \vec{F} \cdot dP$$

dove P_0P appartiene alla curva e P_0 è la posizione iniziale. Nel caso di \vec{F} conservativa, allora si può ricorrere a

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\dot{s}_0^2 = U(P) - U(P_0)$$

dove U è il potenziale.

1.6 Esercizi sul punto materiale vincolato ad una linea liscia

1.6.1 Esercizio

Si consideri il moto di un punto materiale pesante che parte dal punto A a quota z_A e che si muove fino al punto B a quota $z_B = z_A - h$, rimanendo vincolato a stare su un *vincolo liscio*, avente la forma come in figura (1.5) e situato nello stesso piano verticale contenente i punti A e B . Il punto materiale di massa m viene lanciato con velocità orizzontale v_0 dal punto A a quota h (rispetto a B). Sia v_f la velocità finale nel punto B (sempre orizzontale). Allora il principio di conservazione dell'energia implica

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = hgm$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)(v_f + v_0) = hgm.$$

Si consideri ora il problema da un altro punto di vista. Supponiamo di traslare orizzontalmente con velocità $-v_0$ l'intero sistema, vedi figura (1.6). Quindi rispetto ad un sistema fisso (lo stesso rispetto al quale è stato fatto il bilancio energetico

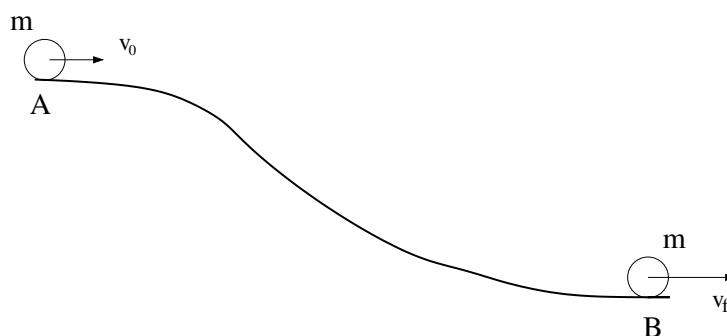


Figura 1.5: Punto con velocità iniziale.

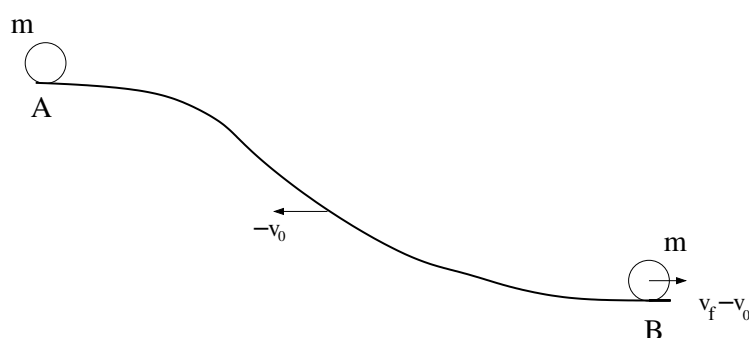


Figura 1.6: Punto con velocità nulla.

sopra) il punto di massa m , lanciato come sopra, parte con velocità nulla ed ha alla fine la velocità $v_f - v_0$.

Allora, applicando nuovamente il principio di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)^2 = hgm$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)(v_f - v_0) = hgm.$$

Quale dei due ragionamenti è errato?

Osservazione 1.6.1. *Poiché nella Meccanica Classica vale il principio di Galileo di addizione delle velocità, si dovrebbe ottenere lo stesso valore della velocità finale. Invece i due ragionamenti sopra arrivano a conclusioni contraddittorie.*

La risposta va ricercata nel fatto che anche i vincoli lisci possono compiere lavoro quando sono mobili.

Si lasciano al lettore i seguenti esercizi:

1.6.2 Esercizio

Studiare il moto di un punto su una linea piana (ad es. parabola, parabola cubica).

1.6.3 Esercizio

Studiare il moto del pendolo non lineare.

Capitolo 2

DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

2.1 Introduzione

Un sistema \mathcal{S} di punti materiali è un sistema costituito da un numero finito di n punti materiali, che verranno indicati con P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ciascuno di massa m_i

$$\mathcal{S} = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2), \dots, (P_n, m_n)\}.$$

2.2 Forze interne e forze esterne

Si consideri un sistema \mathcal{S} di punti materiali. Sia F_i la forza agente sul punto $P_i \in \mathcal{S}$. Tale forza è la somma delle forze esercitate su P_i da punti P_j , $j \neq i$, del sistema e delle forze esercitate su P_i da punti che non appartengono al sistema.

Definiamo:

Definizione 2.2.1. Forze interne. *Le forze di mutua interazione tra i punti di un sistema $\{(P_1, m_1), (P_2, m_2), \dots, (P_n, m_n)\}$ si dicono interne.*

Definizione 2.2.2. Forze esterne. *Le forze esercitate sui punti P_i del sistema da punti che non fanno parte del sistema \mathcal{S} .*

Con riferimento ad un sistema di riferimento inerziale, si possono scrivere le equazioni di moto

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

dove la forza \vec{F}_i è data da

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)},$$

dove l'indice in alto sta per interne ed esterne.

Osservazione. Se l'osservatore non è inerziale, allora esso annovera tra le forze esterne anche le forze apparenti.

Teorema 2.2.1. *Le forze interne costituiscono un sistema equilibrato.*

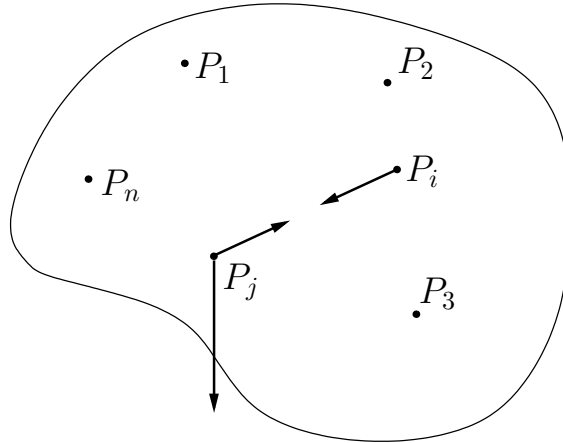


Figura 2.1: Forze interne ed esterne.

Le forze interne sono un sistema di forze a risultante e momento risultante nulli, poiché le forze di interazione sono costituite da coppie di braccio nullo (anche in un sistema non inerziale, dove non cambiano le forze interne).

Oltre a distinguere fra **forze interne** e **forze esterne**, si può distinguere fra **forze attive** e **reazioni vincolari**. Quindi si possono scrivere le leggi di moto in due modi:

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i + \vec{\phi}_i, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}, & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

dove $\vec{\phi}_i$ sono le reazioni vincolari agenti sul punto P_i .

Definizione 2.2.3. Quantità di moto. La quantità di moto del punto (P_i, m_i) è data dal vettore $m_i \vec{v}_i$. La risultante di questi vettori relativi a tutti i punti di \mathcal{S} si chiama **quantità di moto del sistema**.

Si indica con

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.1)$$

Definizione 2.2.4. Momento della Quantità di moto. Il momento della quantità di moto di ciascun punto (P_i, m_i) rispetto al punto O è data dal vettore $(P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$. La risultante di questi vettori relativi a tutti i punti di \mathcal{S} si chiama **momento della quantità di moto del sistema**.

Si indica con

$$\vec{K}(O) = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i. \quad (2.2)$$

2.3 Equazioni Cardinali della Dinamica

Derivando rispetto al tempo la quantità di moto definita da (2.1) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i.$$

e tenendo conto della legge di moto di Newton $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}$ si ha anche

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}).$$

Ricordando che $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(i)} = 0$, ovvero le forze interne costituiscono un sistema equilibrato, e definendo la **risultante delle forze esterne**

$$\vec{R}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}$$

si ottiene

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{(e)},$$

nota come **prima equazione cardinale della dinamica**.

D'altronde se sfruttiamo la definizione di centro massa, possiamo dare alla prima equazione cardinale una forma nota come **Teorema del moto del centro massa**. Sia P_0 il punto definito da

$$m(P_0 - O) = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O)$$

dove O è un punto fisso, scelto arbitrariamente, derivando rispetto al tempo si ottiene $\vec{Q} = m\vec{v}(P_0) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$, e quindi

$$m\vec{a}(P_0) = \vec{R}^{(e)}.$$

Da quanto detto sopra, segue il noto

Corollario 2.3.1. *In un sistema isolato il centro di massa P_0 ha l'accelerazione nulla rispetto ad un osservatore inerziale.*

Passiamo ora ad analizzare il momento della quantità di moto. Derivando rispetto al tempo il momento della quantità di moto definita da (2.2) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \vec{K}(O) = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{v}_i - \vec{v}(O)] \wedge \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \vec{a}_i,$$

ovvero, ricordando la definizione di $\vec{Q}(O)$,

$$\frac{d}{dt} \vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i.$$

Tenendo conto, anche in questo caso, delle leggi di moto di Newton

$$\frac{d}{dt} \vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge (\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}),$$

ricordando che le forze interne, costituendo un sistema equilibrato, hanno momento risultante nullo $\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(i)} = 0$ e definendo il **momento risultante delle forze esterne**

$$\vec{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(e)}$$

si ottiene la **seconda equazione cardinale della dinamica**

$$\frac{d}{dt} \vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \vec{M}^{(e)}.$$

Se O è un punto fisso, oppure coincide con il centro di massa P_0 , oppure se $\vec{v}(O)$ è parallela a $\vec{v}(P_0)$, allora

$$\dot{\vec{K}}(O) = \vec{M}^{(e)}.$$

Commenti. Le equazioni cardinali contengono solo informazioni di carattere globale sull'evoluzione temporale del sistema meccanico. Esse devono essere verificate da un qualsiasi sistema di punti, durante il moto, nel dato riferimento rispetto al quale sono state fatte le derivate di \vec{Q} e $\vec{K}(O)$. Quindi ogni sistema le soddisfa durante il moto, mentre non si può affermare che esse siano sufficienti a determinare il moto del sistema. Le incognite sono le $3n$ coordinate $x_i(t)$ dei punti P_i , eventualmente espresse tramite le coordinate lagrangiane del sistema (quindi tante quanti sono i gradi di libertà del sistema) se il sistema è olonomo e le $3n$ componenti delle reazioni vincolari $\vec{\phi}_i(t)$.

Quindi le **equazioni cardinali della dinamica** sono **necessarie**, ma in generale **non sono sufficienti**.

Le **equazioni cardinali della dinamica** sono **necessarie e sufficienti** per la determinazione del moto dei punti, a partire da fissate condizioni iniziali, solo quando le coordinate del sistema siano al più 6. Quindi in particolare le equazioni cardinali sono necessarie e sufficienti per studiare il moto di un corpo rigido.

Nota 2.3.1. Le **equazioni cardinali della dinamica** possono essere scritte anche in sistema di riferimento **non inerziale**, purché si tenga conto che la

$$\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{Q}, \quad \dot{\vec{K}}(O) = \left(\frac{d\vec{K}}{dt}(O) \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{K}(O).$$

2.4 Equazioni Cardinali della Statica

Se il sistema S di punti si trova in equilibrio, allora segue subito che

$$\vec{R}^{(e)} = 0, \quad \vec{M}^{(e)} = 0$$

Queste equazioni che devono essere soddisfatte dalle forze esterne da un qualunque sistema S in equilibrio si dicono **equazioni cardinali della statica**. Più precisamente, perché un sistema di punti sia in quiete è **necessario** che siano nulli sia risultante che momento risultante delle forze esterne.

Quindi, come per il caso dinamico, tali equazioni non sono sufficienti. Si pensi ad esempio ad una massa di gas compresso che venga lasciato libero completamente senza l'azione di nessuna forza esterna.

È bene porre l'attenzione al caso di un sistema rigido S di punti vincolati fra loro o con l'esterno, allora se $\vec{\phi}^{(e)}$ e $\vec{\mu}^{(e)}$ sono risultante e momento risultante delle reazioni dei vincoli esterni, si avrà

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(e)} + \vec{\phi}^{(e)} &= 0 \\ \vec{M}^{(e)} + \vec{\mu}^{(e)} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

e possiamo enunciare

Teorema 2.4.1. Condizione sufficiente (oltre che necessaria) *perché un sistema rigido che si trova in quiete in un istante $t = t_0$ rispetto ad un dato osservatore, conservi tale stato in un intervallo di tempo (t_0, t_1) è che (2.3) siano verificate nel medesimo intervallo di tempo.*

2.5 Questioni Energetiche

Vogliamo innanzitutto generalizzare il Teorema delle Forze Vive per un sistema di punti.

Definiamo l'energia cinetica per un sistema di punti (P_i, m_i)

$$T(t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2(t),\tag{2.4}$$

dove per ciascun punto i -esimo possiamo scrivere che la variazione di energia cinetica T_i è pari alla potenza delle forze attive e delle forze passive

$$\frac{dT_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i.$$

Sommando si ha

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi,$$

dove

$$W_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i, \quad W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i$$

sono la potenza delle forze direttamente applicate e delle reazioni vincolari rispettivamente, per cui possiamo enunciare

Teorema 2.5.1. *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma delle potenze delle forze direttamente applicate e delle reazioni vincolari.*

Se invece distinguiamo fra forze esterne e forze interne allora

$$\frac{dT_i}{dt} = \vec{F}_i^i \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_i^e \cdot \vec{v}_i.$$

Sommando si ha

$$\frac{dT}{dt} = W^e + W^i,$$

dove

$$W^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \vec{v}_i, \quad W^i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^i \cdot \vec{v}_i$$

sono la potenza delle forze esterne e delle forze interne rispettivamente, per cui possiamo enunciare

Teorema 2.5.2. *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma delle potenze delle forze interne e delle forze esterne.*

È bene osservare che nel caso generale le forze interne contribuiscono alla variazione dell'energia cinetica del sistema, ovvero in generale le forze interne possono compiere lavoro.

