
Versione 1.0

COMPLEMENTI
DI
MECCANICA RAZIONALE

Appunti dalle lezioni di Complementi di Meccanica Razionale
del Prof. G. Frosali

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA G.SANSONE

FIRENZE - 16 GENNAIO 2009

Capitolo 1

RICHIAMI di DINAMICA del PUNTO MATERIALE VINCOLATO

1.1 Prima analisi del concetto di vincolo

In questo capitolo si studia la dinamica di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie o su una linea assegnate, nota l'azione della forza agente sul punto.

Prima di passare al problema del moto del punto, è necessario introdurre alcune considerazioni di tipo geometrico sui vincoli, per poi passare all'aspetto dinamico del problema, ovvero allo studio dell'azione del vincolo sul punto.

Innanzitutto introduciamo il concetto di vincolo, limitandoci al caso di un punto, utilizzando un formalismo che sarà facilmente generalizzabile nella dinamica di un sistema di punti.

Assegnare una configurazione significa assegnare la posizione del punto P nello spazio fisico \mathbb{R}^3 . Il punto si dice libero se non si impongono limitazioni alle coordinate di P . Il punto si dice vincolato nel caso invece che si impongano limitazioni alle coordinate di P .

Con riferimento ad un sistema di riferimento cartesiano, si chiama **vincolo semplice** una limitazione alle coordinate di P date dal legame

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.1)$$

dove f è una funzione sufficientemente liscia. L'analisi insegna che (1.1) è una superficie di livello zero della funzione f . Si richiede che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

sia non vuoto e che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0; \quad \forall (x, y, z) \in V. \quad (1.2)$$

Allora nell'intorno di ogni punto di V , una almeno delle variabili è esprimibile in funzione delle altre due, e quindi il numero delle variabili indipendenti si riduce a due.

ESEMPIO 1.1 *Si consideri il vincolo $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \neq 0$. La superficie di livello è un piano. Poichè tutte e tre le derivate parziali sono diverse da zero, si può scegliere una qualsiasi delle coppie di coordinate ed esprimere la terza in funzione di esse.*

ESEMPIO 1.2 Si consideri il vincolo $f(x, y, z) = ax + z - b$, con $a, b \neq 0$. Dobbiamo scegliere due coordinate, ed esprimere l'altra in funzione delle due. Consideriamo le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \neq 0,$$

L'analisi insegna che si può esplicitare solo le variabili x o z , rispetto alle quali la derivata è diversa da zero. In questo caso, si può esplicitare o la variabile z : $z = b - ax$ o la variabile x : $x = \frac{b-z}{a}$.

ESEMPIO 1.3 Si consideri il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, con $r > 0$. La superficie di livello è una sfera di raggio r , anche in questo caso si può scegliere una coppia qualsiasi di coordinate, ma occorre fare attenzione perché la terza può essere espressa solo localmente. Si noti che le coordinate sferiche sono più adatte a rappresentare tale superficie.

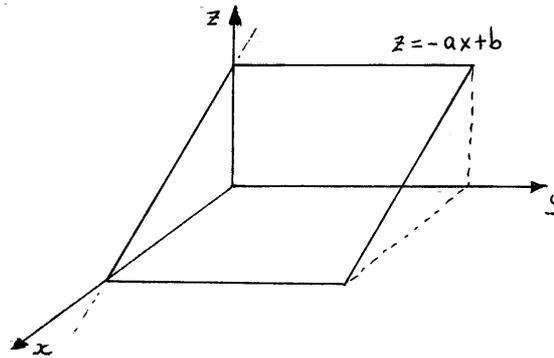


Figura 1.1 Vincolo dell'Esempio 2

Fissato il valore di r , le due coordinate θ e φ sono legate dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

ESEMPIO 1.4 Si consideri il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. La superficie di livello si riduce al solo punto $(0, 0, 0)$, le ipotesi non sono soddisfatte ed il vincolo non è dunque ammissibile.

Se indichiamo con q_1, q_2 le coordinate che esplicitano la superficie in un opportuno intorno $I_1 \times I_2$, si può scrivere

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases}, \quad (q_1, q_2) \in I_1 \times I_2.$$

La (1.2) equivale al fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo ($= 2$).

In questo caso, ricapitolando, il vincolo semplice toglie un grado di libertà, due coordinate q_1 e q_2 sono sufficienti per individuare la configurazione di P . q_1 e q_2 sono dette **coordinate lagrangiane**.

Si chiama **vincolo doppio** una limitazione alle coordinate di P date dal sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove f_1 ed f_2 sono funzioni sufficientemente lisce. Anche in questo caso, si richiede che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = 0 \text{ e } f_2(x, y, z) = 0\}$$

sia non vuoto e che

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

abbia rango massimo ($= 2$). Allora nell'intorno di ogni punto di V , due delle variabili sono esprimibili in funzione della terza. Sia q la variabile indipendente, allora il vincolo in un opportuno intorno I è rappresentato da una linea di equazione

$$\begin{cases} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{cases}, \quad q \in I.$$

ESEMPIO 1.5 *Si consideri il vincolo doppio costituito dai due piani*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a due. La linea sul quale si muove P è l'asse z , e si può scegliere proprio z come variabile lagrangiana.

La variabile q può essere una delle tre coordinate x, y, z , oppure no. Si pensi al seguente esempio.

