

1. DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI

1.1 Generalità su un sistema libero

Si consideri un sistema (discreto) \mathcal{S} di n punti materiali $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Supponiamo innanzitutto che il sistema di punti sia libero nello spazio fisico (che possiamo identificare con lo spazio euclideo \mathbb{R}^3). Per configurazione del sistema libero \mathcal{S} si intende l'insieme delle posizioni $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ (cioè le posizioni nello spazio fisico \mathbb{R}^3) degli n punti che compongono il sistema.

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, \dots , $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ \dots e $P_n = (x_n, y_n, z_n)$, i punti del sistema \mathcal{S} , ciascuno rappresentato nello spazio fisico tramite le sue coordinate; con l'introduzione dello spazio \mathbb{R}^{3n} , la configurazione del sistema \mathcal{S} può essere rappresentata da un punto libero in tale spazio a dimensione $3n$, quindi dalla $3n$ -pla $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Il moto del punto libero (a $3n$ dimensioni) in tale nuovo spazio corrisponde al moto del sistema \mathcal{S} e viceversa.

Tutto ciò fa già intravedere come l'utilità dell'introduzione dello spazio \mathbb{R}^{3n} consiste principalmente nel fatto che, ambientando la meccanica in tale spazio, viene recuperato per lo studio dei sistemi olonomi costituiti da n punti il semplice linguaggio della meccanica del punto materiale.

Per distinguere quando parliamo dello spazio fisico da quello fittizio a $3n$ dimensioni, introduciamo $\mathcal{P}(t)$ come l'insieme dei punti $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nello spazio fisico \mathbb{R}^3 e $\mathcal{C}(t)$ come l'insieme delle $3n$ -ple $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$.

Sia \mathcal{S} un sistema di punti $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, assegnare una configurazione del sistema significa assegnare le posizioni (cioè le coordinate) dei punti che lo compongono.

1.1.1 Generalità su un sistema vincolato

Fissato un sistema di coordinate, i vincoli sono espressi da condizioni sulle terne di coordinate relative ai punti del sistema.

Definizione di vincolo olonomo. Una relazione del tipo

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (1.1)$$

dipendente solo dal tempo e dalle posizioni (e non dalle velocità o dalle accelerazioni) si dirà **vincolo olonomo**.

La definizione data sopra non dice niente riguardo alle proprietà matematiche della (iper)superficie di livello della funzione f , che ovviamente non può essere qualsiasi. Per non appesantire la trattazione dal punto di vista rigoroso, vedremo in seguito le ipotesi minimali da fare sulla funzione f .

Ai fini della dinamica, hanno interesse solo i sistemi **labili**, i sistemi cioè in cui il numero dei vincoli efficaci (m) sia minore del numero di gradi di libertà ($3n$) del sistema.

Consideriamo ora un sistema di punti a cui sono stati imposti m vincoli

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

e supponiamo che le f_j siano funzioni, con derivate parziali continue, soddisfacenti le condizioni di:

i) **compatibilità**: l'insieme $\mathcal{P}(t)$ delle n -ple $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ di punti di \mathbb{R}^3 che verificano le (1.1) non sia vuoto.

ii) **indipendenza**: la matrice jacobiana associata

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

m righe e $3n$ colonne, abbia rango massimo per ogni configurazione $\in \mathcal{P}(t)$

Velocità possibili. Diciamo velocità possibili dei punti P_i le velocità in un moto qualunque che i punti P_i possono ammettere compatibilmente con i vincoli ad essi imposti.

Cerchiamo ora una relazione che le velocità devono verificare perché siano possibili. Differenziando rispetto al tempo la j -esima relazione si ha

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0,$$

quindi le velocità possibili devono soddisfare

$$\sum_{i=1}^n \text{grad} f_j \cdot \vec{v}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

1.1.2 Coordinate lagrangiane

Se la matrice jacobiana associata alle $f_j = 0$ ha rango massimo, allora, per il teorema del Dini, tutte le coordinate dei punti del sistema sono esprimibili (in un opportuno intorno di ciascuna configurazione compatibile con i vincoli) tramite un numero (**gradi di libertà**)

$$l = 3n - m$$

di parametri indipendenti q_1, q_2, \dots, q_l (**coordinate lagrangiane**), variabili in intervalli aperti I_1, I_2, \dots, I_l :

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

in maniera tale che queste funzioni abbiano derivate parziali prime continue e che la

matrice jacobiana ad esse associata abbia rango massimo cioè l .