In termini di lavoro, si può riscrivere il risultato nella forma

$$\begin{aligned} dT &= W_F dt + W_\phi dt & , & \quad dT = W^e dt + W^i dt , \\ dT &= dL_F + dL_\phi & , & \quad dT = dL^e + W^i , \\ T(t) - T(t_0) &= L_F(t) + L_\phi(t) & , & \quad T(t) - T(t_0) = L^e(t) + L^i(t). \end{aligned}$$

Si può quindi concludere con il teorema:

Teorema 2.5.3. *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali in un intervallo di tempo $[t_0, t]$ è uguale al lavoro complessivo compiuto, nello stesso intervallo di tempo, dalle forze direttamente applicate e dalle reazioni vincolari, (ed anche dalle forze interne e dalle forze esterne).*

2.5.1 Caso di forze conservative

Ci domandiamo se nel caso in cui le forze agenti sul sistema di punti \mathcal{S} sono conservative sia possibile determinare una funzione $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ per l'intero sistema

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \equiv \mathcal{U}(C)$$

dove $C \in \mathbb{R}^{3n}$ è un vettore di \mathbb{R}^{3n} che rappresenta **la configurazione** del sistema, tale che

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = W_F .$$

Se le forze agenti sono $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, allora

$$\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \mathcal{U} .$$

Possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.5.1. *Si dice che il sistema di forze direttamente applicate $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_i, \vec{F}_i), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$ è **conservativo** se esiste una funzione $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale*

$$\vec{F}_1 = \text{grad}_{P_1} \mathcal{U}, \quad \vec{F}_2 = \text{grad}_{P_2} \mathcal{U}, \quad \dots, \quad \vec{F}_n = \text{grad}_{P_n} \mathcal{U} .$$

Limitandoci al caso di un sistema non vincolato, integrando il teorema delle forze vive $dT = d\mathcal{U}$ ed indicando per comodità

$$U(t) = \mathcal{U}(C(t)) = \mathcal{U}(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$$

si ottiene il noto **integrale dell'energia**

$$T(t) - U(t) = T(t_0) - U(t_0) . \tag{2.5}$$

2.6 Potenziale

2.6.1 Potenziale di forze esterne

Teorema 2.6.1. *Se le forze $\vec{F}_i^{(e)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono conservative con i potenziali $U_i^{(e)} = U_i^{(e)}(x_i, y_i, z_i)$ allora il sistema di forze esterne è conservativo con potenziale $U^{(e)} = \sum_{i=1}^n U_i^{(e)}$.*

Per dimostrare il teorema basta osservare che le forze esterne dipendono solo dal punto i -esimo e dai punti esterni al sistema. Infatti essendo

$$\vec{F}_i^{(e)} = \text{grad}_{P_i} U_i^{(e)}$$

e definendo $U^{(e)} = \sum_{i=1}^n U_i^{(e)}$ si ha ancora

$$\vec{F}_i^{(e)} = \text{grad}_{P_i} U^{(e)},$$

ovvero

$$\left(F_1^{(e)}, F_2^{(e)} \dots F_n^{(e)} \right) = \text{grad} U^{(e)}.$$

ESEMPIO 2.1. *Siano $\{P_1, P_2, \dots\}$ n punti pesanti nello spazio \mathbb{R}^3 , per ciascun punto materiale*

$$U_i^{(e)} = -m_i g z_i$$

dove m_i è la massa di ciascun punto. Definiamo

$$U^{(e)} = -\sum_{i=1}^n m_i g z_i = -g \sum_{i=1}^n m_i z_i = -m g z_{P_0}$$

dove $m = \sum_{i=1}^n m_i$ è la massa totale e z_{P_0} la quota del centro di massa.

2.6.2 Potenziale di forze interne

Siano $\vec{F}_1^{(i)}, \vec{F}_2^{(i)}, \dots, \vec{F}_n^{(i)}$ le forze interne degli n punti P_1, P_2, \dots, P_n . Supponiamo che ciascuna forza interna ammetta un potenziale, ovvero siano $U_i^{(i)}$ i potenziali di ciascuna forza interna definiti da

$$\vec{F}_i^{(i)} = \text{grad}_{P_i} U_i^{(i)}.$$

La somma di questi potenziali non dà in genere il potenziale dell'intero sistema di forze interne.

Definizione 2.6.1. *Un sistema di forze interne $\{(P_1, \vec{F}_1^{(i)}), (P_2, \vec{F}_2^{(i)}), \dots, (P_n, \vec{F}_n^{(i)})\}$ è conservativo se esiste una funzione $U^{(i)} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\vec{F}_i^{(i)} = \text{grad}_{P_i} U^{(i)}.$$

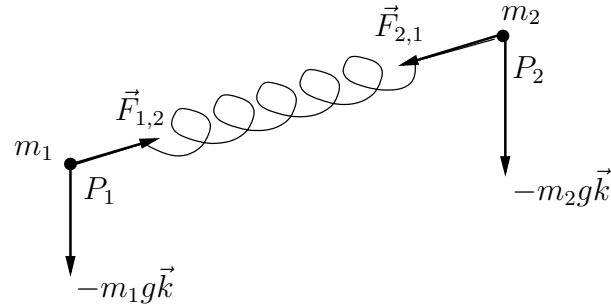


Figura 2.2: Sistema di due punti con forze interne ed esterne

ESEMPIO 2.2. Siano (P_1, m_1) e (P_2, m_2) due punti materiali pesanti che si attraggono con una forza elastica di costante k . Le forze agenti su ciascuno dei due punti sono

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} = -k(P_1 - P_2); \quad (2.6)$$

il potenziale per l'intero sistema è

$$U^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2.$$

Infatti

$$\text{grad}_{P_1} U^{(i)} = -\frac{1}{2}k \text{grad}_{P_1} (P_1 - P_2)^2 = -k(P_1 - P_2) = \vec{F}_{1,2}$$

$$\text{grad}_{P_2} U^{(i)} = -\frac{1}{2}k \text{grad}_{P_2} (P_1 - P_2)^2 = -k(P_2 - P_1) = \vec{F}_{2,1}$$

Si noti che non è corretto sommare i potenziali di ciascuna delle due forze $U_1^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2$ e $U_2^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2$, anche se singolarmente i loro gradienti danno le forze (2.6).

Per le forze esterne (invece)

$$U_1^{(e)} = -m_1gz_1, \quad U_2^{(e)} = -m_2gz_2$$

e quindi

$$U^{(e)} = -m_1gz_1 - m_2gz_2.$$

Esercizio 2.6.1. Si osservi che in generale le forze interne possono compiere lavoro. Dare qualche semplice esempio.

Esercizio 2.6.2. Dimostrare che le reazioni di rigidità in un corpo rigido (cioè le forze che mantengono rigido il corpo, mantenendo inalterate le distanze) non compiono lavoro, ovvero hanno potenza nulla.

Capitolo 3

DINAMICA dei SISTEMI OLONOMI

In questo capitolo si considera un qualsiasi sistema di punti materiali costituito da un numero finito di punti, anche se i risultati ottenuti valgono anche per un sistema continuo, costituito da un infinito numero di punti, caratterizzato da una densità di massa.

3.1 Generalità su un sistema di punti

3.1.1 Introduzione

Si consideri un sistema (discreto) \mathcal{S} di n punti materiali, costituito da un numero finito di punti $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Supponiamo che il sistema di punti sia libero nello spazio fisico (che possiamo identificare con lo spazio euclideo \mathbb{R}^3). Per **configurazione** del sistema libero \mathcal{S} si intende l'insieme delle posizioni $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ degli n punti che compongono il sistema.

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, \dots , $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $P_n = (x_n, y_n, z_n)$ i punti del sistema \mathcal{S} , ciascuno rappresentato nello spazio fisico tramite le sue coordinate; con l'introduzione dello spazio \mathbb{R}^{3n} , la configurazione del sistema \mathcal{S} può essere rappresentata da un punto libero in tale spazio a dimensione $3n$, quindi dalla n -pla $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Il moto del punto libero (a $3n$ dimensioni) in tale nuovo spazio corrisponde al moto del sistema \mathcal{S} e viceversa. Lo scopo dell'introduzione dello spazio \mathbb{R}^{3n} consiste principalmente nel fatto che, ambientando la meccanica in tale spazio, viene recuperato per lo studio dei sistemi olonomi costituiti da n punti il semplice linguaggio della meccanica del punto materiale.

Per distinguere quando parliamo dello spazio fisico da quello fittizio a $3n$ dimensioni, introduciamo $\mathcal{P}(t)$ come l'insieme dei punti (P_1, P_2, \dots, P_n) nello spazio fisico tridimensionale e $\mathcal{C}(t)$ come l'insieme delle $3n$ -ple $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ in \mathbb{R}^{3n} .

Nel sistema di punti \mathcal{S} di punti $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, assegnare una **configurazione del sistema** significa assegnare le posizioni (cioè le coordinate) dei punti che lo compongono.

Senza entrare nei particolari, con l'esperienza che il lettore si è fatta nello studio dei vincoli nella statica dei sistemi, supponiamo di essere in grado di introdurre, al posto delle $3n$ coordinate cartesiane una serie di nuove coordinate, che chiameremo **coordinate lagrangiane** e che potranno essere sufficienti ad individuare la configurazione dell'intero sistema.

Si consideri un sistema \mathcal{S} sottoposto a vincoli olonomi bilateri, cioè un sistema la cui configurazione generica sia esprimibile in funzione di uno ed un solo numero l di coordinate che chiameremo *coordinate lagrangiane*: q_1, q_2, \dots, q_l . Tali coordinate potranno essere parte delle originarie coordinate cartesiane od anche altre coordinate comunque esprimibili tramite di esse. Se i vincoli sono fissi le coordinate q_1, q_2, \dots, q_l saranno sufficienti ad esprimere la configurazione del sistema, nel caso di vincoli mobili dovremo aggiungere, come variabile esplicita, anche il tempo t .

Siamo quindi in grado di esprimere ogni punto degli n punti del sistema \mathcal{S} tramite le coordinate lagrangiane, ad ogni istante t

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t), t). \quad (3.1)$$

3.1.2 Vincoli olonomi

Vediamo nei dettagli come si definiscono i vincoli dal punto di vista matematico e come si introducono successivamente le coordinate lagrangiane.

Fissato un sistema di coordinate, i vincoli sono espressi da condizioni sulle terne di coordinate relative ai punti del sistema.

Definizione 3.1.1. *Definizione di vincolo olonomo.* Una relazione del tipo

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (3.2)$$

dipendente solo dal tempo e dalle posizioni (e non dalle velocità o dalle accelerazioni) si dirà **vincolo olonomo**.

La funzione vincolo f dovrà soddisfare delle ipotesi minimali che specificheremo nel seguito. Ai fini della dinamica, hanno interesse solo i sistemi labili, cioè i sistemi in cui il numero dei vincoli efficaci m sia minore del numero di gradi di libertà ($3n$) del sistema.

Definizione 3.1.2. *Definizione di sistema a vincoli olonomi.* Si dice sistema a vincoli olonomi un sistema \mathcal{S} di punti $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ a cui sono stati imposti m vincoli

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.3)$$

definiti dalle funzioni f_j , con derivate parziali continue e soddisfacenti le seguenti condizioni di:

- **compatibilità:** l'insieme $\mathcal{P}(t)$ delle n -ple $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ di punti di \mathbb{R}^3 che verificano le (3.3) non sia vuoto;

- **indipendenza:** la matrice jacobiana associata

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

costituita da m righe e $3n$ colonne, abbia rango massimo per ogni configurazione $\in \mathcal{P}(t)$.

Le velocità dei punti di un sistema a vincoli olonomi non possono essere qualunque. Definiamo

Definizione 3.1.3. Velocità possibili. Diciamo velocità possibili dei punti le velocità in un moto qualunque che i punti possono ammettere compatibilmente con i vincoli ad essi imposti.

Cerchiamo ora la relazione che le velocità devono verificare perché siano possibili. Differenziando rispetto al tempo la j -esima relazione si ha

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0,$$

quindi le velocità possibili devono soddisfare la relazione

$$\sum_{i=1}^n \text{grad} f_j \cdot \vec{v}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

3.1.3 Coordinate lagrangiane

Se la matrice jacobiana associata alle $f_j = 0$ ha rango massimo, allora, per il teorema del Dini, tutte le coordinate dei punti del sistema sono esprimibili (in un opportuno intorno di ciascuna configurazione compatibile con i vincoli) tramite un numero (**gradi di libertà**)

$$l = 3n - m$$

di parametri indipendenti q_1, q_2, \dots, q_l (**coordinate lagrangiane**), variabili in opportuni intervalli aperti I_1, I_2, \dots, I_l

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t). \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

in maniera tale che queste funzioni abbiano derivate parziali prime continue e che la matrice jacobiana ad esse associata abbia rango massimo cioè l .

Riscriviamo per comodità le relazioni precedenti (3.5) in forma compatta

$$\xi_h = \xi_h(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \quad h = 1, 2, \dots, 3n, \quad (3.6)$$

avendo indicato $\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_1, \xi_3 = z_1, \xi_4 = x_2, \xi_5 = y_2$, e così via. Quanto appena affermato è vero in virtù del seguente fatto: se la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h}\right)_{\substack{j=1 \dots m \\ h=1 \dots 3n}}$,

formata da m righe e $3n$ colonne ha rango massimo, allora la matrice associata al sistema (3.6) $\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial q_k}\right)_{\substack{h=1 \dots 3n \\ k=1 \dots l}}$ formata da $3n$ righe ed l colonne, ha anch'essa

rango massimo. Questa è un conseguenza immediata del teorema del Dini in quanto che, se la matrice non avesse rango massimo allora le $3n$ coordinate sarebbero esprimibili per mezzo di un numero minore di l di parametri indipendenti.

Le coordinate q_1, q_2, \dots, q_l possono interpretarsi come coordinate di un punto Q in uno spazio a dimensione l . Ad ogni punto nel cubo aperto $K = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_l \subset \mathbb{R}^l$ corrisponde una ed una sola configurazione del sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ compatibile con i vincoli e viceversa.

Abbiamo così introdotto un sistema di coordinate lagrangiane $\{q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l\}$ associate ad un sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ come una l -upla di parametri indipendenti variabili in intervalli aperti e tali che tramite essi si possono esprimere le coordinate degli n punti, come funzioni delle q_k soddisfacenti le ipotesi di indipendenza e compatibilità. L'aver imposto che gli intervalli di variabilità siano aperti comporta che le configurazioni del sistema non sono in generale tutte le configurazioni possibili, ma soltanto quelle in un intorno di una configurazione $\{P_1^0, P_2^0, \dots, P_n^0\}$. Ciò fa sì che in generale occorra più di un sistema di coordinate lagrangiane per rappresentare tutte le configurazioni del sistema considerato, mentre ciascuno di questi sistemi di coordinate costituisce una **rappresentazione locale**. Se lasciamo cadere la condizione che le coordinate debbano variare in intervalli aperti possono verificarsi alcune anomalie come ad esempio la perdita della differenziabilità delle $f_j = 0$ o la mancanza di biunivocità tra le l -uple q_1, q_2, \dots, q_l e le possibili configurazioni del sistema.

3.2 Spazio delle configurazioni di un sistema a vincoli olonomi.

Fissiamo il tempo $t \in [t_0, T]$. L'insieme $\mathcal{C}(t) \subset \mathbb{R}^{3n}$, immerso in \mathbb{R}^{3n} , costituito dai punti $C = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ aventi nell'ordine le coordinate della n -pla di punti $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \in \mathcal{P}(t)$ è in corrispondenza biunivoca con la configurazione del sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definizione 3.2.1. Spazio delle configurazioni. L'insieme $\mathcal{C}(t)$

$$\mathcal{C}(t) = \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^{3n} : \\ f_1\{P_1, P_2, \dots, P_n, t\} = 0, \dots, f_m\{P_1, P_2, \dots, P_n, t\} = 0\}$$

è detto spazio delle configurazioni.