ESEMPIO 1.6 *Si consideri il vincolo costituito dal piano $z = 0$ e dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Il punto è così vincolato alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sul piano $z = 0$. Invece della coordinata x , oppure y si può scegliere l'angolo φ per individuare la configurazione del punto P .*

La (1.2) si può scrivere anche come

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq 0, \quad \forall (x, y, z) \in V.$$

Se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, ad esempio, allora localmente la coordinata y si può esprimere in funzione delle altre, cioè $y = g(x, z)$, e le coordinate (x, z) sono sufficienti ad individuare il punto P sulla superficie. Grazie al fatto che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è diversa da zero nell'intorno di P , l'analisi insegna che i vettori $\left(1, \frac{\partial g}{\partial x}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{\partial g}{\partial z}, 1\right)$ sono indipendenti e costituiscono una base del piano tangente al vincolo $f = 0$, mentre il $\text{grad}f$ è normale al vincolo stesso.

Si chiama **vincolo triplo** una limitazione alle coordinate di P date dal sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove f_1 , f_2 ed f_3 sono funzioni sufficientemente lisce. Se la matrice jacobiana corrispondente ha rango tre, allora la configurazione di P è univocamente determinata.

ESEMPIO 1.7 *Si consideri il vincolo triplo costituito dai tre piani*

$$\begin{cases} a x + b y + c z = d \\ a' x + b' y + c' z = d' \\ a'' x + b'' y + c'' z = d'' \end{cases}.$$

Se la matrice corrispondente ha determinante diverso da zero, allora i tre piani sono indipendenti e la loro intersezione si riduce ad un solo punto (in questo caso l'origine del sistema di riferimento).

Nel caso di tre funzioni qualsiasi f_1 , f_2 e f_3 , il fatto che la matrice jacobiana relativa ai vincoli $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, abbia rango massimo corrisponde alla lineare indipendenza fra i tre piani tangenti, nel punto (x, y, z) intersezione delle tre superficie.

Le definizioni date sopra sono facilmente generalizzabili al caso dipendente dal tempo. Un vincolo di equazione

$$f(P, t) = f(x, y, z, t) = 0, \quad (1.4)$$

con l'ipotesi (1.2) data sopra per ogni tempo t , rappresenta un vincolo semplice mobile.

Analogamente, si ha il vincolo doppio mobile

$$\begin{cases} f_1(P, t) = f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(P, t) = f_2(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

ed il vincolo triplo mobile

$$\begin{cases} f_1(P, t) = f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(P, t) = f_2(x, y, z, t) = 0, \\ f_3(P, t) = f_3(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

dove f_1 , f_2 ed f_3 sono funzioni sufficientemente lisce dipendenti sia dalla posizione che dal tempo.

Si osserva che tutti i vincoli sopradefiniti sono espressi da uguaglianze, e sono detti **vincoli bilateri**, ma si possono considerare anche **vincoli unilateri** del tipo

$$f(P, t) = f(x, y, z, t) \leq 0,$$

che caratterizzano regioni dello spazio, in generale variabili col tempo, delimitate in ogni istante dalla superficie $f(P, t) = 0$. Il punto durante il suo moto per effetto delle forze si può muovere all'interno della regione, senza sorpassare la superficie che la delimita.

1.2 Velocità virtuale e di trascinamento

Si consideri un punto P vincolato con un vincolo semplice mobile $f(P, t) = 0$, che soddisfi la condizione (1.2). Se $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ è la traiettoria di P durante il moto, allora per ogni istante di tempo t si ha

$$f(x(t), y(t), z(t), t) = 0.$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene, in ogni istante t ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

che si può scrivere come

$$\text{grad}f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

La (1.6) definisce le **velocità possibili** compatibili con il vincolo, istante per istante.

In seguito a quanto detto nella sezione precedente, si possono scegliere due **coordinate lagrangiane** q_1, q_2 e quindi il punto P viene rappresentato come

$$P = P(q_1, q_2, t).$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Definendo

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\dot{q}_2 \quad \text{e} \quad \vec{v}^* = \frac{\partial P}{\partial t},$$

la velocità di P è data dalla somma

$$\vec{v} = \hat{v} + \vec{v}^*, \quad (1.7)$$

dove \hat{v} è detta **velocità virtuale** e \vec{v}^* è detta **velocità di trascinamento**.

Nel caso di un vincolo doppio mobile $f_1(P, t) = 0$, $f_2(P, t) = 0$, con la condizione (1.3). Derivando rispetto al tempo le relazioni f_1 ed f_2 si ottiene, in ogni istante di tempo t ,

$$\begin{aligned} \text{grad}f_1 \cdot \vec{v} + \frac{\partial f_1}{\partial t} &= 0, \\ \text{grad}f_2 \cdot \vec{v} + \frac{\partial f_2}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

che definiscono le **velocità possibili** compatibili con i vincoli, istante per istante.

Anche in questo caso, si può scegliere una **coordinata lagrangiana** q e quindi il punto P viene rappresentato da $P = P(q, t)$. Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Definendo nuovamente la velocità virtuale e la velocità di trascinamento

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} \quad \text{e} \quad \vec{v}^* = \frac{\partial P}{\partial t}$$

la velocità di P è data dalla somma $\vec{v} = \hat{v} + \vec{v}^*$.