Può fare comodo riscrivere le relazioni (1.2) in forma compatta

$$\xi_h = \xi_h(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \quad h = 1, 2, \dots, 3n \quad (1.2a)$$

avendo indicato $\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_1, \xi_3 = z_1, \xi_4 = x_2, \xi_5 = y_2$, e così via.

Quanto appena affermato è vero in virtù del seguente fatto: se la matrice

$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right)_{\substack{j=1..m \\ h=1..3n}}$ formata da m righe e $3n$ colonne ha rango massimo allora la matrice associata al sistema (1.2a) $\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial q_k} \right)_{\substack{h=1..3n \\ k=1..l}}$ formata da $3n$ righe e l colonne, ha

anch'esse-

sa rango massimo. Questa è una conseguenza immediata del teorema del Dini in quanto che, se la matrice \mathbb{B} non avesse rango massimo allora le $3n$ coordinate sarebbero esprimibili per mezzo di un numero minore di l di parametri indipendenti.

Le coordinate q_1, q_2, \dots, q_l possono interpretarsi come coordinate di un punto Q in uno spazio a dimensione l . Ad ogni punto Q nel cubo aperto $K = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_l \subset \mathbb{R}^l$ corrisponde una ed una sola configurazione del sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ compatibile con i vincoli e viceversa.

Abbiamo così introdotto un sistema di coordinate Lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_l associate ad un sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ come una l -upla di parametri indipendenti variabili in intervalli aperti e tali che tramite essi si possono esprimere le coordinate degli n punti, come funzioni delle q_k soddisfacenti *i*) ed *ii*). L'aver imposto che gli intervalli di variabilità siano aperti comporta che le configurazioni del sistema non sono in generale tutte le configurazioni possibili, ma soltanto quelle in un intorno di una configurazione $\{P_1^0, P_2^0, \dots, P_n^0\} \in \mathcal{P}$. Ciò fa sì che in generale occorra più di un sistema di coordinate lagrangiane per rappresentare tutte le configurazioni del sistema considerato, mentre ciascuno di questi sistemi di coordinate costituisce una **rappresentazione locale**. Se lasciamo cadere la condizione che le coordinate debbano variare in intervalli aperti possono verificarsi alcune anomalie come ad esempio la perdita della differenziabilità delle $f_j = 0$ o la mancanza di biunivocità tra le l -uple q_1, q_2, \dots, q_l e le configurazioni del sistema.

1.1.3 Spazio delle configurazioni di un sistema a vincoli olonomi. Spazio tangente e spazio normale.

Fissiamo il tempo $t \in [t_0, T]$. L'insieme $\mathcal{C}(t) \subset \mathbb{R}^{3n}$, immerso in \mathbb{R}^{3n} , costituito dai punti $C = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ aventi nell'ordine le coordinate dei punti della n -pla $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \in \mathcal{P}(t)$, cioè compatibile con i vincoli, è in corrispondenza biunivoca con le configurazioni del sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. L'insieme $\mathcal{C}(t)$

$$\mathcal{C}(t) = \left\{ (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^{3n} : f_1\{P_1, \dots, P_n, t\} = 0, \dots, f_m\{P_1, \dots, P_n, t\} = 0 \right\},$$

con $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(t)$, è detto spazio delle configurazioni.

Esempi:

- Siano P_1, P_2, \dots, P_n punti liberi. Lo spazio delle configurazioni è lo spazio euclideo \mathbb{R}^{3n} .
- Pendolo semplice. Lo spazio delle configurazioni è la circonferenza S^1 in \mathbb{R}^2 .
- Pendolo sferico. Lo spazio delle configurazioni è una superficie sferica S^2 in \mathbb{R}^3 .
- Pendolo doppio. Lo spazio delle configurazioni è il toro $T = S^1 \times S^1$ in \mathbb{R}^4 .
- Asta rigida nel piano. Lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1$ in \mathbb{R}^3 .

Lo spazio delle configurazioni è una varietà mobile (funzione del tempo) contenuta in \mathbb{R}^{3n} , rappresentabile (localmente) con solo $l = 3n - m$ parametri indipendenti. In questo senso la sua dimensione è l ed è pari al numero di gradi di libertà, ma è chiaro che ogni suo punto è immerso in \mathbb{R}^{3n} . Si noti che il termine spazio non è usato qui nel senso di spazio lineare. L'insieme $\mathcal{C}(t)$ di \mathbb{R}^{3n} delle configurazioni possibili varia col tempo e la relativa rappresentazione mediante una famiglia di sistemi di coordinate lagrangiane fa intervenire esplicitamente il tempo.