Esempi:

- Siano P_1, P_2, \dots, P_n punti liberi. Lo spazio delle configurazioni è lo spazio euclideo \mathbb{R}^{3n} .

- Pendolo semplice. Lo spazio delle configurazioni è la circonferenza S^1 in \mathbb{R}^2 .
- Pendolo sferico. Lo spazio delle configurazioni è una superficie sferica S^2 in \mathbb{R}^3 .
- Pendolo doppio. Lo spazio delle configurazioni è il toro $T = S^1 \times S^1$ in \mathbb{R}^4 .
- Asta rigida nel piano. Lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1$ in \mathbb{R}^3 .

Lo spazio delle configurazioni è una varietà mobile (funzione del tempo) contenuta in \mathbb{R}^{3n} , rappresentabile (localmente) con solo $l = 3n - m$ parametri indipendenti. In questo senso la sua dimensione è l ed è pari al numero di gradi di libertà, ma è chiaro che ogni suo punto è immerso in \mathbb{R}^{3n} . Si noti che il termine spazio non è usato qui nel senso di spazio lineare. L'insieme $\mathcal{C}(t)$ di \mathbb{R}^{3n} delle configurazioni possibili varia col tempo e la relativa rappresentazione mediante una famiglia di sistemi di coordinate lagrangiane fa intervenire esplicitamente il tempo.

Indichiamo con $C = C(t) \in \mathbb{R}^{3n}$ un punto di $\mathcal{C}(t)$, ovvero una configurazione del sistema compatibile con i vincoli all'istante t .

Diamo ora alcune definizioni.

Definizione 3.2.2. Una *legge di moto* di un sistema olonomo rispetto ad un dato osservatore in un intervallo di tempo $[t_0, T]$ è una funzione

$$\mathcal{M} : t \in [t_0, T] \rightarrow C(t) \in \mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$$

con derivate prima e seconda continue.

Per ogni istante di tempo $[t_0, T]$ è determinato un punto $C(t) \in \mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ nello spazio delle configurazioni.

Del moto si può dare anche una rappresentazione lagrangiana usando un sistema di coordinate lagrangiane, utilizzando le trasformazioni per cui ogni punto $C(t)$ dello spazio delle configurazioni è rappresentabile con la l -pla $(q_1, q_2, \dots, q_l) \in K$, con K plurirettangolo aperto di \mathbb{R}^l e una funzione

$$\mathcal{M}_L : [t_0, T] \rightarrow K$$

con derivate prima e seconda continue. Per ogni $t \in [t_0, T]$ è determinato un punto di K al quale corrisponde univocamente $C \in \mathcal{C}(t)$.

Definizione 3.2.3. Diciamo *atto di moto* di un sistema olonomo di punti $\{P_i, m_i\}$ in un istante t il vettore $V \in \mathbb{R}^{3n}$ definito da

$$V = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, \dots, v_{nx}, v_{ny}, v_{nz})$$

dove \vec{v}_i indica la velocità del punto P_i all'istante t .

Utilizzando il linguaggio vettoriale, V non è altro che la velocità del punto $C \in \mathcal{C}(t)$: $V = \frac{dC}{dt}$.

Definizione 3.2.4. Un *atto di moto* di un sistema di punti $\{P_i, m_i\}$ si dice **possibile** se, in una determinata configurazione e ad un dato istante, l'atto di moto risulta compatibile coi vincoli imposti al sistema.

Differenziando le $f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, si ottiene la condizione per le velocità possibili, trovata in (3.4)

Definizione 3.2.5. *Si definisce **stato cinematico** di un sistema olonomo in un istante t la coppia (C, V) dove $C \in \mathcal{C}(t)$ e V è un atto di moto possibile relativamente alla configurazione C e all'istante t .*

Definizione 3.2.6. Spazio delle fasi. *L'insieme degli stati cinematici di un sistema olonomo in un istante t si chiama spazio delle fasi del sistema in quell'istante.*

Fissiamo t e sia $C \in \mathbb{R}^{3n}$ un punto di $\mathcal{C}(t)$, $C = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Abbiamo già visto che se la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h}\right)_{\substack{j=1 \dots m \\ h=1 \dots 3n}}$, dove ξ_h sono le coordinate

dei punti di $\mathcal{P}(t)$, ha rango massimo allora anche la matrice $\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial q_k}\right)_{\substack{h=1 \dots 3n \\ k=1 \dots l}}$ ha

rango massimo. In altre parole gli l vettori

$$\left(\frac{\partial C}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \frac{\partial y_1}{\partial q_k}, \frac{\partial z_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \frac{\partial y_n}{\partial q_k}, \frac{\partial z_n}{\partial q_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

sono linearmente indipendenti e pertanto forniscono una base per un sottospazio lineare di \mathbb{R}^{3n} di dimensione l .

Definizione 3.2.7. Spazio tangente. *Si dice spazio tangente allo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t)$ in un dato istante t ed in un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ il sottospazio $TC(C, t) \subset \mathbb{R}^{3n}$ di dimensione l , avente come base i vettori $\left(\frac{\partial C}{\partial q_k}\right)$, $k = 1, 2, \dots, l$.*

Così come abbiamo fatto per la velocità di un punto in \mathbb{R}^3 , possiamo decomporre l'atto di moto V in \mathbb{R}^{3n} in parte virtuale ed in parte di trascinamento. Utilizzando la rappresentazione lagrangiana del moto, se deriviamo le coordinate dei punti $P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t)$ tenendo presente che $q_k = q_k(t)$ si ottiene

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definizione 3.2.8. Velocità virtuale. *La componente*

$$\hat{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

è chiamata velocità virtuale, e corrisponde alla velocità dei punti del sistema sotto l'ipotesi che i vincoli non varino nel tempo.

Definizione 3.2.9. Velocità di trascinamento. *La componente*

$$\hat{v}_i = \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

è chiamata velocità di trascinamento dovuto ai vincoli e corrisponde alla velocità dei punti del sistema sotto l'ipotesi che i punti si muovano solo sotto l'effetto del moto dei vincoli.

Otteniamo così la decomposizione di V in

$$V = \hat{V} + V^* \in \mathbb{R}^{3n},$$

dove, utilizzando il simbolo di vettore in \mathbb{R}^{3n} , ciascuna componente è

$$\hat{V} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial C}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \text{atto di moto virtuale}$$

$$V^* = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \text{atto di moto di trascinamento}$$

Dalla definizione di atto di moto virtuale e da quello di spazio tangente si ha il seguente teorema.

Teorema 3.2.1. *Condizione necessaria e sufficiente perché il vettore $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ sia un atto di moto virtuale per un sistema olonomo relativamente all'istante t e ad un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ è che*

$$\hat{V} \in TC(C, t).$$

Se deriviamo rispetto al tempo le $f_j = 0$ (tralasciando la dipendenza esplicita dal tempo) si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} f_j \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} f_j \cdot \hat{v}_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Confrontando questa relazione col fatto che $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n)$ appartiene allo spazio tangente, si deduce che gli m vettori

$$(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

sono vettori di \mathbb{R}^{3n} ciascuno ortogonale in \mathbb{R}^{3n} a $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n)$.

Inoltre sempre nell'ipotesi che la matrice jacobiana delle f_j abbia rango massimo, gli m vettori, $(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per un sottospazio lineare di \mathbb{R}^{3n} di dimensione m . Dunque definiamo lo spazio normale.

Definizione 3.2.10. Spazio normale. *Si dice spazio normale allo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t)$ in un dato istante t ed in un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ il sottospazio $NC(C, t)$ di dimensione m , avente come base i vettori*

$$(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Nota 3.2.1. Lo spazio normale risulta essere il complemento ortogonale dello spazio tangente $TC(C, t)$. Lo spazio \mathbb{R}^{3n} è la somma diretta degli spazi $TC(C, t)$ e $NC(C, t)$, cioè $TC(C, t) \oplus NC(C, t)$.

3.3 Vincoli olonomi lisci - Principio dei lavori virtuali e conseguenze

Innanzitutto introduciamo alcune notazioni.

- $\vec{\phi}_i$ = reazione vincolare sul punto (P_i, m_i) dovuta al complesso dei vincoli imposti.
- \vec{F}_i = risultante delle forze direttamente applicate su (P_i, m_i) .

Esprimiamo ora la potenza del sistema di forze, sia attive che vincolari agenti sul sistema \mathcal{S}

$$W = W_F + W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i. \quad (3.1)$$

Tenendo conto che $\vec{v}_i = \hat{v}_i + \vec{v}_i^*$, si ha

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i^* \\ &= \hat{W}_F + \hat{W}_\phi + W_F^* + W_\phi^* = \hat{W} + W^*, \end{aligned}$$

dove $\hat{W} = \hat{W}_F + \hat{W}_\phi$ è la potenza virtuale del sistema di forze direttamente applicate e delle reazioni e dove $W^* = W_F^* + W_\phi^*$ è la potenza dovuta al moto eventuale dei vincoli per i due sistemi di forze.

Definizione 3.3.1. Definizione di vincoli lisci. *Un sistema olonomo si dice a vincoli (bilateri) lisci se*

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0 \quad (3.2)$$

qualunque siano le velocità virtuali \hat{v}_i dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ ed in ogni disposizione dei punti del sistema compatibili con i vincoli (ovvero in ogni punto dello spazio delle configurazioni).

La relazione (3.2) introdotta qui come definizione di vincoli lisci è conosciuta in letteratura come **principio dei lavori virtuali**. Dal principio dei lavori virtuali e dalla definizione di spazio normale allo spazio delle configurazioni discende il seguente teorema.

Teorema 3.3.1. Vincoli lisci. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema olonomo sia a vincoli lisci (bilateri) è che risulti*

$$(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n) \in NC(C, t),$$

qualunque sia lo stato cinematico del sistema.

In altre parole $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n)$ è un elemento dello spazio normale. Allora ogni componente $\vec{\phi}_i$ potrà essere espresso come combinazione lineare degli elementi di base dello spazio normale $\text{grad}_{P_i} f_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, cioè

$$\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j. \quad (3.3)$$

In termini generali il complesso delle reazioni in \mathbb{R}^{3n} è dato da

$$(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j,)$$

Si consideri ora i termini relativi alle forze attive e vediamo come è possibile scriverli col formalismo lagrangiano.

$$W_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

Definiamo le **forze generalizzate o lagrangiane**

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (3.4)$$

che corrispondono alla proiezione di ciascuna delle forze attive sulle direzioni tangenti allo spazio delle configurazioni. Quindi la potenza delle forze attive è data da

$$W_F = \sum_{k=1}^l Q_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (3.5)$$

dove alla potenza delle forze generalizzate va sommata la potenza delle forze a causa della mobilità dei vincoli.

Si consideri il termine dovuto al lavoro virtuale delle reazioni e, operando come con le forze attive, vediamo come è possibile scriverlo col formalismo lagrangiano.

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = 0. \quad (3.6)$$

Se indichiamo con

$$R_k = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (3.7)$$

si ha

$$\hat{W}_\phi = \sum_{k=1}^l R_k \dot{q}_k = 0. \quad (3.8)$$

In conclusione, utilizzando il principio dei lavori virtuali, l'arbitrarietà delle velocità lagrangiane consente di ricavare

$$R_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l. \quad (3.9)$$

Nota 3.3.1. Se lo studente pensa all'analogia fra lo studio di un sistema vincolato con il formalismo lagrangiano e lo studio di un punto libero in uno spazio a l dimensioni, è naturale aspettarsi che le reazioni vincolari, nel formalismo lagrangiano, debbano essere nulle in quanto il sistema è libero.

Per completezza scriviamo la potenza delle reazioni, nel formalismo lagrangiano, nell'ipotesi di vincoli lisci,

$$W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}. \quad (3.10)$$

È bene rivedere queste considerazioni in termini di lavoro, scrivendo

$$dL = W dt = \sum_{k=1}^l Q_k dq_k + \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\phi}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} dt.$$

Se le forze attive sono conservative, cioè esiste un potenziale $\mathcal{U}^{(a)}$ tale che $\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \mathcal{U}^{(a)}$, dove $\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}^{(a)}(P_1, P_2, \dots, P_n)$, allora

$$\sum_{k=1}^l Q_k dq_k = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} \mathcal{U}^{(a)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{U}^{(a)}}{\partial q_k} dq_k = d\mathcal{U}^{(a)},$$

dove $d\mathcal{U}^{(a)}$ è il differenziale della funzione composta

$$\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}^{(a)}(q_1, q_2, \dots, q_l) = \mathcal{U}^{(a)}(P_1(q_1, q_2, \dots, q_l), P_2(q_1, q_2, \dots, q_l), \dots, P_n(q_1, q_2, \dots, q_l)).$$

Quindi per forze conservative si ha

$$Q_k = \frac{\partial \mathcal{U}^{(a)}}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (3.11)$$

Quest'ultime considerazioni saranno utili per lo studio della statica dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

3.3.1 Ancora sui vincoli lisci. Esempio

Ricordiamo che un sistema di punti materiali a vincoli olonomi si dice a vincoli lisci se

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0 \quad (3.1)$$

qualunque siano le velocità virtuali \hat{v}_i dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ e in ogni configurazione $C \in \mathcal{C}(t)$. Dalla definizione segue subito il teorema.

Teorema 3.3.2. *I vincoli di rigidità sono lisci.*

Dimostrazione. Ricordiamo che in un sistema rigido la distanza fra due punti qualsiasi P_r e P_s si mantiene costante nel tempo, ovviamente tali vincoli sono olonomi ed indipendenti dal tempo. Allora le velocità dei due punti soddisfano la relazione $\vec{v}(P_r) = \vec{v}(P_s) + \omega \wedge (P_r - P_s)$. Se indichiamo con $\vec{\phi}_{rs}$ l'azione di P_r su P_s e con $\vec{\phi}_{sr}$ l'azione di P_s su P_r , allora la potenza virtuale (e quindi anche effettiva) è data da

$$\hat{W}_{rs} = \vec{\phi}_{rs} \cdot \vec{v}_s + \vec{\phi}_{sr} \cdot \vec{v}_r.$$

Per il principio di azione e reazione

$$\hat{W}_{rs} = \vec{\phi}_{rs} \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_r) = \vec{\phi}_{rs} \cdot \omega \wedge (P_s - P_r).$$

Ma $\vec{\phi}_{rs}$ è parallela a $(P_r - P_s)$ e quindi qualunque siano P_s e P_r si ha $\hat{W}_{rs} = 0$. Quindi il principio dei lavori virtuali vale per i vincoli di rigidità in un sistema rigido. \square

Capitolo 4

EQUAZIONI DI LAGRANGE di I^a SPECIE

4.1 Introduzione

In questo capitolo si introducono le equazioni di Lagrange di I^a specie. La definizione di vincoli lisci consente di scrivere le reazioni in ogni punto P_i del sistema nella seguente forma

$$\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j. \quad (4.1)$$

Nelle equazioni di Lagrange di I^a specie si fa uso di questo risultato per ottenere un numero di incognite pari al numero di equazioni.