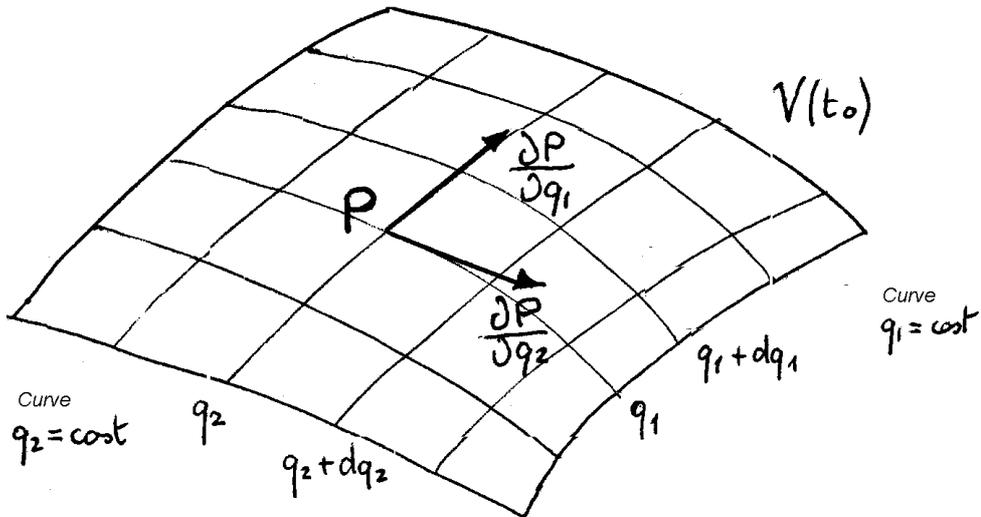


Figura 1.2 Base del piano tangente

Prima di passare al problema della meccanica del punto, illustriamo il concetto di velocità virtuale e di trascinamento.

Nel caso di vincolo semplice, si consideri la superficie $V(t_0)$ e si disegni su di essa le curve coordinate $q_1 = \text{costante}$ e $q_2 = \text{costante}$. Le derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ rappresentano i vettori tangenti in (q_1, q_2) alle curve $q_1 = \text{costante}$ e $q_2 = \text{costante}$.

La velocità virtuale è la velocità compatibile col vincolo all'istante di tempo t ed è data da

$$\hat{v} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2.$$

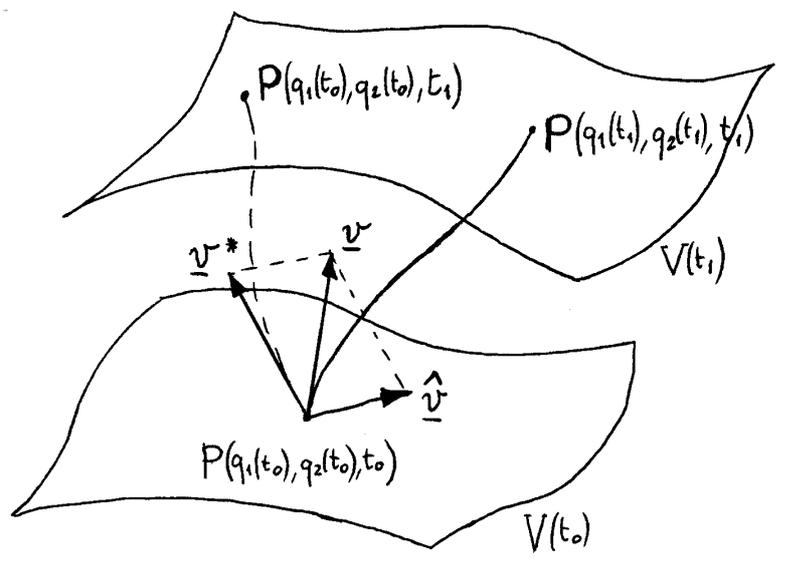


Figura 1.3 Velocità virtuale e di trascinamento

Indichiamo ora con $V(t_1)$ lo spazio delle configurazioni all'istante $t_1 > t_0$.

La velocità virtuale sta sul piano tangente in $(q_1(t_0), q_2(t_0))$, mentre la velocità di trascinamento, essendo la velocità che si ottiene fissando i valori delle coordinate lagrangiane in $P(q_1, q_2, t)$, è la componente di \vec{v} che risulta tangente alla curva che il punto percorrerebbe (virtualmente) se al variare del tempo le coordinate $(q_1(t_0), q_2(t_0))$ si mantenessero costanti.

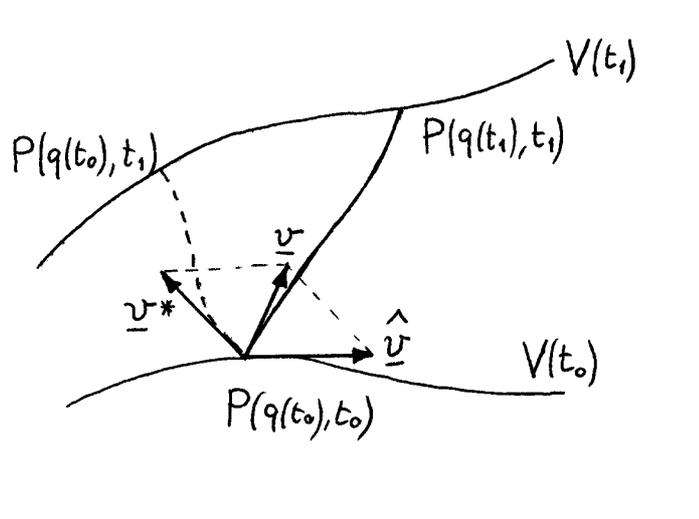


Figura 1.4 Velocità virtuale e di trascinamento

Nel caso di vincolo doppio $V(t_0)$ e $V(t_1)$ sono due linee nello spazio, come si vede dalla figura, la velocità virtuale è tangente a $V(t_0)$, la velocità effettiva è tangente alla traiettoria del punto, mentre la velocità di trascinamento è tangente alla traiettoria che percorrerebbe il punto se non si muovesse rispetto al vincolo.