Nel seguito si indicherà con $C = C(t) \in \mathbb{R}^{3n}$ un punto di $\mathcal{C}(t)$, ovvero una configurazione del sistema compatibile con i vincoli all'istante t .

Diamo ora alcune definizioni.

Chiameremo **legge di moto di un sistema olonomo** rispetto ad un dato osservatore in un intervallo di tempo $[t_0, T]$ una funzione

$$\mathfrak{M}: t \in [t_0, T] \rightarrow C(t) \in \mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$$

con derivate prima e seconda continue.

Per ogni punto $t \in [t_0, T]$ è determinato un punto $C(t) \in \mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ nello spazio delle configurazioni.

Del moto si può dare anche una rappresentazione lagrangiana usando un sistema di coordinate lagrangiane del sistema compatibile $(q_1, q_2, \dots, q_l) \in K$ (K plurirettangolo aperto di \mathbb{R}^l) e una funzione

$$\mathfrak{M}_L: [t_0, T] \rightarrow K$$

con derivate prima e seconda continue. Per ogni $t \in [t_0, T]$ è determinato un punto di K al quale corrisponde univocamente $C \in \mathcal{C}(t)$.

Diciamo **atto di moto di un sistema olonomo** $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ in un istante t il vettore $V \in \mathbb{R}^{3n}$ definito da

$$V = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, \dots, v_{nx}, v_{ny}, v_{nz})$$

dove \vec{v}_i indica la velocità del punto P_i all'istante t .

Come si vede V non è altro che la velocità del punto $C \in \mathcal{C}(t)$: $V = \frac{dC}{dt}$.

Si chiama **possibile** ogni atto di moto V di un sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ che, in una determinata configurazione e ad un dato istante risulti compatibile coi vincoli imposti al sistema.

Differenziando le $f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, si ottiene la seguente condizione per le velocità possibili

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} f_j \cdot \vec{v}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Si definisce **stato cinematico** di un sistema olonomo in un istante t la coppia (C, V) dove $C \in \mathcal{C}(t)$ e V è un atto di moto possibile relativamente alla configurazione C e all'istante t .

L'insieme degli stati cinematici di un sistema olonomo in un istante t si chiama **spazio delle fasi** del sistema in quell'istante.

Fissiamo t e sia $C \in \mathbb{R}^{3n}$ un punto di $\mathcal{C}(t)$, $C = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$.

Abbiamo già visto che se la matrice $\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right)_{\substack{j=1 \dots m \\ h=1 \dots 3n}}$ (ξ_h coordinate dei punti di $\mathcal{P}(t)$) ha rango massimo allora anche $\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial q_k} \right)_{k=1 \dots l}$ ha rango massimo, in altre parole gli l

vettori

$$\left(\frac{\partial C}{\partial q_k} \right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \frac{\partial y_1}{\partial q_k}, \frac{\partial z_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \frac{\partial y_n}{\partial q_k}, \frac{\partial z_n}{\partial q_k} \right)$$

sono linearmente indipendenti e pertanto forniscono una base per un sottospazio lineare di \mathbb{R}^{3n} di dimensione l .

Si dice **spazio tangente allo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t)$** in un dato istante t ed in un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ il sottospazio $\text{TC}(C, t) \subset \mathbb{R}^{3n}$ di dimensione l , avente come base i vettori $\left(\frac{\partial C}{\partial q_k} \right)$, $k = 1, 2, \dots, l$.

Passiamo ora alla **rappresentazione lagrangiana del moto**. Derivando le $P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t)$ e tenendo presente che $q_k = q_k(t)$ si ottiene

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Alle $\hat{\vec{v}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$ diamo il nome di **velocità virtuali**,

alle $\vec{v}_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P_i}{\partial t}$ diamo il nome di **velocità di trascinamento dovuto ai vincoli**.

ottenendo così $\vec{v}_i = \hat{\vec{v}}_i + \vec{v}_i^*$, dove ciascuna $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$. Definiamo

→ atto di moto virtuale

$$\hat{V} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial C}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

→ atto di moto dovuto al trascinamento

$$V^* = \frac{\partial C}{\partial t}$$

e quindi

$$V = \hat{V} + V^* \in \mathbb{R}^{3n}.$$

Dalla definizione di atto di moto virtuale e da quello di spazio tangente si ha

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perché il vettore $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n) = \hat{V} \in \mathbb{R}^{3n}$ sia un atto di moto virtuale per un sistema olonomo relativamente all'istante t e ad un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ è che*

$$\hat{V} \in \text{TC}(C, t).$$

Se deriviamo rispetto al tempo le $f_j = 0$ (tralasciando la dipendenza esplicita dal tempo) si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} f_j \cdot \hat{v}_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Confrontando questa relazione col fatto che $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n)$ appartiene allo spazio tangente, si deduce che gli m vettori

$$\left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

sono vettori di \mathbb{R}^{3n} ciascuno ortogonale in \mathbb{R}^{3n} a $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n)$.