4.2 Equazioni di Lagrange di prima specie.

L'espressione delle reazioni vincolari (4.1), ovvero la definizione di vincoli lisci, permette di rendere possibile lo studio del sistema, costituito dalle equazioni di Newton e dalle equazioni vincolari:

$$\begin{cases} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\phi}_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Si ricordi che tale sistema ha più incognite che equazioni e la sua risolubilità è possibile solo se si fanno ipotesi sui vincoli. In realtà l'ipotesi di vincoli lisci consente di esprimere le reazioni $\vec{\phi}_i$ introducendo come nuove incognite, al posto delle reazioni stesse, i parametri

$$\begin{cases} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j, & i = 1, 2, \dots, n, \\ f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (4.2)$$

Queste equazioni sono dette **equazioni di Lagrange di prima specie**.

Le equazioni scalari contenute nel sistema (4.2) sono $3n + m$, le incognite scalari (funzioni del tempo), pari al numero di equazioni scalari sono precisamente

- i) le $3n$ coordinate dei punti del sistema che compaiono nelle equazioni con le loro derivate prime e seconde;
- ii) gli m coefficienti λ_j che compaiono nelle reazioni vincolari.

Al sistema (4.2) vanno assegnate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} P_i(0) = P_{i0}, \\ \vec{v}_i(0) = \vec{v}_{i0}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e sotto ipotesi di regolarità delle funzioni, il sistema ammette una ed una sola soluzione, ottenendo così non solo la legge di moto dei punti, ma anche le reazioni vincolari per ogni istante t .

4.3 Esercizi sulle equazioni di Lagrange di I specie

ESERCIZIO 4.3.1. *Sistema di 2 punti vincolati.*

Si consideri un sistema costituito da due punti materiali P_1 , e P_2 , di uguale massa m , in un piano orizzontale; P_1 è vincolato all'asse $y = 0$, P_2 è vincolato all'asse $x = 0$, i punti P_1 e P_2 sono vincolati fra loro in modo da mantenersi sempre alla stessa distanza l . I vincoli sono lisci. Si studi il moto dei 2 punti.

Nota 4.3.1. Si noti che il sistema è costituito solamente da 2 punti materiali. Idealmente non c'è un'asta rigida che realizza il vincolo che mantiene i punti equidistanti.

Indichiamo con x_i, y_i le coordinate di ciascun punto P_i . Le equazioni dei vincoli sono le seguenti

$$\begin{cases} f_1(P_1, P_2) = y_1 & = 0 \\ f_2(P_1, P_2) = x_2 & = 0 \\ f_3(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 & = 0 \end{cases}.$$

Il sistema dei due punti ha $2 \cdot 2 - 3 = 1$ grado di libertà. Possiamo scegliere come coordinata lagrangiana l'ascissa x_1 , che potrà variare fra $-l$ e l . Si immagini inoltre che i punti possano scorrere da un ramo all'altro degli assi coordinati a cui sono vincolati.

Dal terzo vincolo si ottiene $x_1^2 + y_2^2 = l^2$, e derivando si ottiene la relazione per le velocità possibili

$$x_1 \dot{x}_1 + y_2 \dot{y}_2 = 0. \quad (4.3)$$

Scriviamo le reazioni utilizzando la formula $\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j$, dove j varia fra 1 e 3, ottenendo così

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1 &= \lambda_1 \text{grad}_{P_1} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{P_1} f_2 + \lambda_3 \text{grad}_{P_1} f_3 = \lambda_1 \vec{j} + 0 + 2\lambda_3(x_1 \vec{i} - y_2 \vec{j}) \\ \vec{\phi}_2 &= \lambda_1 \text{grad}_{P_2} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{P_2} f_2 + \lambda_3 \text{grad}_{P_2} f_3 = \lambda_2 \vec{i} + 0 - 2\lambda_3(x_1 \vec{i} - y_2 \vec{j}) \end{aligned}$$

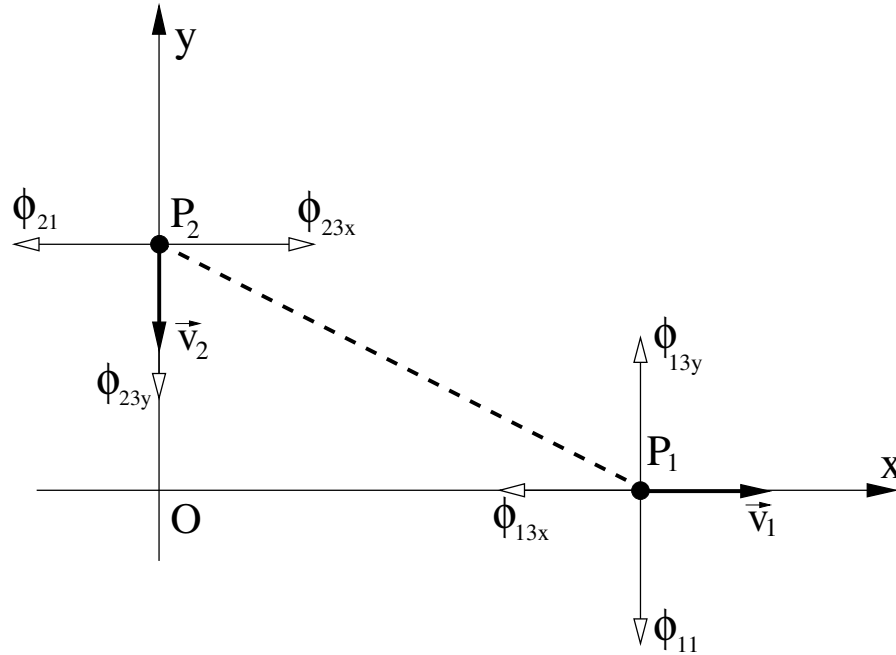


Figura 4.1: 2 punti vincolati su due guide ortogonali.

dove si è tenuto conto dei seguenti gradienti

$$\begin{aligned} \text{grad}_{P_1} f_1 &= \vec{j}, & \text{grad}_{P_2} f_1 &= 0, \\ \text{grad}_{P_1} f_2 &= 0, & \text{grad}_{P_2} f_2 &= \vec{i}, \\ \text{grad}_{P_1} f_3 &= -2(x_2 - x_1)\vec{i} - 2(y_2 - y_1)\vec{j}, & \text{grad}_{P_2} f_3 &= 2(x_2 - x_1)\vec{i} + 2(y_2 - y_1)\vec{j}. \end{aligned}$$

Siamo in grado di scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie

$$\begin{cases} m\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{j} + 2\lambda_3(x_1\vec{i} - y_2\vec{j}), \\ m\vec{a}_2 = \lambda_2\vec{i} - 2\lambda_3(x_1\vec{i} - y_2\vec{j}), \\ x_1^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \end{cases}$$

dove si è tenuto conto dei due vincoli $y_1 = 0$ e $x_2 = 0$. In componenti scalari si ha

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 2\lambda_3x_1 \\ 0 = \lambda_1 - 2\lambda_3y_2 \\ 0 = \lambda_2 - 2\lambda_3x_1 \\ m\ddot{y}_2 = 2\lambda_3y_2 \\ x_1^2 + y_2^2 = l^2 \end{cases}.$$

Anche senza risolvere il sistema interamente, se teniamo conto di

$$\lambda_1 = 2\lambda_3y_2, \quad \lambda_2 = 2\lambda_3x_1,$$

nelle reazioni, otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1 &= \vec{\phi}_{11}\vec{j} + \vec{\phi}_{13x}\vec{i} + \vec{\phi}_{13y}\vec{j} = \lambda_1\vec{j} + 2\lambda_3x_1\vec{i} - 2\lambda_3y_2\vec{j} = 2\lambda_3x_1\vec{i} = \lambda_2\vec{i}, \\ \vec{\phi}_2 &= \vec{\phi}_{22}\vec{i} + \vec{\phi}_{23x}\vec{i} + \vec{\phi}_{23y}\vec{j} = \lambda_2\vec{i} - 2\lambda_3x_1\vec{i} + 2\lambda_3y_2\vec{j} = 2\lambda_3y_2\vec{j} = \lambda_1\vec{j}. \end{aligned}$$

Moltiplicando le due equazioni di moto per \dot{x}_1 e \dot{y}_2 rispettivamente e sommando, si ottiene

$$m(\ddot{x}_1\dot{x}_1 + \ddot{y}_2\dot{y}_2) = 2\lambda_3(x_1\dot{x}_1 + y_2\dot{y}_2) = 0.$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \right) = 0,$$

che implica la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Dalla (4.3) e dall'equazione vincolare $x_1^2 + y_2^2 = l^2$ si ha

$$\dot{y}_2^2 = \dot{x}_1^2 \frac{x_1^2}{y_2^2} = \dot{x}_1^2 \frac{x_1^2}{l^2 - x_1^2}$$

e sostituendo nella relazione di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m \left(1 + \frac{x_1^2}{l^2 - x_1^2} \right) \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

da cui

$$\dot{x}_1^2 = v_0^2 \frac{l^2 - x_1^2}{l^2}.$$

Derivando di nuovo e semplificando si ottiene l'equazione di moto per x_1 :

$$\ddot{x}_1 + \frac{v_0^2}{l^2}x_1 = 0. \quad (4.4)$$

Per fissare le idee supponiamo che inizialmente i due punti si trovino entrambi sull'asse y , e che P_1 parta con velocità v_0 , cioè

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, & \dot{x}_1(0) = v_0, \\ y_2(0) = l, & \dot{y}_2(0) = 0. \end{cases}$$

Pertanto il punto (P_1, m) si muove con legge sinusoidale, per cui

$$\begin{cases} x_1(t) = l \sin \frac{v_0}{l}t, \\ y_2(t) = l \cos \frac{v_0}{l}t. \end{cases}$$

Ripetendo i calcoli direttamente dalle equazioni di Lagrange di I specie si ottengono pure i parametri lagrangiani, che dipendono a loro volta dal tempo. Dalla prima equazione si ha

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}m \frac{\ddot{x}_1}{x_1} = -\frac{1}{2}m \frac{v_0^2}{l^2}$$

e dalla seconda e terza

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= 2\lambda_3 y_2 = -m \frac{v_0^2}{l} \cos \frac{v_0}{l}t, \\ \lambda_2(t) &= 2\lambda_3 x_1 = -m \frac{v_0^2}{l} \sin \frac{v_0}{l}t. \end{aligned}$$

In conclusione possiamo scrivere le reazioni vincolari

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_1 &= 2\lambda_3 x_1 \vec{v} = \lambda_2 \vec{v} = -m \frac{v_0^2}{l} \sin \frac{v_0}{l} t \vec{v}, \\ \vec{\phi}_2 &= 2\lambda_3 y_2 \vec{j} = \lambda_1 \vec{j} = -m \frac{v_0^2}{l} \cos \frac{v_0}{l} t \vec{j}.\end{aligned}$$

Per comprendere la genesi di queste reazioni, è bene scrivere i contributi dei singoli vincoli

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_{1,1} &= \lambda_1 \vec{j}, & \vec{\phi}_{1,2} &= 0, & \vec{\phi}_{1,3} &= 2\lambda_3 (x_1 \vec{v} - y_2 \vec{j}), \\ \vec{\phi}_{2,1} &= \lambda_2 \vec{v}, & \vec{\phi}_{2,2} &= 0, & \vec{\phi}_{2,3} &= -\vec{\phi}_{1,3}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4.3.2. *Sistema di 3 punti vincolati.*

Si consideri un sistema costituito da tre punti materiali P_1 , P_2 , e P_3 , di uguale massa m , in un piano orizzontale, vincolati nel seguente modo: P_1 e P_3 sono vincolati all'asse $y = 0$, P_2 è vincolato all'asse $x = 0$, i punti P_1 e P_2 sono vincolati fra loro in modo da mantenersi alla distanza l , i punti P_2 e P_3 sono vincolati fra loro in modo da mantenersi alla distanza $2l$. I vincoli sono lisci. Si studi il moto dei tre punti.

Indichiamo con x_i, y_i le coordinate di ciascun punto P_i . Le equazioni dei vincoli sono le seguenti

$$\begin{aligned}f_1(P_1, P_2, P_3) &= y_1 & &= 0 \\ f_2(P_1, P_2, P_3) &= x_2 & &= 0 \\ f_3(P_1, P_2, P_3) &= y_3 & &= 0 \\ f_4(P_1, P_2, P_3) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= & l^2 \\ f_5(P_1, P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= & (2l)^2\end{aligned}$$

Il sistema dei tre punti ha $2 \cdot 3 - 5 = 1$ grado di libertà. Possiamo scegliere come coordinata lagrangiana l'ascissa x_1 , che potrà variare fra $-l$ e l . Si immagini ancora che i punti possano scorrere da un ramo all'altro degli assi coordinati a cui sono vincolati. Le reazioni nei 3 punti sono espresse nella seguente forma

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_1 &= \lambda_1 \text{grad}_{P_1} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{P_1} f_2 + \lambda_3 \text{grad}_{P_1} f_3 + \lambda_4 \text{grad}_{P_1} f_4 + \lambda_5 \text{grad}_{P_1} f_5 = \\ &= \lambda_1 \vec{j} - 2\lambda_4 (x_2 - x_1) \vec{v} - 2\lambda_4 (y_2 - y_1) \vec{j}, \\ \vec{\phi}_2 &= \lambda_1 \text{grad}_{P_2} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{P_2} f_2 + \lambda_3 \text{grad}_{P_2} f_3 + \lambda_4 \text{grad}_{P_2} f_4 + \lambda_5 \text{grad}_{P_2} f_5 = \\ &= \lambda_2 \vec{v} + 2\lambda_4 (x_2 - x_1) \vec{v} + 2\lambda_4 (y_2 - y_1) \vec{j} - 2\lambda_5 (x_3 - x_2) \vec{v} - 2\lambda_5 (y_3 - y_2) \vec{j}, \\ \vec{\phi}_3 &= \lambda_1 \text{grad}_{P_3} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{P_3} f_2 + \lambda_3 \text{grad}_{P_3} f_3 + \lambda_4 \text{grad}_{P_3} f_4 + \lambda_5 \text{grad}_{P_3} f_5 = \\ &= \lambda_3 \vec{j} + 2\lambda_5 (x_3 - x_2) \vec{v} + 2\lambda_5 (y_3 - y_2) \vec{j}.\end{aligned}$$

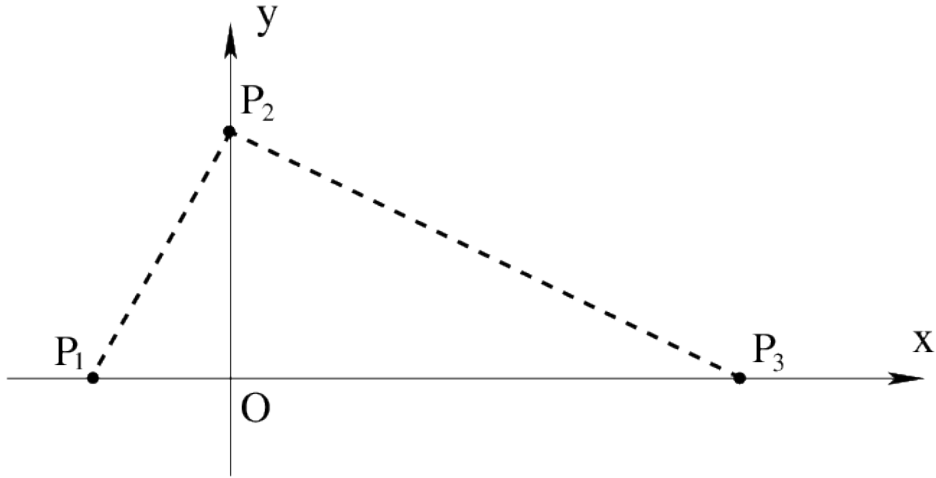


Figura 4.2: Sistemi di 3 punti vincolati nel piano.