1.3 Equazioni di moto per un punto vincolato

Sia (P, m) un punto materiale vincolato ad un vincolo bilatero semplice $f(P, t) = 0$ (o ad un vincolo doppio $f_1(P, t) = 0; f_2(P, t) = 0$). Sul punto P agisce una forza direttamente applicata $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$. Sotto l'azione della sola forza direttamente applicata, la traiettoria del punto non potrà soddisfare l'equazione vincolare e ciò potrà essere possibile solo se durante il moto il vincolo eserciterà sul punto P una azione opportuna. Tale azione, detta **reazione vincolare**, congiunta a quella della forza direttamente applicata servirà a fare sì che il moto risultante soddisfi istante per istante l'equazione vincolare. Ovviamente le condizioni iniziali devono essere assegnate in modo da soddisfare il vincolo.

In un riferimento inerziale, l'equazione di moto di un punto vincolato e l'equazione del vincolo sono date da

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \vec{\phi}(t), \\ f(P, t) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

a partire da fissate condizioni iniziali, dove le incognite sono le tre coordinate (in funzione del tempo t) e le tre componenti della reazione vincolare $\vec{\phi}(t)$. Le equazioni scalari corrispondenti sono 4, mentre le incognite sono 6: le tre coordinate di $P(t)$ e le tre componenti

della reazione. Il problema è dunque indeterminato, in quanto le incognite sono più delle equazioni.

Situazione analoga si ha per un punto vincolato ad una linea, le equazioni di moto e del vincolo sono

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \vec{\phi}(t), \\ f_1(P, t) = 0, \\ f_2(P, t) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

dove le incognite sono ancora 6 mentre le equazioni sono 5 ma insufficienti, rendendo ancora il problema indeterminato.

Fino a questo punto abbiamo caratterizzato un vincolo solo dal punto di vista geometrico e quindi cinematico, senza caratterizzare come tale vincolo possa intervenire a modificare il moto di P sul vincolo stesso. Conviene decomporre la reazione vincolare $\vec{\phi}(t)$ nella sua componente tangente al vincolo $\vec{\phi}_t(t)$ (o parallela alla linea nel caso di vincolo doppio) e nella sua componente normale $\vec{\phi}_n(t)$.

Per risolvere il problema del punto vincolato è necessario caratterizzare come il vincolo interviene a modificare il moto di P sul vincolo stesso. Tale caratterizzazione può essere suggerita solo da fatti sperimentali, pensando a situazioni reali in cui il vincolo si limiti a mantenere il punto sul vincolo senza frenarlo nel suo moto.

1.4 Vincoli lisci e principio dei lavori virtuali

Nel caso di un punto materiale vincolato ad una superficie o ad una linea, si può caratterizzare un vincolo richiedendo che la reazione sia ortogonale al vincolo stesso.

Definizione. Un vincolo bilatero semplice (1.1), oppure bilatero doppio (1.3), si dice **liscio** se la reazione $\vec{\phi}(t)$ è in ogni istante di tempo ortogonale allo spazio delle configurazioni, ovvero all'insieme delle disposizioni di P compatibili con il vincolo.

Nel caso di una superficie e di una linea è facile esprimere le direzioni ortogonali tramite il gradiente, ottenendo così nel caso di una superficie

$$\vec{\phi}(t) = \lambda(t)\text{grad}f$$

e nel caso di una linea intersezione di due superficie $f_1 = 0$ ed $f_2 = 0$

$$\vec{\phi}(t) = \lambda_1(t)\text{grad}f_1 + \lambda_2(t)\text{grad}f_2.$$

Vediamo quindi come il problema è risolto in quanto il numero di incognite è ora uguale al numero di equazioni. L'equazione di moto di un punto vincolato ad un vincolo semplice di equazione $f(P, t) = 0$ è

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \lambda(t)\text{grad}f, \\ f(P, t) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

L'equazione di moto di un punto vincolato ad un vincolo doppio di equazioni $f_1(P, t) = 0$ e $f_2(P, t)$ è

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \lambda_1(t)\text{grad}f_1 + \lambda_2(t)\text{grad}f_2, \\ f_1(P, t) = 0, \\ f_2(P, t) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Le equazioni di moto (1.10) e (1.11) sono dette **equazioni di Lagrange di 1^a specie**.

È importante dare ora una definizione di vincolo liscio, equivalente alla precedente, che possa essere generalizzata quando studieremo un sistema di punti vincolati.

Ricordando la definizione di velocità virtuale, è facile verificare che imporre l'ortogonalità della reazione rispetto al vincolo è equivalente a richiedere che la potenza virtuale della reazione sia nulla. Naturalmente per fare questo sarà necessario calcolare la potenza della reazione “*come se il vincolo non variasse nel tempo*”.

Enunciamo ora un teorema che caratterizza un vincolo liscio per mezzo della velocità virtuale.

Teorema 1.4.1 *Un vincolo bilatero semplice (o doppio) è liscio se e solo se, in ogni istante t ed in ogni punto P dello spazio delle configurazioni, è*

$$\hat{W}_\phi = \vec{\phi}(t) \cdot \hat{\vec{v}} = 0 \quad (1.12)$$

qualunque sia la velocità virtuale $\hat{\vec{v}}$.