Inoltre sempre nell'ipotesi che la matrice jacobiana delle f_j abbia rango massimo, gli m vettori $\left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per un sottospazio lineare di \mathbb{R}^{3n} di dimensione m . Dunque

Si dice **spazio normale allo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t)$** in un dato istante t ed in un punto $C \in \mathcal{C}(t)$ il sottospazio $\text{NC}(C, t) \subset \mathbb{R}^{3n}$ di dimensione m , avente come base i vettori

$$\left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Lo spazio normale risulta essere il complemento ortogonale dello spazio tangente $\text{TC}(C, t)$. Lo spazio \mathbb{R}^{3n} è la somma diretta degli spazi $\text{TC}(C, t)$ e $\text{NC}(C, t)$.

1.4 Vincoli olonomi lisci - Principio dei lavori virtuali

Introduciamo alcune notazioni

$\vec{\phi}_i$ = reazione vincolare sul punto (P_i, m_i) dovuta al complesso dei vincoli imposti.

\vec{F}_i = risultante delle forze direttamente applicate su (P_i, m_i) .

Esprimiamo ora la potenza del sistema di forze

$$W = W_F + W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i.$$

Tenendo conto che $\vec{v}_i = \hat{v}_i + \vec{v}_i^*$ si ottiene

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i^* = \\ &= \hat{W}_F + \hat{W}_\phi + W_F^* + W_\phi^* = \hat{W} + W^*, \end{aligned}$$

dove $\hat{W} = \hat{W}_F + \hat{W}_\phi$ è la potenza virtuale del sistema di forze direttamente applicate e delle reazioni e dove $W^* = W_F^* + W_\phi^*$ è la potenza dovuta al moto eventuale del vincolo per i due sistemi di forze.

Definizione. Un sistema olonomo si dice a vincoli (bilateri) lisci se

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0 \quad (1.3)$$

qualunque siano le velocità virtuali \hat{v}_i dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ ed in ogni disposizione dei punti del sistema compatibili con i vincoli (spazio delle configurazioni).

La relazione (1.3) introdotta qui come definizione di vincoli lisci è conosciuta in letteratura come principio dei lavori virtuali.

Dal principio dei lavori virtuali e dalla definizione di spazio normale allo spazio delle configurazioni discende il seguente

Teorema (vincoli lisci). *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema olonomo sia a vincoli lisci (bilateri) è che risulti*

$$(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n) \in \text{NC}(C, t),$$

qualunque sia lo stato cinematico del sistema.

In altre parole $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n)$ è un elemento dello spazio normale.

Allora ogni componente $\vec{\phi}_i$ potrà essere espresso come combinazione lineare degli elementi $\text{grad}_{P_i} f_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, cioè

$$\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j.$$

In termini generali il complesso delle reazioni in \mathbb{R}^{3n} è dato da

$$(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right).$$

1.4.1 Equazioni di Lagrange di 1^a specie

L'espressione delle reazioni vincolari appena ricavata permette di rendere possibile lo studio del sistema

$$\begin{cases} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\phi}_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

trasformandolo nel seguente

$$\begin{cases} m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j, & i = 1, 2, \dots, n \\ f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Queste equazioni sono dette equazioni di Lagrange di prima specie.

Le incognite scalari contenute nel secondo sistema sono $3n + m$ funzioni incognite del tempo (pari al numero di equazioni scalari contenute nel sistema) e precisamente

i) le $3n$ coordinate dei punti del sistema che vi compaiono con le loro derivate prime (se le forze dipendono dalle velocità dei punti del sistema) e seconde;

ii) gli m coefficienti λ_j cui sono legate le reazioni vincolari.