Tenendo conto che non ci sono forze attive agenti sui punti, le equazioni di Lagrange di I specie diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} m\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{j} - 2\lambda_4(x_2 - x_1)\vec{i} - 2\lambda_4(y_2 - y_1)\vec{j} \\ m\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{i} + 2\lambda_4(x_2 - x_1)\vec{i} + 2\lambda_4(y_2 - y_1)\vec{j} - 2\lambda_5(x_3 - x_2)\vec{i} - 2\lambda_5(y_3 - y_2)\vec{j} \\ m\vec{a}_3 = \lambda_3 \vec{j} + 2\lambda_5(x_3 - x_2)\vec{i} + 2\lambda_5(y_3 - y_2)\vec{j} \\ y_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - (2l)^2 = 0 \end{array} \right.$$

ovvero 6 equazioni differenziali e 5 equazioni vincolari (algebriche)

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = -2\lambda_4(x_2 - x_1) \\ m\ddot{y}_1 = \lambda_1 - 2\lambda_4(y_2 - y_1) \\ m\ddot{x}_2 = \lambda_2 + 2\lambda_4(x_2 - x_1) - 2\lambda_5(x_3 - x_2) \\ m\ddot{y}_2 = 2\lambda_4(y_2 - y_1) - 2\lambda_5(y_3 - y_2) \\ m\ddot{x}_3 = 2\lambda_5(x_3 - x_2) \\ m\ddot{y}_3 = \lambda_3 + 2\lambda_5(y_3 - y_2) \\ y_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - (2l)^2 = 0 \end{array} \right. .$$

Si possono eliminare immediatamente tre equazioni corrispondenti alle relazioni

vincolari (lineari)

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = 2\lambda_4 x_1 \\ 0 = \lambda_1 - 2\lambda_4 y_2 \\ 0 = \lambda_2 - 2\lambda_4 x_1 - 2\lambda_5 x_3 \\ m\ddot{y}_2 = 2\lambda_4 y_2 + 2\lambda_5 y_2 \\ m\ddot{x}_3 = 2\lambda_5 x_3 \\ 0 = \lambda_3 - 2\lambda_5 y_2 \\ x_1^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \\ x_3^2 + y_2^2 - 4l^2 = 0 \end{array} \right. .$$

Derivando le ultime due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 \dot{x}_1 + y_2 \dot{y}_2 &= 0, \\ x_3 \dot{x}_3 + y_2 \dot{y}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ora moltiplichiamo le tre equazioni di moto per \dot{x}_1 , \dot{y}_2 , \dot{x}_3 rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 \dot{x}_1 = 2\lambda_4 x_1 \dot{x}_1, \\ m\ddot{y}_2 \dot{y}_2 = 2(\lambda_4 + \lambda_5) y_2 \dot{y}_2, \\ m\ddot{x}_3 \dot{x}_3 = 2\lambda_5 x_3 \dot{x}_3 \end{array} \right.$$

poi sommiamo e utilizzando le (4.5) si ha

$$m(\ddot{x}_1 \dot{x}_1 + \ddot{y}_2 \dot{y}_2 + \ddot{x}_3 \dot{x}_3) = 2\lambda_4 (x_1 \dot{x}_1 + y_2 \dot{y}_2) + 2\lambda_5 (x_3 \dot{x}_3 + y_2 \dot{y}_2) = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 \right) = 0.$$

Supponiamo che i tre punti inizialmente soddisfino le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = -l, & y_2(0) = 0, & x_3(0) = 2l, \\ \dot{x}_1(0) = 0, & \dot{y}_2(0) = v_0, & \dot{x}_3(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione di conservazione dell'energia prende la forma

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{x_1^2}{y_2^2} + \frac{x_1^2}{x_3^2} \right) \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

che con un po' di algebra si può riscrivere

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{3l^4 + 2l^2 x_1^2 - x_1^4}{3l^4 - 2l^2 x_1^2 - x_1^4} \right) \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Derivando l'espressione

$$\dot{x}_1^2 = v_0^2 \left(\frac{3l^4 - 2l^2 x_1^2 - x_1^4}{3l^4 + 2l^2 x_1^2 - x_1^4} \right),$$

a conti fatti si ha

$$\ddot{x}_1 = -4v_0^2 l^2 \frac{(3l^4 + x_1^4)}{(3l^4 + 2l^2 x_1^2 - x_1^4)^2} x_1.$$

Lasciamo al lettore di trovare la soluzione della precedente equazione differenziale, e poi di investigare i moti degli altri due punti. Ci limitiamo solo ad osservare che il moto di x_1 in questo secondo esercizio appare subito diverso da quello di x_1 dato da (4.4), in quanto la nuova equazione di moto non è più lineare, come era da aspettarsi in quanto che in questo esercizio i punti P_1 e P_2 si devono portare dietro anche il punto P_3 .

Capitolo 5

STATICA dei SISTEMI OLONOMI

5.1 Introduzione

È bene prima di procedere con la dinamica dei sistemi olonomi, sviluppare la statica dei sistemi olonomi. In questa sezione utilizzeremo poi il principio dei lavori virtuali per risolvere problemi di statica.

5.2 Statica dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

Una configurazione C^0 di un sistema olonomo è di equilibrio se le equazioni di Lagrange di prima specie con configurazione iniziale C^0 e con velocità iniziali nulle hanno come unica soluzione

$$C(t) = C^0, t > t_0.$$

Una configurazione C^0 è di equilibrio in $[t_0, T]$ se e solo se per ogni $t \in [t_0, T]$ si ha

$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j = 0, & i = 1, \dots, n, \\ f_j(C^0, t) = 0, & j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

In altre parole $\vec{F}_i = -\sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j = \vec{\phi}_i$, ovvero

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in NC(C^0, t).$$

Possiamo enunciare il

Teorema 5.2.1. *Condizione necessaria e sufficiente perché C^0 sia di equilibrio in $[t_0, T]$ è che il sistema di forze direttamente applicate sia tale che*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in NC(C^0, t), \quad \text{per ogni } t \in [t_0, T] \quad (5.1)$$

e che $C^0 \in \mathcal{C}(t)$, per ogni $t \in [t_0, T]$.

A questo punto il principio dei lavori virtuali può essere scritto nella forma

$$\hat{W}_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i = 0, \quad (5.2)$$

qualunque siano le velocità virtuali \hat{v}_i dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ e in ogni configurazione $C \in \mathcal{C}(t)$. L'equazione (7.2) è detta **equazione simbolica della statica** dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

Facendo uso delle coordinate lagrangiane

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = 0$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^l Q_k \dot{q}_k = 0,$$

dove $Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ sono dette **forze generalizzate**.

Per l'arbitrarietà delle velocità lagrangiane \dot{q}_k , si ha $Q_k = 0$, per ogni $k = 1, 2, \dots, l$. Quindi l'equazione simbolica della statica, espressa tramite le coordinate lagrangiane, dà luogo ad l equazioni

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

che consentono di determinare le coordinate lagrangiane corrispondenti all'eventuale configurazione di equilibrio.

Vediamo cosa succede nel caso conservativo. Nel caso di forze conservative, esiste una funzione potenziale \mathcal{U} , tale che $\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \mathcal{U}$. Introducendo le coordinate lagrangiane

$$U(q_1, q_2, \dots, q_l, t) = \mathcal{U}(P_1(q_1, q_2, \dots, q_l, t), P_2(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \dots, P_n(q_1, q_2, \dots, q_l, t))$$

e tenendo conto di ciò nell'espressione delle Q_k

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \text{grad} \mathcal{U} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k}.$$

Quindi

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \implies \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

In presenza di vincoli bilateri lisci e fissi, le equazioni $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} = 0, k = 1, 2, \dots, l$, traducono la condizione di stazionarietà del potenziale.

Nota 5.2.1. L'applicazione dell'equazione $Q_k = 0, k = 1, 2, \dots$, non risulta sempre facile, in quanto occorrono speciali cautele per la scelta delle coordinate lagrangiane. Particolare attenzione va data ai domini di variabilità delle coordinate lagrangiane così da trovare i punti di equilibrio all'interno degli intervalli in cui variano le q_k .

Come applicazioni si consideri la statica dei corpi rigidi e l'equilibrio dei sistemi pesanti (stazionarietà della quota del baricentro, principio del Torricelli).

5.3 Statica dei sistemi rigidi

Ricordiamo le equazioni cardinali della statica

Teorema 5.3.1. Equazioni cardinali della statica. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema rigido, in quiete in un istante, vi rimanga è che siano verificate*

$$\vec{R}^{(e)} = 0, \quad \vec{M}^e(O) = 0$$

dove $\vec{R}^{(e)}$ è la risultante delle forze esterne e $\vec{M}^e(O)$ è il momento delle forze esterne rispetto ad un punto O .

Vediamone la dimostrazione per un sistema rigido libero. Si parte dalla condizione necessaria e sufficiente (5.1), che in termini di potenza si esprime con

$$\hat{W}_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i = 0, \quad (5.3)$$

che equivale a $W_F = 0$ essendo i vincoli fissi, per qualsiasi moto rigido che è caratterizzato da \vec{v}_0 ed $\vec{\omega}$ e dove le \vec{F}_i sono le forze direttamente applicate. Quindi

$$\begin{aligned} W_F &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0. \end{aligned}$$

Dovendo questa relazione valere per \vec{v}_0 ed $\vec{\omega}$ qualsiasi, si ottiene

$$\vec{R}^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}^e(O) = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0.$$

Questa dimostrazione vale solo per i sistemi non vincolati all'esterno, ma si può facilmente generalizzare ad un sistema vincolato all'esterno, considerandolo come un sistema libero, introducendo le reazioni vincolari tra le forze direttamente applicate.

5.4 Applicazione del principio dei lavori virtuali.

Vediamo ora un esercizio in cui il principio dei lavori virtuali (o della potenza virtuale) viene usato per studiare l'equilibrio di un sistema.

ESERCIZIO 5.4.1. *Si consideri il sistema costituito da due aste rigide, di lunghezza l , vincolate come in figura su un piano verticale. Esprimere la relazione che deve intercorrere fra il carico \vec{P} , verticale sulla cerniera mediana B , la forza \vec{F} orizzontale in C e l'angolo θ , perché il sistema si trovi in equilibrio.*

Si indichi con y la quota di B e con x l'ascissa di C . Si suppongono le aste senza peso. La potenza delle forze direttamente applicate è

$$W_F = \vec{P} \cdot \dot{y} \vec{j} + \vec{F} \cdot \dot{x} \vec{i} = -P\dot{y} - F\dot{x}.$$

Può essere utile esprimere la relazione precedente in termini di lavoro virtuale. La variazione virtuale del lavoro nel tempo δt è data da

$$\delta L = W_F \delta t = -P\delta y - F\delta x.$$

A causa della dipendenza fra \dot{x} e \dot{y} (e fra δx e δy) non si può ricavare ancora niente

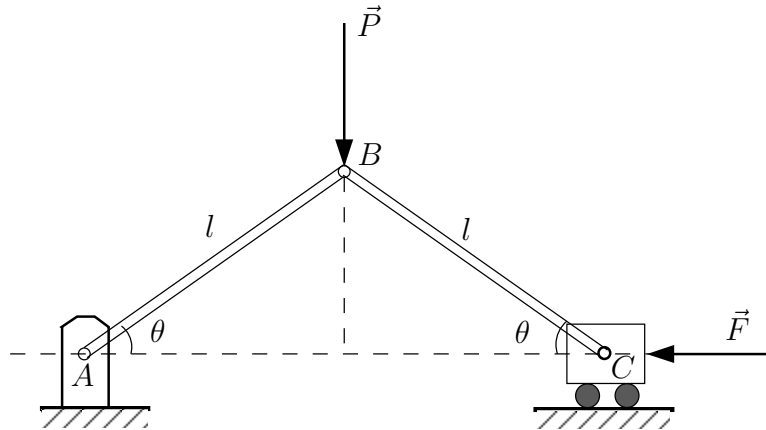


Figura 5.1: Biella-manovella.

da $W_F = 0$ ($\delta L = 0$). Scriviamo x, y in funzione di θ e differenziamo

$$\begin{aligned} x &= 2l \cos \theta & y &= l \sin \theta \\ \dot{x} &= -2l \sin \theta \dot{\theta} & \dot{y} &= l \cos \theta \dot{\theta}, \quad \text{o anche} \\ \delta x &= -2l \sin \theta \delta \theta & \delta y &= l \cos \theta \delta \theta. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$0 = W_F = -Pl \cos \theta \dot{\theta} + 2Fl \sin \theta \dot{\theta} = (2F \sin \theta - P \cos \theta) l \dot{\theta} = 0,$$

da cui

$$2F \sin \theta - P \cos \theta = 0 \implies P = 2F \tan \theta.$$

ESERCIZIO 5.4.2. Si consideri il principio dei lavori virtuali nel caso della statica di un sistema pesante.

Si consideri un sistema $\mathcal{S} = \{m_i, P_i\}$, di n punti, ciascuno dei quali pesante, allora su ogni punto agirà la forma

$$\vec{F}_i = -m_i g \vec{k}.$$

Calcoliamo il lavoro (virtuale) delle forze agenti

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta P_i = - \sum_{i=1}^n m_i g \delta z_i = -g \sum_{i=1}^n m_i \delta z_i = -gm \delta z_0,$$

dove si è fatto uso della definizione di centro di massa, la cui quota z_0 è tale che $mz_0 = \sum_{i=1}^n m_i z_i$.