La verifica di questo teorema si basa sulla definizione di velocità virtuale $\hat{\vec{v}}$ e sull'aspetto geometrico di $\hat{\vec{v}}$.

A volte può essere comodo introdurre lo spostamento virtuale δP dato da $\hat{\vec{v}}dt$, si parlerà quindi di lavoro virtuale anziché potenza virtuale. La definizione di vincolo liscio può essere assunta come una ipotesi di lavoro, che viene comunemente chiamato **principio dei lavori virtuali**.

Nel caso di vincoli unilateri, il vincolo interviene sul punto quando questo si avvicina alla frontiera, in tal caso la reazione sarà sempre rivolta verso la parte degli spostamenti virtuali, quindi l'ipotesi che il vincolo sia liscio si trasforma nel richiedere che la potenza virtuale sia positiva o nulla

$$\hat{W}_\phi \geq 0$$

per ogni velocità virtuale, in ogni istante ed in ogni configurazione compatibile col vincolo.

Vediamo ora che forma assume il **teorema delle forze vive** nel caso di un punto vincolato.

Nel caso di vincoli lisci e fissi, le velocità virtuali coincidono con le velocità effettive, quindi la potenza virtuale coincide con la potenza effettiva, e quindi la variazione di energia cinetica è tutta da attribuire alla potenza della forza direttamente applicata, come nel caso di un punto libero.

Nel caso di vincoli lisci e mobili, si dovrà invece tenere conto anche della potenza della reazione. Calcoliamo la potenza della reazione vincolare (nel caso di un vincolo semplice)

$$W_\phi(t) = \vec{\phi}(t) \cdot \vec{v} = \lambda(t)\text{grad}f \cdot \vec{v}.$$

Ricordando la definizione di velocità possibile, si sa che

$$\text{grad}f \cdot \vec{v} = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

e quindi

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi = W_F - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}.$$

dove W_F e W_ϕ rappresentano la potenza della forza direttamente applicata e della reazione sul punto P , rispettivamente.

Nel caso di un vincolo doppio, la potenza effettiva è

$$W(t) = \vec{\phi}(t) \cdot \vec{v} = \lambda_1(t)\text{grad}f_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2(t)\text{grad}f_2 \cdot \vec{v}.$$

Utilizzando le relazioni ottenute dalla definizione di velocità possibile

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}f_1 \cdot \vec{v} &= -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \operatorname{grad}f_2 \cdot \vec{v} &= -\frac{\partial f_2}{\partial t},\end{aligned}$$

si ottiene la nuova forma del teorema delle forze vive

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi = W_F - \lambda_1(t)\frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2(t)\frac{\partial f_2}{\partial t}.$$

1.5 Punto materiale vincolato ad una linea liscia

Nello studio di un punto vincolato ad una linea, può essere conveniente introdurre un sistema di riferimento intrinseco, dato dai versori tangente \vec{t} , normale \vec{n} e binormale \vec{b} . Come si insegna nei corsi di Analisi, data una curva, sufficientemente liscia, nello spazio, è conveniente individuare la curva scegliendo l'arco s percorso dal punto P , a partire da un dato punto iniziale, corrispondente alla lunghezza dell'arco stesso. Nel punto P , relativo all'arco s , si determinano il versore tangente \vec{t} , il versore normale \vec{n} ed il versore binormale \vec{b} , a loro volta funzioni dell'arco s . Il moto del punto P viene così determinato dalla conoscenza della legge $s = s(t)$.

Ricordando la forma dell'accelerazione in coordinate intrinseche, le equazioni di moto di un punto vincolato prendono la forma

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{t} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{t}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{n} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{n}, \\ 0 &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{b} + \vec{\phi}(t) \cdot \vec{b}. \end{cases}$$

Nell'ipotesi di vincolo liscio si ha

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{t}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{n} + \vec{\phi}_n(t), \\ 0 &= \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{b} + \vec{\phi}_b(t), \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $s(0) = s_0$, e $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$, e dove $\vec{\phi}_n$ e $\vec{\phi}_b$ sono le componenti incognite della reazione.

La prima idea per risolvere il problema del punto vincolato è trovare la soluzione $s = s(t)$ della prima equazione e poi dopo avere sostituito nelle altre due ricavare le componenti della reazione. Purtroppo l'equazione di moto è di difficile integrazione, anche in casi semplici, si pensi ad esempio al caso del pendolo non lineare. Se ci si accontenta di calcolare la reazione del vincolo non in funzione del tempo, ma in funzione della posizione, si può ricorrere, nel caso che la forza \vec{F} sia posizionale, al teorema delle forze vive, che, poiché la reazione non compie lavoro, dà l'integrale primo

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\dot{s}_0^2 = \int_{P_0P} \vec{F} \cdot dP$$

dove P_0P appartiene alla curva e P_0 è la posizione iniziale. Nel caso di \vec{F} conservativa, allora si può ricorrere a

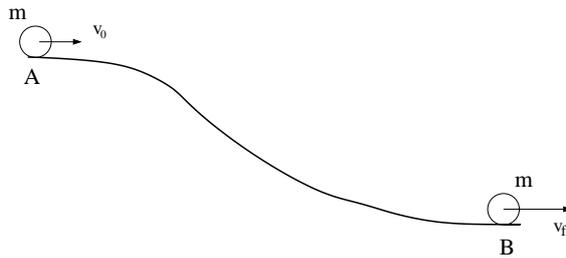
$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\dot{s}_0^2 = U(P) - U(P_0)$$

dove U è il potenziale.