Torniamo al principio dei lavori virtuali

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = 0$$

Se indichiamo con $R_k = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ si ha

$$\sum_{k=1}^l R_k \dot{q}_k = 0$$

il che implica per l'arbitrarietà delle \dot{q}_k

$$R_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Esprimiamo ora la potenza

$$W = W_F + W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right)$$

per il principio dei lavori virtuali si ha

$$W = \sum_{k=1}^l Q_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

dove le

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \text{ sono dette forze generalizzate.}$$

In termini di lavoro

$$dL = W dt = \sum_{k=1}^l Q_k dq_k + \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\phi}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} dt.$$

Se le forze attive sono conservative, cioè esiste un potenziale $\varphi^{(a)}$ tale che $\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \varphi^{(a)}$, dove $\varphi^{(a)} = \varphi^{(a)}(P_1, P_2, \dots, P_n)$, allora

$$\sum_{k=1}^l Q_k dq_k = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} \varphi^{(a)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^l \frac{\partial V^{(a)}}{\partial q_k} dq_k = dV^{(a)}$$

dove $dV^{(a)}$ è il differenziale della funzione composta $V^{(a)} = V^{(a)}(q_1, q_2, \dots, q_l) = \varphi^{(a)}(P_1(q_1, q_2, \dots, q_l), P_2(q_1, q_2, \dots, q_l), \dots, P_n(q_1, q_2, \dots, q_l))$,

Quindi per forze conservative si ha

$$Q_k = \frac{\partial V^{(a)}}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Quest'ultime considerazioni saranno utili per lo studio della statica dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

Ancora sui vincoli lisci

Ricordiamo che un sistema di punti materiali a vincoli olonomi si dice a **vincoli lisci** se

$$\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{\vec{v}}_i = 0$$

qualunque siano le velocità virtuali $\hat{\vec{v}}_i$ dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ e in ogni configurazione $C \in \mathcal{C}(t)$.

Teorema. *I vincoli di rigidità sono lisci.*

Dimostrazione. Ricordiamo che in un sistema rigido la distanza fra due punti qualsiasi P_r e P_s si mantiene costante nel tempo, ovviamente tali vincoli sono olonomi ed indipendenti dal tempo. Allora le velocità dei due punti soddisfano la relazione $\vec{v}(P_r) = \vec{v}(P_s) + \vec{\omega} \wedge (P_r - P_s)$. Se indichiamo con $\vec{\phi}_{rs}$ l'azione di P_r su P_s e con $\vec{\phi}_{sr}$ l'azione di P_s su P_r , allora la potenza virtuale (e quindi anche effettiva) è data da

$$\hat{W}_{rs} = \vec{\phi}_{rs} \cdot \vec{v}_s + \vec{\phi}_{sr} \cdot \vec{v}_r.$$

Per il principio di azione e reazione

$$\hat{W}_{rs} = \vec{\phi}_{rs} \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_r) = \vec{\phi}_{rs} \cdot \vec{\omega} \wedge (P_s - P_r).$$

Ma $\vec{\phi}_{rs}$ è parallela a $(P_s - P_r)$ e quindi qualunque siano P_s e P_r si ha $\hat{W}_{rs} = 0$. Quindi il principio dei lavori virtuali vale per i vincoli di rigidità in un sistema rigido. \square

1.4.2 Statica dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

Una configurazione C^0 di un sistema olonomo è di equilibrio se le equazioni di Lagrange di prima specie con configurazione iniziale C^0 e con velocità iniziali nulle hanno come unica soluzione

$$C(t) = C^0, \quad t > t_0.$$

Una configurazione C^0 è di equilibrio in $[t_0, T]$ se e solo se per ogni $t \in [t_0, T]$ si ha

$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j = 0, & i = 1, \dots, n \\ f_j(C^0, t) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

In altre parole $\vec{F}_i = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j = -\vec{\phi}_i$, ovvero $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in \text{NC}(C^0, t)$, per ogni $t \in [t_0, T]$. Possiamo enunciare il

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perché C^0 sia di equilibrio in $[t_0, T]$ è che il*

sistema di forze direttamente applicate sia tale che

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)(C^0, t) \in \text{NC}(C^0, t), \text{ per ogni } t \in [t_0, T] \quad (1.4)$$

e che $C^0 \in \mathcal{C}(t)$, per ogni $t \in [t_0, T]$.

A questo punto il principio dei lavori virtuali può essere scritto nella forma

$$\hat{W}_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i = 0, \quad (1.5)$$

qualunque siano le velocità virtuali \hat{v}_i dei punti P_i , in ogni istante $t \in [t_0, T]$ e in ogni configurazione $C \in \mathcal{C}(t)$. L'equazione (1.5) è detta *equazione simbolica della statica* dei sistemi olonomi a vincoli lisci.

Facendo uso delle coordinate lagrangiane

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = 0,$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^l Q_k \dot{q}_k = 0,$$

dove $Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ sono dette *forze generalizzate*.