Per il *Principio dei Lavori Virtuali*, deve essere $\delta L \leq 0$, da cui

$$\delta z_0 \geq 0,$$

ovvero non deve accadere mai che $\delta z_0 < 0$.

Teorema 5.4.1. *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema costituito da n punti materiali e pesanti è che il suo baricentro non possa abbassarsi, per un qualsiasi spostamento virtuale del sistema.*

Questo teorema equivale a dire che la quota del baricentro deve essere minima all'equilibrio. In letteratura questo teorema è chiamato come *Principio di Torricelli*. Si osservi che questo risultato vale in maniera locale.

Si consideri la pallina materiale pesante in figura. Sia A che B sono entrambi punti di equilibrio (il potenziale, oppure la quota, sono stazionari). Il punto A corrisponde ad un massimo della quota della pallina, mentre il punto B corrisponde ad un minimo. Il punto B è un punto di equilibrio stabile. Si osservi intanto che

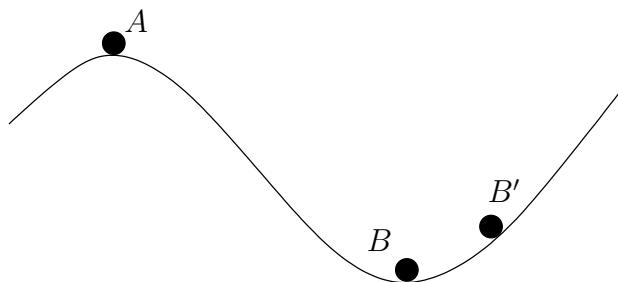


Figura 5.2: Pallina pesante.

gli spostamenti virtuali (nel caso in figura, effettivi) devono essere infinitesimi. Nel nostro caso gli spostamenti sono reversibili, e all'equilibrio si ha $\delta z_0 = 0$. Quando si dà un piccolo spostamento alla pallina, a partire dal punto B , la quota si innalza (in B'). E' facile verificare che per tornare alla posizione di equilibrio, le forze attive (in questo caso solo il peso) compiono lavoro positivo.

Capitolo 6

Introduzione alle EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE

6.1 Introduzione

In questo capitolo si introducono le equazioni di Lagrange di II specie come metodo sintetico ed efficiente per scrivere le equazioni di moto di un sistema olonomo sottoposto a vincoli lisci senza darne una giustificazione teorica, in quanto il nostro primo scopo è quello di fornire una ricetta pratica per scrivere le equazioni di moto.

Questo primo capitolo è introduttivo all'equazioni di Lagrange, mentre nel capitolo successivo si svilupperà la parte teorica e si darà la dimostrazione delle equazioni di Lagrange.

6.2 Le equazioni di Lagrange di II specie nel caso non conservativo

Si consideri un sistema \mathcal{S} di n punti materiali. Senza entrare nei particolari, con l'esperienza che il lettore si è fatta nello studio dei capitoli precedenti, supponiamo di essere in grado di introdurre, al posto delle $3n$ coordinate cartesiane una serie di nuove coordinate, che chiamiamo *coordinate lagrangiane* (vedi paragrafo (3.1.3)) e che sono sufficienti ad individuare la configurazione dell'intero sistema.

Si consideri un sistema \mathcal{S} sottoposto a vincoli olonomi bilateri, cioè un sistema la cui configurazione generica sia esprimibile in funzione di uno ed un solo numero l di coordinate che chiameremo *lagrangiane*: q_1, q_2, \dots, q_l . Tali coordinate potranno essere parte delle originarie coordinate cartesiane od anche altre coordinate comunque esprimibili tramite di esse. Se i vincoli sono fissi le coordinate q_1, q_2, \dots, q_l saranno sufficienti ad esprimere la configurazione del sistema, nel caso di vincoli mobili dovremo aggiungere, come variabile esplicita, anche il tempo t .

Seguendo quanto detto nel capitolo 3, siamo quindi in grado di esprimere ogni punto degli n punti del sistema \mathcal{S} tramite le coordinate lagrangiane, ad ogni istante t

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t), t) \quad (6.1)$$

Elenchiamo passo per passo come si deve operare per scrivere le equazioni di Lagrange di II specie, innanzitutto nel caso più semplice in cui le forze agenti sul sistema siano tutte conservative e quindi esprimibili tramite un potenziale U

- Calcolare l'energia cinetica del sistema ed esprimerla in funzione dei soli parametri lagrangiani q_1, q_2, \dots, q_l , delle sue derivate, dette anche velocità lagrangiane, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l$, ed eventualmente anche esplicitamente del tempo, se i vincoli sono mobili.

Per calcolare l'energia cinetica si tratta, partendo dalla definizione $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$, di tenere conto dell'espressione delle velocità in termini di coordinate lagrangiane, ovvero derivando la (6.1), dell'espressione

$$\vec{v}_i(t) = \frac{\partial P_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial P_i}{\partial t} . \quad (6.2)$$

A conti fatti, si otterrà un'espressione dell'energia cinetica quadratica nelle velocità lagrangiane che dipende dalle seguenti coordinate (si può anche provare che tale espressione è quadratica nelle \dot{q}_k)

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t) .$$

- Calcolare il potenziale U del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_l , e del tempo t .
- Definire la *funzione Lagrangiana* come

$$\mathcal{L} = T + U . \quad (6.3)$$

Tale funzione risulterà in generale funzione di

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t) . \quad (6.4)$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per scrivere le equazioni di Lagrange di II specie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 . \quad (6.5)$$

Se invece le forze agenti sul sistema non sono conservative, allora le equazioni (6.5) si scrivono nella forma (non conservativa)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k , \quad (6.6)$$

dove le Q_k sono dette *forze generalizzate* o lagrangiane, definite da

$$Q_k = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (6.7)$$

dove F_i è la forza agente sul punto $P_i \in \mathcal{S}$.

Come abbiamo già visto, si può giustificare la definizione (6.7) interpretando le Q_k come la proiezione delle forze sulle direzioni individuate dai vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$, che rappresentano i versori di base dello spazio tangente nel punto considerato nello spazio delle configurazioni.

6.3 Primi esercizi sul formalismo lagrangiano

In questi primi esercizi si vuole vedere a cosa si riduce il formalismo lagrangiano quando lo si applica a semplici esercizi, che possono essere risolti direttamente facendo uso dell'equazione di Newton.

6.3.1 Equazione di moto di una particella libera

ESERCIZIO 6.3.1. *Si studi il moto di una particella di massa m , libera di muoversi nello spazio sotto l'azione di una forza (qualsiasi) $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$.*

Il punto libero ha tre gradi di libertà e si possono scegliere le usuali coordinate cartesiane quali parametri lagrangiani. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

per cui

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\ddot{y}, & \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= m\ddot{z}, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le componenti delle forze generalizzate

$$Q_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = \vec{F} \cdot \vec{i} = F_x \quad (6.1)$$

$$Q_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} = \vec{F} \cdot \vec{j} = F_y \quad (6.2)$$

$$Q_3 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = \vec{F} \cdot \vec{k} = F_z. \quad (6.3)$$

Quindi dalle equazioni di Lagrange di II specie, nel caso non conservativo, si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases},$$

ovvero si sono ritrovate le equazioni di Newton. L'assenza di vincoli e la scelta delle coordinate cartesiane ci ha fatto ottenere l'equazione $m\vec{a} = \vec{F}$ proiettata sulle direzioni coordinate.

6.3.2 Equazione di moto di una particella libera usando coordinate polari

ESERCIZIO 6.3.2. *Si studi il moto di una particella di massa m , libera di muoversi nel piano sotto l'azione di una forza \vec{F} , scegliendo questa volta le coordinate polari (r, θ) .*

Sia $P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Scriviamo le componenti della velocità, usando le nuove coordinate

$$\dot{x} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \quad (6.4)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}. \quad (6.5)$$

Possiamo quindi esprimere l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2r \sin \theta \cos \theta \dot{r} \dot{\theta} + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta \dot{r} \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2,$$

come era naturale aspettarsi ricordando che dalla cinematica la velocità in coordinate polari è data da

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_1,$$

dove \vec{u} e \vec{u}_1 sono i versori radiale e trasverso. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m \ddot{r} & \frac{\partial T}{\partial r} &= m r \dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} & \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Da cui la prima equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$, dove la forza generalizzata è data da

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = \vec{F} \cdot \vec{u} = F_r,$$

assume la forma

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F_r.$$

La seconda equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$, dove

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r \vec{u}_1 = r F_\theta,$$

assume la forma $2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} = r F_\theta$. ovvero

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta.$$

Osservazione 6.3.1. *Sopra si è fatto uso del fatto che*

$$(P - O) = r \vec{u} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

$$\text{e } \frac{\partial P}{\partial r} = \vec{u} \text{ e } \frac{\partial P}{\partial \theta} = r \vec{u}_1 \text{ dove } \vec{u}_1 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

Osservazione 6.3.2. *Si ricordi che le accelerazioni radiale e trasversa sono date da*

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}.$$

Osservazione 6.3.3. *La seconda equazione nella forma*

$$2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} = r F_\theta$$

corrisponde alla seconda equazione cardinale, dove $r F_\theta$ è il momento della forza e $m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}$ è la derivata del momento della quantità di moto.

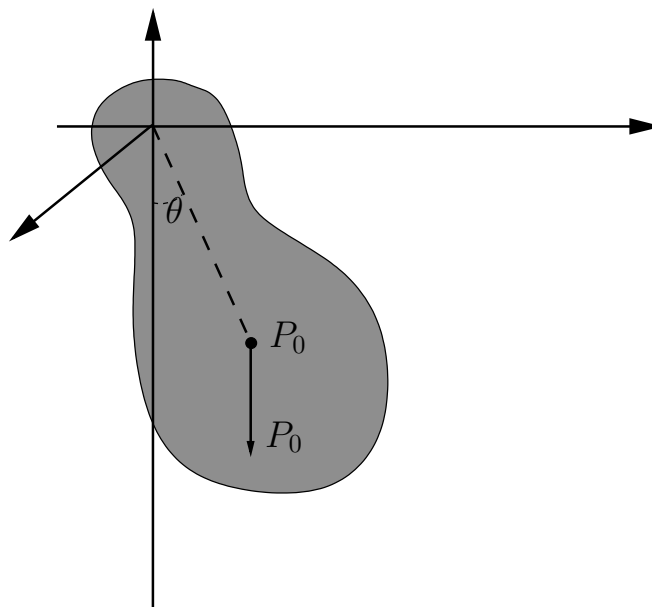


Figura 6.1: Pendolo composto.

6.4 Un semplice esempio: il pendolo composto

Si ricava l'equazione di moto del pendolo composto (vedi figura 6.1) caratterizzato dall'energia cinetica e dal potenziale:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2,$$

$$U = -Mgz_{P_0} = Mgl \cos \theta,$$

dove I_0 è il momento d'inerzia rispetto ad una retta ortogonale passante per il centro di massa. La funzione lagrangiana prende la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta.$$

Quindi con semplici calcoli

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_0 \dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\theta};$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -Mgl \sin \theta.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_0 \ddot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0,$$

e si ha la ben nota equazione del pendolo composto

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I_0} \sin \theta = 0.$$

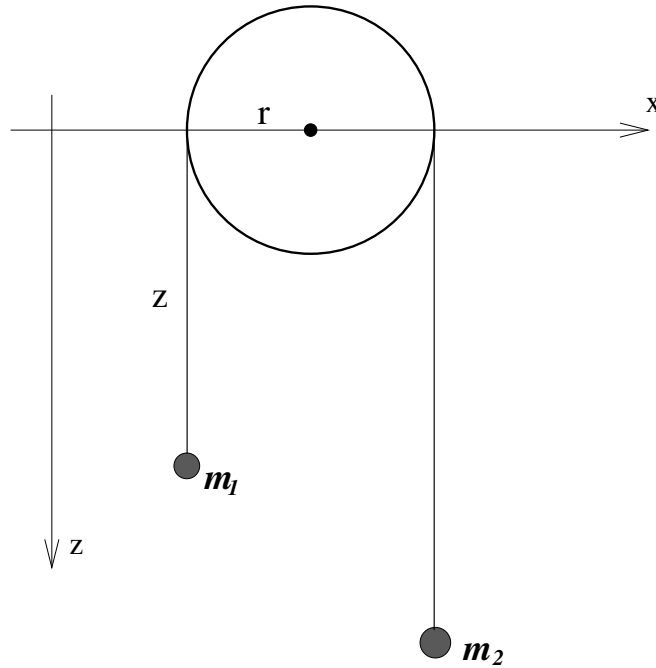


Figura 6.2: Macchina di Atwood.

6.5 Un altro semplice esempio: la macchina di Atwood

Per comprendere la potenza del formalismo lagrangiano, risolviamo un classico e semplice problema della fisica: la macchina di Atwood.

Si consideri la carrucola di raggio r in figura 6.2 a cui sono appesi, da parti opposte, due masse m_1 ed m_2 , collegate da un filo (flessibile e inestendibile) di lunghezza l . Si scriva l'equazione di moto per le due masse. Il sistema ha un solo grado di libertà, è conservativo ed a vincoli olonomi.

Assumiamo l'asse delle z rivolto verso il basso. Indicando con z la quota, a partire dall'asse x in figura, l'energia cinetica delle due masse è

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d(l - \pi r - z)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2,$$

il potenziale è

$$U = m_1gz + m_2g(l - \pi r - z) = m_1gz - m_2gz + m_2g(l - \pi r).$$

La funzione \mathcal{L} agrangiana assume quindi la forma (si tralasciano le costanti)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + m_1gz - m_2gz.$$

Con semplici calcoli si ottiene $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = (m_1 + m_2)\ddot{z}$ e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = (m_1 - m_2)g$ da cui

$$(m_1 + m_2)\ddot{z} - m_1g + m_2g = 0 \tag{6.1}$$

ovvero

$$\ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \tag{6.2}$$

che si può ricavare anche in via elementare.

Si noti, che non si ricava la tensione della fune, perché le forze vincolari non compaiono mai in una descrizione lagrangiana.

Questo esercizio può essere risolto facilmente anche con le equazioni cardinali o con il principio di conservazione dell'energia (come si fa comunemente nei corsi di Fisica). Ad esempio è facile scrivere la prima equazione di cardinale, tenendo conto che

$$\vec{Q} = m_1 \dot{x} \vec{k} - m_2 \dot{x} \vec{k},$$

tenendo conto che

$$\vec{R}^e = m_1 g \vec{k} - m_2 g \vec{k},$$

da $\dot{Q} = \vec{R}^e$ segue subito la (6.2). Lasciamo al lettore di considerare il caso in cui la carrucola abbia un momento d'inerzia I .