1.6 Esercizi sul punto materiale vincolato ad una linea liscia

1.6.1 Esercizio

Si consideri il moto di un punto materiale pesante che parte dal punto A a quota z_A e che si muove fino al punto B a quota $z_B = z_A - h$, rimanendo vincolato a stare su un *vincolo liscio*, avente la forma come in figura e situato nello stesso piano verticale contenente i punti A e B .



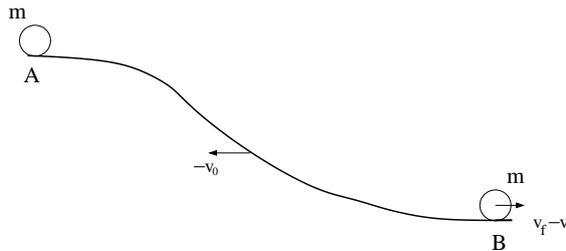
Il punto materiale di massa m viene lanciato con velocità orizzontale v_0 dal punto A a quota h (rispetto a B). Sia v_f la velocità finale nel punto B (sempre orizzontale). Allora il principio di conservazione dell'energia implica

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = hgm$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)(v_f + v_0) = hgm.$$

Si consideri ora il problema da un altro punto di vista. Supponiamo di traslare orizzontalmente con velocità $-v_0$ l'intero sistema.



Quindi rispetto ad un sistema fisso (lo stesso rispetto al quale è stato fatto il bilancio energetico sopra) il punto di massa m , lanciato come sopra, parte con velocità nulla ed ha alla fine la velocità $v_f - v_0$.

Allora, applicando nuovamente il principio di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)^2 = hgm$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m(v_f - v_0)(v_f - v_0) = hgm.$$

Quale dei due ragionamenti è errato?

Osservazione 1.6.1 *Poiché nella Meccanica Classica vale il principio di Galileo di addizione delle velocità, si dovrebbe ottenere lo stesso valore della velocità finale. Invece i due ragionamenti sopra arrivano a conclusioni contraddittorie.*

La risposta va ricercata nel fatto che anche i vincoli lisci possono compiere lavoro quando sono mobili.

Si lasciano al lettore i seguenti esercizi:

1.6.2 Esercizio

Studiare il moto di un punto su una linea piana (ad es. parabola, parabola cubica).

1.6.3 Esercizio

Studiare il moto del pendolo non lineare.

Capitolo 2

DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

2.1 Introduzione

Un sistema \mathcal{S} di punti materiali è un sistema costituito da un numero finito di n punti materiali, che verranno indicati con P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ciascuno di massa m_i

$$S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2), \dots, (P_n, m_n)\} .$$

2.2 Forze interne e forze esterne

Si consideri un sistema \mathcal{S} di punti materiali. Sia F_i la forza agente sul punto $P_i \in S$. Tale forza è la somma delle forze esercitate su P_i da punti P_j , $j \neq i$, del sistema e delle forze esercitate su P_i da punti che non appartengono al sistema.

Definiamo:

Forze interne. Le forze di mutua interazione tra i punti di un sistema $\{(P_1, m_1), (P_2, m_2), \dots, (P_n, m_n)\}$ si dicono interne.

Forze esterne. Le forze esercitate sui punti P_i del sistema da punti che non fanno parte del sistema \mathcal{S} .

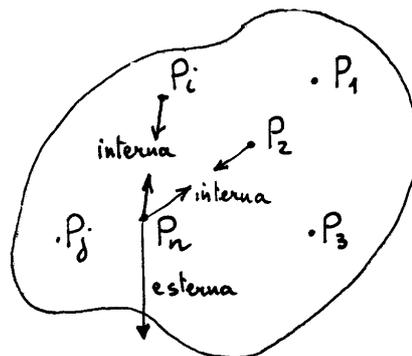


Figura 2.1 Forze interne ed esterne

Con riferimento ad un sistema di riferimento inerziale, si possono scrivere le equazioni di moto

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

dove la forza \vec{F}_i è data da

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)},$$

dove l'indice in alto sta per interne ed esterne.

Osservazione. Se l'osservatore non è inerziale, allora esso annovera tra le forze esterne anche le forze apparenti.

Teorema 2.2.1 *Le forze interne costituiscono un sistema equilibrato.*

Le forze interne sono un sistema di forze a risultante e momento risultante nulli, poiché le forze di interazione sono costituite da coppie di braccio nullo (anche in un sistema non inerziale, dove non cambiano le forze interne).

Oltre a distinguere fra **forze interne** e **forze esterne**, si può distinguere fra **forze attive** e **reazioni vincolari**. Quindi si possono scrivere le leggi di moto in due modi:

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i + \vec{\phi}_i, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}, & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

dove $\vec{\phi}_i$ sono le reazioni vincolari agenti sul punto P_i .

Quantità di moto

La quantità di moto del punto (P_i, m_i) è data dal vettore $m_i \vec{v}_i$. La risultante di questi vettori relativi a tutti i punti di \mathcal{S} si chiama **quantità di moto del sistema**.

Si indica con

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.1)$$

Momento della Quantità di moto

Il momento della quantità di moto di ciascun punto (P_i, m_i) rispetto al punto O è data dal vettore $(P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$. La risultante di questi vettori relativi a tutti i punti di \mathcal{S} si chiama **momento della quantità di moto del sistema**.