Per l'arbitrarietà delle *velocità lagrangiane* \dot{q}_k , si ha $Q_k = 0$, per ogni $k = 1, 2, \dots, l$. Quindi l'equazione simbolica della statica, espressa tramite le coordinate lagrangiane, dà luogo ad l equazioni

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

che consentono di determinare le coordinate lagrangiane corrispondenti all'eventuale configurazione di equilibrio.

Nel caso di forze conservative, esiste una funzione potenziale \mathcal{V} , tale che $\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \mathcal{V}$. Introducendo le coordinate lagrangiane

$$V(q_1, q_2, \dots, q_l, t) = \mathcal{V}(P_1(q_1, q_2, \dots, q_l, t), P_2(q_1, q_2, \dots, q_l, t), \dots, P_n(q_1, q_2, \dots, q_l, t), t),$$

e tenendo conto di ciò nell'espressione delle Q_k

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} \mathcal{V} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Quindi

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

In presenza di vincoli bilateri lisci e fissi, le equazioni $\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, traducono la condizione di stazionarietà del potenziale.

L'applicazione dell'equazione $Q_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, non risulta sempre facile, in quanto occorrono speciali cautele per la scelta delle coordinate lagrangiane. Particolare attenzione va data ai domini di variabilità delle coordinate lagrangiane così da trovare i punti di equilibrio all'interno degli intervalli in cui variano le q_k .

Come applicazioni si consideri la statica dei corpi rigidi e l'equilibrio dei sistemi pesanti (stazionarietà della quota del baricentro, principio del Torricelli).

1.4.3 Statica dei sistemi rigidi

Equazioni cardinali della statica. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema rigido, in quiete in un istante, vi rimanga è che siano verificate*

$$\vec{R}^{(e)} = 0, \quad \vec{M}^{(e)}(O) = 0$$

dove $\vec{R}^{(e)}$ è la risultante delle forze esterne e $\vec{M}^{(e)}(O)$ è il momento delle forze esterne rispetto ad un punto O .

Vediamone la dimostrazione per un sistema rigido libero. Si parte dalla condizione necessaria e sufficiente (1.4), che in termini di potenza si esprime con

$$\hat{W}_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \hat{\vec{v}}_i = 0,$$

che equivale a $W_F = 0$ essendo i vincoli fissi, per qualsiasi moto rigido che è caratterizzato da \vec{v}_0 ed $\vec{\omega}$ e dove le \vec{F}_i sono le forze direttamente applicate. Quindi

$$\begin{aligned} W_F &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0. \end{aligned}$$

Dovendo questa relazione valere per \vec{v}_0 ed $\vec{\omega}$ qualsiasi, si ottiene

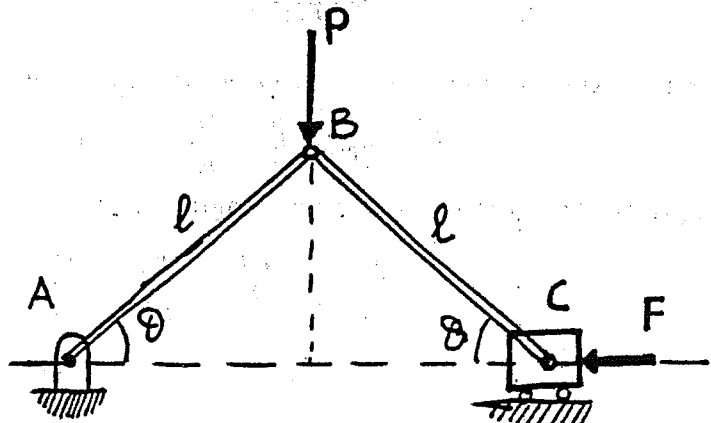
$$\vec{R}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}^{(e)}(O) = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0.$$

Tale dimostrazione si può generalizzare ad un sistema vincolato all'esterno, considerandolo come un sistema libero, introducendo le reazioni vincolari tra le forze direttamente applicate.

1.4.4 Applicazione del principio dei lavori virtuali.

Vediamo ora un esercizio in cui il principio dei lavori virtuali (o della potenza virtuale) viene usato per studiare l'equilibrio di un sistema.

Esercizio. Si consideri il sistema costituito da due aste rigide, di lunghezza l , vincolate come in figura su un piano verticale. Esprimere la relazione che deve intercorrere fra il carico \vec{P} , verticale sulla cerniera mediana B , la forza \vec{F} orizzontale in C e l'angolo θ , perché il sistema si trovi in equilibrio.