6.6 Espressione lagrangiana dell'energia cinetica

Nel formalismo lagrangiano è necessario esprimere l'energia cinetica del sistema, definita da $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$, tramite le nuove coordinate lagrangiane. Per ottenere questo sarà sufficiente tenere conto dell'espressione della velocità dei punti P_i tramite le coordinate lagrangiane

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}.$$

Sostituendo nella definizione di T si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2 + \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\partial P_i}{\partial t} \right]^2. \end{aligned}$$

Il primo termine può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2 &= \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \\ &= \sum_{h,k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Quindi scambiando gli indici (operazione lecita perché le sommatorie sono finite) si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2.$$

Se definiamo

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k},$$

$$b_h = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2,$$

l'espressione dell'energia cinetica in coordinate lagrangiane è data da

$$2T = \sum_{h,k=1}^l a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^l b_h \dot{q}_h + 2T_0. \quad (6.1)$$

Per evidenziare la struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo, può essere conveniente evidenziare che l'espressione di secondo grado nelle \dot{q}_k è una forma quadratica definita positiva che possiamo indicare con

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Indichiamo poi l'espressione di primo grado nelle \dot{q}_k con

$$T_1 = \sum_{h=1}^l b_h \dot{q}_h.$$

Pertanto l'energia è la somma di tre termini del secondo ordine, del primo ordine e d'ordine zero nelle velocità lagrangiane

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Si osservi che nel caso di vincoli fissi, l'espressione dell'energia cinetica si riduce al solo termine quadratico T_2 .

Capitolo 7

Le EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE

7.1 Introduzione

Questo capitolo sarà dedicato alla dimostrazione delle equazioni di Lagrange di II specie. Il lettore dovrà avere ben chiaro la definizione di vincoli lisci che gioca un ruolo fondamentale nella dinamica dei sistemi olonomi.

Nel capitolo inseriremo anche uno schema che riassume i vari passi con cui abbiamo studiato la dinamica degli olonomi, utilizzando il formalismo lagrangiano.

7.2 L'equazione simbolica della dinamica

Utilizzando il Principio dei lavori virtuali (ovvero la definizione di vincoli lisci), le leggi di Newton possono essere riscritte in una forma che sarà utile in seguito.

Per ciascuno dei punti del sistema vale la legge di Newton

$$\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i + \vec{\phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.1)$$

ovvero, durante il moto, si dovrà avere $\vec{\phi}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i$. Quindi tenendo conto della definizione di vincoli lisci

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0,$$

segue l'*equazione simbolica della dinamica* dei sistemi olonomi a vincoli lisci

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \hat{v}_i = 0, \quad \forall (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n), \quad (7.2)$$

all'istante t ed in una qualsiasi configurazione compatibile con i vincoli.

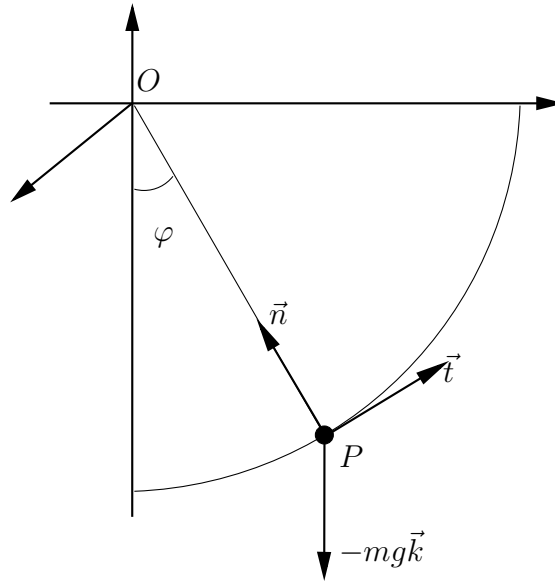


Figura 7.1: Pendolo matematico.

7.2.1 Come utilizzare l'equazione simbolica per determinare le equazioni di moto

ESERCIZIO 7.2.1. *Si scriva l'equazione di moto di un pendolo matematico, costituito da un punto materiale P di massa m , collegato con un filo di lunghezza l ad un punto fisso O e libero di muoversi in un piano verticale sotto l'azione della forza peso, utilizzando il Principio dei lavori virtuali.*

In questo caso semplice di un punto materiale, l'equazione (7.2) si può scrivere

$$(m\vec{a} + mg\vec{k}) \cdot \delta P = 0. \quad (7.3)$$

dove si è fatto uso dello spostamento virtuale δP (invece della velocità virtuale) dato da

$$\delta P = l\delta\varphi \vec{t} = l\cos\varphi\delta\varphi \vec{i} + l\sin\varphi\delta\varphi \vec{j}$$

con i versori tangenziale e normale $\vec{t} = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$ e $\vec{n} = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$. Si faccia riferimento alla figura (7.1) per il significato dei simboli. Riscrivendo l'accelerazione come $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$ in (7.3), dove s è l'arco percorso $s = l\varphi$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(m\ddot{s}\vec{t} + m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} + mg\vec{k} \right) \cdot l\delta\varphi \vec{t} = \\ & ml^2\ddot{\varphi}\delta\varphi + mg(\sin\varphi\vec{t} + \cos\varphi\vec{n}) \cdot l\delta\varphi \vec{t} = \\ & ml^2\ddot{\varphi}\delta\varphi + mgl\sin\varphi\delta\varphi = ml^2\left(\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi\right)\delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Quindi valendo per ogni $\delta\varphi$, si ottiene la famosa equazione nonlineare di moto del pendolo matematico

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

7.3 Le equazioni di Lagrange di II specie

Siamo ora in grado in questo capitolo di dimostrare le equazioni di Lagrange di II specie. La dimostrazione si basa sostanzialmente sulle leggi di Newton e sulla definizione di vincoli lisci.

Tenendo conto delle coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l$, sostituendo nell'equazione simbolica della dinamica $\hat{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$ si ha

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = 0.$$

Per l'arbitrarietà delle velocità lagrangiane \dot{q}_k , in quanto che le q_k sono coordinate libere e quindi le velocità qualsiasi, si ha

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, l,$$

e ricordando la definizione di forze lagrangiane

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - Q_k &= 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Analizziamo il termine, riscrivendo $\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$, si ha

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right]. \quad (7.6)$$

Differenziando $P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l, t)$, si ha (si assume per il seguito che si abbiano derivate parziali seconde continue)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 P_i}{\partial t \partial q_k}. \quad (7.7)$$

D'altronde ricordando

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.8)$$

e, ricordando anche il teorema di Schwarz che permette di scambiare l'ordine di derivazione per funzioni con derivata seconda continua, si ha

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right] = \sum_{h=1}^l \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial t} \quad (7.9)$$

Quindi da (7.7) e (7.9) per ogni i

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (7.10)$$

Inoltre da (7.8)

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial P_i}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (7.11)$$

perché le $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ non dipendono dalle \dot{q}_k .

Dalla (7.6) usando (7.10), (7.11) si ottiene

$$\begin{aligned} (7.6) \quad \implies \quad & \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] = \\ & = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$. Sostituendo infine nella (7.5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (7.12)$$

Abbiamo trovato l equazioni alle quali vanno accoppiate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_k(0) = q_{0k}, & k = 1, 2, \dots, l, \\ \dot{q}_k(0) = \dot{q}_{0k}, & k = 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (7.13)$$

Questo è un sistema di l equazioni differenziali ordinarie che vengono dette **equazioni di Lagrange di II specie**. Le equazioni (7.12) con le condizioni iniziali (7.13) determinano per integrazione il moto del sistema.

7.3.1 Caso conservativo.

Se le forze direttamente applicate sono conservative, è definita la funzione potenziale

$$\begin{aligned} U &= U(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \\ &= \mathcal{U}(P_1(q_1, q_2, \dots, q_l, t), P_2(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \dots, P_n(q_1, q_2, \dots, q_l, t)), \end{aligned}$$

e si ha

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} \mathcal{U} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Allora dalle (7.12)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (7.14)$$

Tenendo conto che $\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (7.15)$$

Introduciamo

$$\mathcal{L} = T + U$$

dove

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t)$$

e si ha

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \\ q_k(0) = q_{0k} \\ \dot{q}_k(0) = \dot{q}_{0k} \end{cases} \quad (7.16)$$

Risolvendo il sistema si possono determinare le funzioni

$$q_k = q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad t \in [t_0, T]$$

Sostituendo in P_i si ha

$$P_i = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

in funzione di $t \in [t_0, T]$. Infine si ricavano $\frac{d^2 P_i}{dt^2} = \vec{a}_i(t)$ e si valutano le reazioni $\vec{\phi}_i$ con le equazioni di Newton.

Osservazione 7.3.1. *Si noti che l'integrale dell'energia (valido se i vincoli sono fissi) è un integrale primo delle equazioni di Lagrange di II specie e da esse consegue. Mentre invece non vale altrettanto per le equazioni cardinali della dinamica, dove non si tiene conto del lavoro delle forze interne (in generale diverso da zero). Si noti inoltre che si possono trovare altri integrali primi se \mathcal{L} non dipende da una delle variabili q_k .*

7.4 La conservazione dell'energia meccanica nel caso di vincoli fissi

Durante il moto, lo stato del sistema è individuato dalle $q_k = q_k(t)$ e $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$. Si dicono *integrali del moto* quelle funzioni di q_k e \dot{q}_k che si mantengono costanti al variare del tempo, dipendendo solo dalle condizioni iniziali. La meccanica analitica insegna che il numero di integrali del moto indipendenti per un sistema chiuso ad l gradi di libertà è uguale ad $2l - 1$.

Ricaviamo qui un integrale primo di moto direttamente dalla \mathcal{L} agrangiana. Si consideri un sistema meccanico, sottoposto a forze conservative, ad l gradi di libertà avente \mathcal{L} agrangiana \mathcal{L} . Supponiamo inoltre che i vincoli siano indipendenti dal tempo. La \mathcal{L} agrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, quindi la sua derivata totale rispetto al tempo risulta

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k.$$

Utilizzando le equazioni di Lagrange di II specie, si ottiene

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right),$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} \right) = 0.$$

Si ottiene così l'integrale primo di un sistema conservativo a vincoli fissi

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = \text{costante}. \quad (7.1)$$

Indichiamo con H l'espressione (7.1), che risulta essere proprio l'energia totale del sistema.

Infatti, nelle nostre ipotesi,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

e ricordando l'espressione dell'energia nel caso di vincoli fissi, si ha

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Si ottiene così

$$H = 2T - (T + U) = T - U.$$

che è l'energia totale del sistema.

7.5 Il potenziale generalizzato

È possibile trattare alcune forze non conservative introducendo una opportuna funzione che può essere interpretata come un potenziale generalizzato.

Per illustrare questo caso, consideriamo l'esempio di un sistema i cui punti siano sottoposti ad una forza d'attrito che sia proporzionale alla velocità della particella, ad esempio (limitiamoci ad un coefficiente k isotropo), la forza sul punto P_i è data da

$$\vec{F}_{ai} = -k\vec{v}_i.$$

Possiamo introdurre la seguente funzione detta *funzione di dissipazione di Rayleigh*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

È facile verificare che

$$-\nabla_{v_i} \mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \vec{i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \vec{j} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \vec{k} = -k \left(v_{ix} \vec{i} + v_{iy} \vec{j} + v_{iz} \vec{k} \right) = \vec{F}_{ai},$$

e quindi la funzione $2\mathcal{F}$ può essere interpretata come la potenza dissipata a causa dell'attrito, poiché il lavoro delle forze d'attrito sul punto P_i è pari a

$$dW = \vec{F}_{a_i} \cdot dP_i = \vec{F}_{a_i} \cdot \vec{v}_i dt = kv_i^2 dt,$$

($-dW$ è il lavoro fatto dal sistema contro le forze d'attrito). Calcoliamo ora la forza generalizzata corrispondente alla forza d'attrito

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{a_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \nabla_{v_i} \mathcal{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \nabla_{v_i} \mathcal{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}.$$

Introducendo nell'equazioni di Lagrange la forza generalizzata, espressa tramite la funzione di dissipazione di Rayleigh, si ottiene

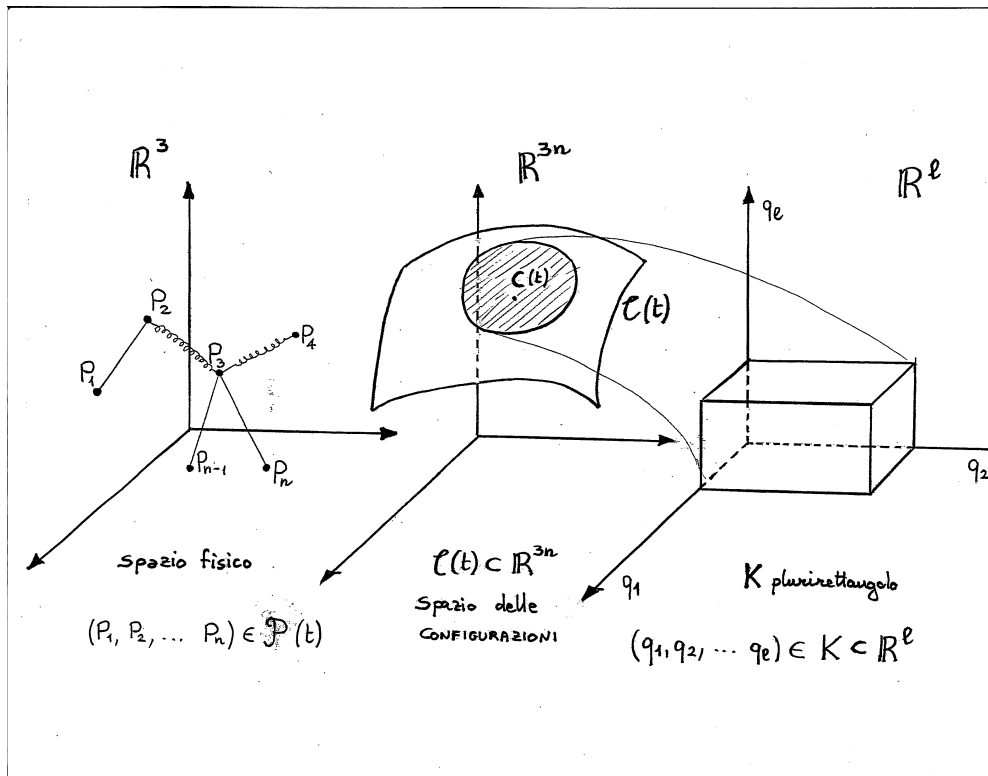
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (7.2)$$

A volte si preferisce definire un nuovo potenziale, detto generalizzato, dato da $U - \mathcal{F}$.

7.6 Sommario

In questa sezione elenchiamo nell'ordine con cui stati introdotti i punti su cui si basa lo studio dei sistemi olonomi.