Si indica con

$$\vec{K}(O) = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i. \quad (2.2)$$

2.3 Equazioni Cardinali della Dinamica

Derivando rispetto al tempo la quantità di moto definita da (2.1) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i.$$

e tenendo conto della legge di moto di Newton $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}$ si ha anche

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)} \right).$$

Ricordando che le forze interne costituiscono un sistema equilibrato, $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(i)} = 0$ e definendo la **risultante delle forze esterne**

$$\vec{R}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}$$

si ottiene

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{(e)},$$

nota come **prima equazione cardinale della dinamica**.

D'altronde se sfruttiamo la definizione di centro massa, possiamo dare alla prima equazione cardinale una forma nota come **Teorema del moto del centro massa**. Sia P_0 il punto definito da

$$m(P_0 - O) = \sum_{i=1}^n m_i(P_i - O)$$

dove O è un punto fisso, scelto arbitrariamente, derivando rispetto al tempo si ottiene $\vec{Q} = m\vec{v}(P_0) = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$, e quindi

$$m\vec{a}(P_0) = \vec{R}^{(e)}.$$

Da quanto detto sopra, segue il noto

Corollario 2.3.1 *In un sistema isolato il centro di massa P_0 ha l'accelerazione nulla rispetto ad un osservatore inerziale.*

Passiamo ora ad analizzare il momento della quantità di moto. Derivando rispetto al tempo il momento della quantità di moto definita da (2.2) si ottiene

$$\frac{d}{dt}\vec{K}(O) = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{v}_i - \vec{v}(O)] \wedge \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n m_i(P_i - O) \wedge \vec{a}_i,$$

ovvero, ricordando la definizione di $\vec{Q}(O)$,

$$\frac{d}{dt}\vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i\vec{a}_i.$$

Tenendo conto, anche in questo caso, delle leggi di moto di Newton

$$\frac{d}{dt}\vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge (\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}),$$

ricordando che le forze interne, costituendo un sistema equilibrato, hanno momento risultante nullo $\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(i)} = 0$ e definendo il **momento risultante delle forze esterne**

$$\vec{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{(e)}$$

si ottiene la **seconda equazione cardinale della dinamica**

$$\frac{d}{dt}\vec{K}(O) = -\vec{v}(O) \wedge \vec{Q} + \vec{M}^{(e)}.$$

Se O è un punto fisso, oppure coincide con il centro di massa P_0 , oppure se $\vec{v}(O)$ è parallela a $\vec{v}(P_0)$, allora

$$\dot{\vec{K}}(O) = \vec{M}^{(e)}.$$

Commenti. Le equazioni cardinali contengono solo informazioni di carattere globale sull'evoluzione temporale del sistema meccanico. Esse devono essere verificate da un qualsiasi sistema di punti, durante il moto, nel dato riferimento rispetto al quale sono state fatte le

derivate di \vec{Q} e $\vec{K}(O)$. Quindi ogni sistema le soddisfa durante il moto, mentre non si può affermare che esse siano sufficienti a determinare il moto del sistema. Le incognite sono le $3n$ coordinate $x_i(t)$ dei punti P_i , eventualmente espresse tramite le coordinate lagrangiane del sistema (quindi tante quanti sono i gradi di libertà del sistema) se il sistema è olonomo e le $3n$ componenti delle reazioni vincolari $\vec{\phi}_i(t)$.

Quindi le **equazioni cardinali della dinamica** sono **necessarie**, ma in generale **non sono sufficienti**.

Le **equazioni cardinali della dinamica** sono **necessarie e sufficienti** per la determinazione del moto dei punti, a partire da fissate condizioni iniziali, solo quando le coordinate del sistema siano al più 6. Quindi in particolare le equazioni cardinali sono necessarie e sufficienti per studiare il moto di un corpo rigido.

Nota. Le **equazioni cardinali della dinamica** possono essere scritte anche in sistema di riferimento **non inerziale**, purché si tenga conto che la

$$\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{Q}, \quad \dot{\vec{K}}(O) = \left(\frac{d\vec{K}}{dt}(O) \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{K}(O).$$

2.4 Equazioni Cardinali della Statica

Se il sistema \mathcal{S} di punti si trova in equilibrio, allora segue subito che

$$\vec{R}^{(e)} = 0, \quad \vec{M}^{(e)} = 0$$

Queste equazioni che devono essere soddisfatte dalle forze esterne da un qualunque sistema S in equilibrio si dicono **equazioni cardinali della statica**. Più precisamente, perché un sistema di punti sia in quiete è **necessario** che siano nulli sia risultante che momento risultante delle forze esterne.

Quindi, come per il caso dinamico, tali equazioni non sono sufficienti. Si pensi ad esempio ad una massa di gas compresso che venga lasciato libero completamente senza l'azione di nessuna forza esterna.

È bene porre l'attenzione al caso di un sistema rigido S di punti vincolati fra loro o con l'esterno, allora se $\vec{\phi}^{(e)}$ e $\vec{\mu}^{(e)}$ sono risultante e momento risultante delle reazioni dei vincoli esterni, si avrà

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(e)} + \vec{\phi}^{(e)} &= 0 \\ \vec{M}^{(e)} + \vec{\mu}^{(e)} &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

e possiamo enunciare

Teorema 2.4.1 Condizione sufficiente (oltre che necessaria) *perché un sistema rigido che si trova in quiete in un istante $t = t_0$ rispetto ad un dato osservatore, conservi tale stato in un intervallo di tempo (t_0, t_1) è che (2.3) siano verificate nel medesimo intervallo di tempo.*

2.5 Questioni Energetiche

Vogliamo innanzitutto generalizzare il Teorema delle Forze Vive per un sistema di punti.