Soluzione. Si indichi con y la quota di B e con x l'ascissa di C . Si sup-

pongono le aste senza peso. La potenza delle forze direttamente applicate è

$$W_F = \vec{P} \cdot \dot{y} \vec{j} + \vec{F} \cdot \dot{x} \vec{i} = -P\dot{y} - F\dot{x}.$$

Può essere utile esprimere la relazione precedente in termini di lavoro virtuale. La variazione virtuale del lavoro nel tempo δt è data da

$$\delta L = W_F \delta t = -P\delta y - F\delta x.$$

A causa della dipendenza fra \dot{x} e \dot{y} (e fra δx e δy) non si può ricavare ancora niente da $W_F = 0$ ($\delta L = 0$). Scriviamo x, y in funzione di θ e differenziamo

$$\begin{aligned} x &= 2l \cos\theta & y &= l \sin\theta \\ \dot{x} &= -2l \sin\theta \dot{\theta} & \dot{y} &= l \cos\theta \dot{\theta}, \text{ o anche} \\ \delta x &= -2l \sin\theta \delta\theta & \delta y &= l \cos\theta \delta\theta. \end{aligned}$$

Sostituendo

$$0 = W_F = -Pl \cos\theta \dot{\theta} + 2Fl \sin\theta \dot{\theta} = (2F \sin\theta - P \cos\theta) l \dot{\theta} = 0, \text{ da cui}$$

$$2F \sin\theta - P \cos\theta = 0, \Rightarrow P = 2F \operatorname{tg}\theta.$$

1.5 Equazioni di Lagrange di 2^a specie

Ricordiamo le leggi di Newton per ciascuno dei punti del sistema

$$\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i + \vec{\phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ovvero, durante il moto, si dovrà avere $\vec{\phi}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i$. Quindi tenendo conto della definizione di vincoli lisci ($\hat{W}_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0$), segue l'equazione simbolica della dinamica dei sistemi olonomi a vincoli lisci:

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \hat{v}_i = 0, \quad \forall (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n),$$

all'istante t e in una qualsiasi configurazione compatibile con i vincoli.

Tenendo conto delle coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l$, sostituendo nell'equazione

simbolica della dinamica $\hat{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$, si ha

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = 0.$$

Per l'arbitrarietà delle *velocità lagrangiane* \dot{q}_k , in quanto esse non sono vincolate, si ha

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, l,$$

e ricordando la definizione di forze lagrangiane

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - Q_k = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, l. \quad (1.6)$$

Analizzando il termine $\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$, si ha

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right]. \quad (1.7)$$

Differenziando $P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_l, t)$, si ha (si assume per il seguito che abbia derivate parziali seconde continue)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 P_i}{\partial t \partial q_k}. \quad (1.8)$$

D'altronde ricordando $\vec{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}$, $i = 1, 2, \dots, n$, (1.9)

si ha

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right] = \sum_{h=1}^l \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial t}. \quad (1.10)$$

Quindi da (1.8) e (1.10) per ogni i

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (1.11)$$

Inoltre da (1.9)

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial P_i}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.12)$$

perché $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ non dipendono dalle \dot{q}_k .

Dalla (1.7), usando (1.11), (1.12) si ottiene

$$(1.7) \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad \text{dove } T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2.$$

Sostituendo infine nella (1.6)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (1.13)$$

Abbiamo trovato l equazioni alle quali vanno accoppiate le condizioni iniziali

$$q_k(0) = q_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.14)$$

$$\dot{q}_k(0) = \dot{q}_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (1.15)$$

Questo è un sistema di l equazioni differenziali ordinarie che vengono dette *equazioni di*

Lagrange di 2ª specie. Le equazioni (1.13) con le condizioni iniziali (1.14)+(1.15) determinano per integrazione il moto del sistema.

Caso conservativo. Se le forze direttamente applicate sono conservative, è definita la funzione potenziale

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_l, t)$$

e si ha

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} \varphi \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Allora dalle (1.13)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Tenendo conto che $\frac{\partial(T+V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T+V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Introduciamo

$$\mathcal{L} = T + V$$

dove

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t)$$

e si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \\ q_k(0) = q_{0k}, \\ \dot{q}_k(0) = \dot{q}_{0k}, \end{array} \quad k = 1, 2, \dots, l. \right. \quad (1.16)$$

Risolvendo il sistema si possono determinare le l funzioni

$$q_k = q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad t \in [t_0, T].$$

Sostituendo in P_i si ha

$$P_i = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

in funzione di $t \in [t_0, T]$. Infine si ricavano $\frac{d^2 P_i}{dt^2} = \vec{a}_i(t)$ e si valutano le reazioni $\vec{\phi}_i$ con le equazioni di Newton.