- Sistema di n punti materiali $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$: P_1, P_2, \dots, P_n .
- Definizione di m vincoli olonomi $f_1, f_2, \dots, f_j \dots f_m = 0$.
- $\mathcal{P}(t) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^3$
- Compatibilità ed indipendenza dei vincoli:
rango massimo della matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \end{pmatrix} \begin{matrix} j = 1 \dots m \\ h = 1 \dots 3n \end{matrix}$
- Spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$
- Riduzione del numero di coordinate essenziali: gradi di libertà $l = 3n - m$.
- Coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_k \dots q_l$
- Dal fatto che la matrice dei vincoli ha rango massimo. segue che $\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_k}, \frac{\partial P_2}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial P_n}{\partial q_k} \right)$ è una base di un spazio di dimensione l .



- Spazio tangente allo spazio delle configurazioni $TC(C, t)$, nella configurazione C e all'istante t
- Definizione di velocità virtuale $\hat{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$
- Condizione nec. e suff. che $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_n)$ sia un atto di moto virtuale e che $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_n) \in TC(C, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$.
- Derivando $f_j = 0$, si ha $\sum_{i=1}^n \text{grad} f_j \cdot \hat{v}_i = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.
- Il vettore di \mathbb{R}^{3n} $(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ è ortogonale a $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n)$ cioè a $TC(C, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$.
- $(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j)$ è una base di uno spazio a dimensione m .
- Spazio normale allo spazio delle configurazioni $NC(C, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, nella configurazione C e all'istante t .
- Principio dei lavori virtuali. Definizione di vincoli lisci $\sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0$.
- $\vec{\phi}_i$ si esprimono con la base $(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j)$ con $j = 1, 2, \dots, m$.
- $\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i}$ Quindi si scrivono le equazioni di Lagrange di I specie

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right.$$

Capitolo 8

Le equazioni di Hamilton

8.1 Introduzione

Nei paragrafi precedenti siamo passati dalle equazioni di Newton a quelle di Lagrange, con un notevole vantaggio. Il procedimento lagrangiano consente di derivare direttamente le equazioni di moto a partire da un'unica funzione scalare, la *Lagrangiana*. Ai vantaggi pratici del formalismo lagrangiano, vanno aggiunti anche i vantaggi teorici relativi alla struttura delle equazioni ed alla stazionarietà di un funzionale espresso tramite la *Lagrangiana*.

8.2 La funzione di Hamilton

Si ricordi che le equazioni di Lagrange di II specie sono un sistema di l (pari al numero dei gradi di libertà) equazioni differenziali ordinarie del II ordine, con incognite

$$q_k = q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Queste equazioni possono essere scritte in forma normale, ovvero esplicitate rispetto alla derivata massima

$$\ddot{\vec{q}} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), \quad (8.1)$$

con $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$.

In altre occasioni, abbiamo considerato conveniente trasformare le l equazioni del II ordine in un sistema di $2l$ equazioni del I ordine. In questo caso abbiamo un sistema di equazioni del primo ordine in forma normale in uno spazio con un numero doppio di $2l$ coordinate, individuato dalla coppia $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$. Questo spazio è chiamato comunemente *spazio degli stati* (e non propriamente *spazio delle fasi*, come chiariremo in seguito).

La forma delle equazioni di Lagrange suggerisce di scegliere come variabili, invece della coppia $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$, la nuova variabile

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

ovvero

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (8.2)$$

Infatti con questa scelta l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$ prende la forma

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}. \quad (8.3)$$

Invece delle coppie $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$, che, per essere più precisi formano lo spazio degli stati, utilizzeremo le coppie $(\vec{q}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^{2l}$, che formano lo **spazio delle fasi**. I $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ sono chiamati momenti cinetici coniugati alla coordinata q_k , mentre le coordinate $(\vec{q}, \vec{p}) = (q_1, q_2, \dots, q_l, p_1, p_2, \dots, p_l)$ sono chiamate **coordinate canoniche**.

La relazione (8.2) definisce le \vec{p} in funzione di $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ (per ogni tempo t), ora si tratta di invertire la relazione e determinare le $\dot{\vec{q}}$ in funzione delle \vec{p} , ovvero

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

ESEMPIO 8.1. Sia P un punto materiale di massa m libero di muoversi su un piano. Se utilizziamo le coordinate polari (r, φ) per individuare il punto sul piano, allora le due coordinate lagrangiane sono

$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \varphi \end{cases}$$

e definiamo

$$\begin{cases} p_1 = m\dot{r} \\ p_2 = mr^2\dot{\varphi} \end{cases}$$

(p_1 e p_2 si possono ottenere come $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, con $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$). Quindi è elementare ricavare le relazioni inverse

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{r} = \frac{p_1}{m} \\ \dot{q}_2 = \dot{\varphi} = \frac{p_2}{mr^2} \end{cases}.$$

Consideriamo il cambio di coordinate

$$(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l) \longmapsto (p_1, p_2, \dots, p_l)$$

caratterizzato dalla matrice jacobiana associata $\left(\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h} \right)_{\substack{k=1,2,\dots,l \\ h=1,2,\dots,l}}$. Dalla definizione dei p_k , si ha

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}, \quad h, k = 1, 2, \dots, l.$$

Il potenziale non dipende da \dot{q}_k e quindi se non vi sono potenziali generalizzati, si può scrivere

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}, \quad h, k = 1, 2, \dots, l. \quad (8.4)$$

dove abbiamo tenuto conto che l'energia cinetica $T = T_0 + T_1 + T_2$ con

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Ma la matrice (8.4) è simmetrica, definita positiva e con determinante non nullo (positivo) in ogni punto dello spazio delle configurazioni ed in ogni istante. In conclusione la

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

può essere invertita rispetto a $\dot{\vec{q}}$, ovvero

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

risultano esprimibili come funzioni delle \vec{q} e delle nuove coordinate \vec{p} , oltre che del tempo.

Con queste trasformazioni, siamo passati dallo spazio degli stati con coordinate $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ allo spazio delle fasi con coordinate

$$(\vec{q}, \vec{p}).$$

8.3 La trasformata di Legendre

Introduciamo la trasformata di Legendre della funzione Lagrangiana \mathcal{L} . Tale trasformata è un procedimento che trasforma una funzione (convessa) reale in un'altra funzione dipendente esplicitamente dalla derivata della funzione stessa.

Sia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ una Lagrangiana non degenera, ovvero con determinante Hessiano rispetto alle $\dot{\vec{q}}$ non nullo

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0,$$

definiamo la trasformata di Legendre della Lagrangiana

$$\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right]_{\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)} \quad (8.5)$$

dove $\dot{\vec{q}}$ è definita dall'inversione di $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}$.

La funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ è detta **funzione Hamiltoniana del sistema**.

Calcoliamo ora le derivate parziali di \mathcal{H} rispetto alle due coordinate indipendenti \vec{q} e \vec{p} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} &= \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} = \quad , \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la definizione di p_k , e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} &= \frac{\partial}{\partial p_h} \left(\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right) = \\ &= \dot{q}_h + \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} = \\ &= \dot{q}_h + \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} - \sum_{k=1}^l p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} = \dot{q}_h.\end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo trovato

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = \dot{q}_h$$

e utilizzando di nuovo la definizione di p_k e le equazioni di Lagrange $\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$ otteniamo il sistema di $2l$ equazioni del 1° ordine nelle coordinate di fase \vec{q} e \vec{p} :

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \end{cases} \quad (8.6)$$

Queste sono chiamate **equazioni di Hamilton**.

Per completezza, possiamo ottenere le stesse equazioni differenziando la funzione \mathcal{H} definita da (8.5). Innanzitutto si ha

$$\begin{aligned}d\mathcal{H} &= \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{p} + \vec{p} \cdot d\dot{\vec{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot d\dot{\vec{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.\end{aligned}$$

Poi confrontiamo questo differenziale con quello di \mathcal{H} come funzione di \vec{q}, \vec{p} , e t :

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt.$$

ottenendo

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

che corrispondono alle due equazioni di Hamilton e all'ulteriore relazione

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (8.7)$$

Naturalmente questa relazione vale quando la \mathcal{L} dipende esplicitamente dal tempo (vincoli mobili e/o potenziali dipendenti dal tempo).

Le equazioni (8.6) sono dette **equazioni canoniche** e presentano una particolare simmetria, essendo antisimmetriche nelle coppie di variabili coniugate q_k e p_k . Esse si presentano come un sistema del primo ordine, nello spazio delle fasi, in forma normale.

La seconda equazione delle (8.6) permette inoltre di individuare immediatamente, come integrali primi, le p_k che restano costanti durante il moto. Ciò avviene tutte le volte che la Lagrangiana, e quindi, tramite la definizione, l'Hamiltoniana \mathcal{H} , non dipende dalla coordinata lagrangiana coniugata q_k .

Ricapitoliamo tutta la procedura per arrivare alle equazioni canoniche di Hamilton attraverso la formulazione Lagrangiana.

1. Costruire la Lagrangiana del sistema $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, dopo aver introdotto le coordinate lagrangiane $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l)$.
2. Costruire l'insieme dei momenti coniugati $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$,

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

come funzione delle q_k , \dot{q}_k e del tempo t .

3. Costruire la funzione di Hamilton

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

come funzione mista delle \vec{q} , \vec{p} , $\dot{\vec{q}}$, e t .

4. Si eliminano le $\dot{\vec{q}}$ tramite l'inversa di $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}$.
5. Ottenuta la funzione \mathcal{H} , come funzione delle sole \vec{q} , \vec{p} e t , scrivere le equazioni canoniche.

8.4 La funzione Hamiltoniana come energia totale

Differenziamo totalmente (rispetto al tempo) la funzione \mathcal{H} -amiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

sostituiamo le equazioni canoniche di Hamilton, ottenendo

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (8.8)$$

Se la Lagrangiana non dipende dal tempo, allora da $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ e dalla (8.8) discende

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0,$$

ovvero \mathcal{H} si mantiene costante durante il moto e ne costituisce un **integrale primo**.

Possiamo vedere subito che si tratta della conservazione dell'**energia meccanica totale** del sistema. Ricordiamo l'espressione di T , che quando non c'è dipendenza dei vincoli dal tempo, si riduce a

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

e tornando alla definizione dei momenti cinetici coniugati

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Sostituendo nella definizione di Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} = \sum_{h,k=1}^l \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k - \mathcal{L} \\ &= 2T - (T + U) = 2T - T - U = T - U = E, \end{aligned}$$

con E **energia totale** del sistema.

8.5 Appendice: La trasformata di Legendre

Introduciamo il concetto di trasformata di Legendre per una funzione $f(w)$ di una sola variabile a valori reali $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo, con derivata seconda continua e $f''(w) > 0$. Con riferimento alla figura

Si consideri il grafico della funzione $f = f(w)$, indichiamo con p la derivata prima di f in w . L'equazione

$$f'(w) = p$$

definisce in maniera univoca la funzione

$$w = w(p)$$

con p nell'intervallo in cui $w'(p)$ esiste ed è continua. In altre parole $w = w(p)$ è la funzione che dà l'ascissa del punto di tangenza del grafico di $f(w)$ con la retta di coefficiente angolare p . Dal punto di vista costruttivo, ad ogni p associamo la retta di pendenza p , cerchiamo il punto T di tangenza, a cui corrisponde l'ascissa w , ovvero troviamo

$$p \mapsto w = w(p).$$

Definizione 8.5.1. Si chiama **trasformata di Legendre** di $f(w)$ la funzione

$$[Lf(w)](p) = g(p) = pw(p) - f(w(p)).$$

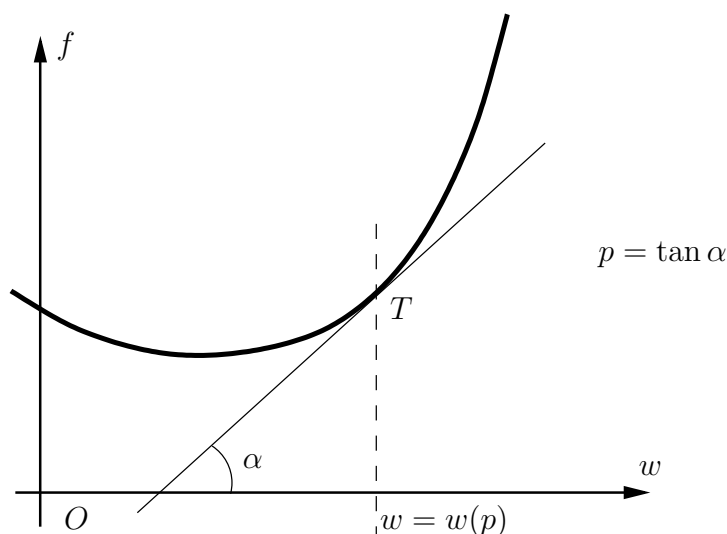


Figura 8.1: Trasformata di Legendre.

Sia g la trasformata di Legendre di f : $Lf = g$, viceversa la trasformata di Legendre di g coincide nuovamente con f : $Lg = f$. Si dice che la trasformata di Legendre è **involutiva**.

Rimandiamo ai testi di Analisi per i dettagli sull'esistenza della trasformata inversa e limitiamoci a verificarne l'espressione.

Sia $g = g(p)$, allora formalmente si ha

$$Lg = [Lg(p)](w) = wp(w) - g(p(w)) = wp(w) - p(w)w + f(w) = f(w).$$

ESEMPIO 8.2. Calcoliamo la trasformata di $f(w) = aw^2$, $a > 0$. Si ha

$$g(p) = pw(p) - f(w(p)) = pw(p) - aw^2(p).$$

Ma da $f'(w) = p$, si ha $2aw = p$, ovvero $w = \frac{p}{2a}$. Quindi la trasformata prende la forma

$$g(p) = \frac{p^2}{4a}.$$

È facile verificare anche la trasformata inversa coincide nuovamente con $aw^2(p)$.

Vediamo ora il caso generale di una funzione a più variabili. Sia $f(\vec{w})$, con $\vec{w} \in \mathbb{R}^l$ di classe C^2 e tale che la forma quadratica associata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w_h \partial w_k} \tag{8.9}$$

sia definita positiva. Allora si può invertire il sistema

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial w_k}$$

(l'invertibilità $w_k \rightarrow p_k$ è assicurata dalla positività di (8.9)) e la funzione inversa è data dalla funzione vettoriale

$$\vec{w} = \vec{w}(\vec{p}).$$

Definizione 8.5.2. *Data la funzione vettoriale $\vec{w} \mapsto f(\vec{w})$. La trasformata di Legendre di $f(\vec{w})$ è*

$$Lf(\vec{w})(\vec{p}) = g(\vec{p}) = \vec{p}\vec{w}(\vec{p}) - f(\vec{w}(\vec{p})).$$

Si può applicare la trasformata di Legendre alla funzione \mathcal{L} agrangiana e si ottiene

$$L\mathcal{L}(\vec{q}, \vec{p}, t) = \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right]_{\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)},$$

dove

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}.$$