Osservazioni. Si noti che l'integrale dell'energia (valido se i vincoli sono fissi) è un integrale primo delle equazioni di Lagrange di II specie e da esse consegue. Mentre invece non vale altrettanto per le equazioni cardinali della dinamica, dove non si tiene conto del lavoro delle forze interne (in generale diverso da zero).

Si noti inoltre che si possono trovare altri integrali primi se \mathcal{L} non dipende da una delle variabili q_k .

Esempio di applicazione delle Equazioni di Lagrange di 2^a specie

Si ricava l'equazione di moto del pendolo composto (in figura) caratterizzato dall'energia cinetica e dal potenziale:

$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

$$V = -Mgz_{P_o} = Mgl \cos \theta,$$

dove I_o è il momento d'inerzia rispetto ad una retta ortogonale passante per il centro di massa.

La funzione lagrangiana prende la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_o \dot{\theta} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_o \ddot{\theta}$$

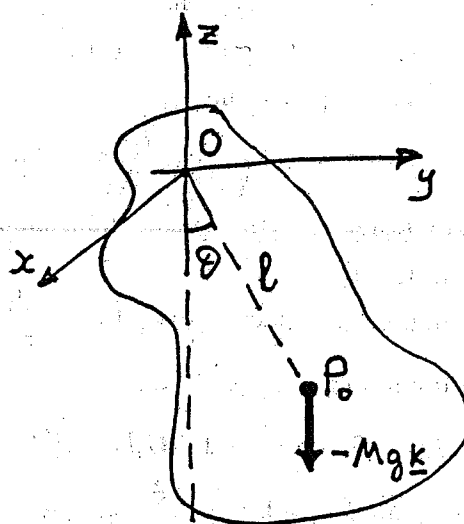
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -Mgl \sin \theta.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_o \ddot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0,$$

e si ha la ben nota equazione del pendolo composto

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I_o} \sin \theta = 0$$



1.6 SOMMARIO

- Sistema di n punti materiali $\{P_i, m_i\}, i = 1, 2, \dots, n : P_1, P_2, \dots, P_n$.
- Definizione di m vincoli olonomi $f_1, f_2, \dots, f_j \dots f_m = 0$.
- $\mathcal{P}(t) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^3$
- Compatibilità ed indipendenza dei vincoli

$$\text{rango massimo della matrice} \quad \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ h=1, \dots, 3n}} \quad (1.17)$$
- Spazio delle configurazioni $\mathcal{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$.
- Riduzione del numero di coordinate essenziali: gradi di libertà $l = 3n - m$.
- Coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_k \dots q_l$.
- da (1.17) segue che $\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_k}, \frac{\partial P_2}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial P_n}{\partial q_k} \right)$ è una base di un spazio di dimensione l .
- Spazio tangente allo spazio delle configurazioni $\text{TC}(\mathcal{C}, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, nella configurazione \mathcal{C} e all'istante t .
- Definizione di velocità virtuale $\hat{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$.
- Condizione nec. e suff. che $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_n)$ sia un atto di moto virtuale è che

$$(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_n) \in \text{TC}(\mathcal{C}, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$$
- Derivando $f_j = 0$, si ha $\sum_{i=1}^n \text{grad}_{P_i} f_j \cdot \hat{v}_i = 0, j = 1, 2, \dots, m$.
- Il vettore di $\mathbb{R}^{3n} \left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right), j = 1, 2, \dots, m$, è ortogonale a $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_n)$ cioè a $\text{TC}(\mathcal{C}, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$.
- $\left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right), j = 1, 2, \dots, m$, è una base di uno spazio a dimensione m .
- Spazio normale allo spazio delle configurazioni $\text{NC}(\mathcal{C}, t) \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, nella configurazione \mathcal{C} e all'istante t .
- Principio dei lavori virtuali - Definizione di vincoli lisci - $\sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \hat{v}_i = 0$.
- $\vec{\phi}_i$ si esprimono con la base $\left(\text{grad}_{P_1} f_j, \text{grad}_{P_2} f_j, \dots, \text{grad}_{P_n} f_j \right), j = 1, 2, \dots, m$.
- $\Rightarrow \vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j$
- Quindi si scrivono le equazioni di Lagrange di 1^a specie

$$\begin{cases} m_i \ddot{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}_{P_i} f_j, & i=1, 2, \dots, n \\ f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, & j=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