Definiamo l'energia cinetica per un sistema di punti (P_i, m_i)

$$T(t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2(t), \tag{2.4}$$

dove per ciascun punto i -esimo possiamo scrivere che la variazione di energia cinetica T_i è pari alla potenza delle forze attive e delle forze passive

$$\frac{dT_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i.$$

Sommando si ha

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_\phi ,$$

dove

$$W_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i , \quad W_\phi = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i$$

sono la potenza delle forze direttamente applicate e delle reazioni vincolari rispettivamente, per cui possiamo enunciare

Teorema 2.5.1 *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma delle potenze delle forze direttamente applicate e delle reazioni vincolari.*

Se invece distinguiamo fra forze esterne e forze interne allora

$$\frac{dT_i}{dt} = \vec{F}_i^e \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_i^i \cdot \vec{v}_i.$$

Sommando si ha

$$\frac{dT}{dt} = W^e + W^i ,$$

dove

$$W^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \vec{v}_i , \quad W^i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^i \cdot \vec{v}_i$$

sono la potenza delle forze esterne e delle forze interne rispettivamente, per cui possiamo enunciare

Teorema 2.5.2 *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma delle potenze delle forze interne e delle forze esterne.*

È bene osservare che nel caso generale le forze interne contribuiscono alla variazione dell'energia cinetica del sistema, ovvero in generale le forze interne possono compiere lavoro.

In termini di lavoro, si può riscrivere il risultato nella forma

$$\begin{aligned} dT &= W_F dt + W_\phi dt & , & \quad dT = W^e dt + W^i dt , \\ dT &= dL_F + dL_\phi & , & \quad dT = dL^e + W^i , \\ T(t) - T(t_0) &= L_F(t) + L_\phi(t) & , & \quad T(t) - T(t_0) = L^e(t) + L^i(t). \end{aligned}$$

Si può quindi concludere con il teorema:

Teorema 2.5.3 *La variazione di energia cinetica di un sistema di punti materiali in un intervallo di tempo $[t_0, t]$ è uguale al lavoro complessivo compiuto, nello stesso intervallo di tempo, dalle forze direttamente applicate e dalle reazioni vincolari, (ed anche dalle forze interne e dalle forze esterne).*

2.5.1 Caso di forze conservative

Ci domandiamo se nel caso in cui le forze agenti sul sistema di punti \mathcal{S} sono conservative sia possibile determinare una funzione $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ per l'intero sistema

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \equiv \mathcal{U}(C)$$

dove $C \in \mathbb{R}^{3n}$ è un vettore di \mathbb{R}^{3n} che rappresenta **la configurazione** del sistema, tale che

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = W_F .$$

Se le forze agenti sono $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, allora

$$\vec{F}_i = \text{grad}_{P_i} \mathcal{U} .$$

Possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.5.1 *Si dice che il sistema di forze direttamente applicate $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_i, \vec{F}_i), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$ è **conservativo** se esiste una funzione $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale*

$$\vec{F}_1 = \text{grad}_{P_1} \mathcal{U}, \vec{F}_2 = \text{grad}_{P_2} \mathcal{U}, \dots, \vec{F}_n = \text{grad}_{P_n} \mathcal{U} .$$

Limitandoci al caso di un sistema non vincolato, integrando il teorema delle forze vive $dT = d\mathcal{U}$ ed indicando per comodità

$$U(t) = \mathcal{U}(C(t)) = \mathcal{U}(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$$

si ottiene il noto **integrale dell'energia**

$$T(t) - U(t) = T(t_0) - U(t_0) . \quad (2.5)$$

2.6 Potenziale

2.6.1 Potenziale di forze esterne

Teorema 2.6.1 *Se le forze $\vec{F}_i^{(e)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono conservative con i potenziali $U_i^{(e)} = U_i^{(e)}(x_i, y_i, z_i)$ allora il sistema di forze esterne è conservativo con potenziale $U^{(e)} = \sum_{i=1}^n U_i^{(e)}$.*

Per dimostrare il teorema basta osservare che le forze esterne dipendono solo dal punto i -esimo e dai punti esterni al sistema. Infatti essendo

$$\vec{F}_i^{(e)} = \text{grad}_{P_i} U_i^{(e)}$$

e definendo $U^{(e)} = \sum_{i=1}^n U_i^{(e)}$ si ha ancora

$$\vec{F}_i^{(e)} = \text{grad}_{P_i} U^{(e)} ,$$

ovvero

$$\left(F_1^{(e)}, F_2^{(e)} \dots F_n^{(e)} \right) = \text{grad} U^{(e)} .$$

ESEMPIO 2.1 Siano $\{P_1, P_2, \dots\}$ n punti pesanti nello spazio \mathbb{R}^3 , per ciascun punto materiale

$$U_i^{(e)} = -m_i g z_i$$

dove m_i è la massa di ciascun punto. Definiamo

$$U^{(e)} = - \sum_{i=1}^n m_i g z_i = -g \sum_{i=1}^n m_i z_i = -m g z_{P_0}$$

dove $m = \sum_{i=1}^n m_i$ è la massa totale e z_{P_0} la quota del centro di massa.

2.6.2 Potenziale di forze interne

Siano $\vec{F}_1^{(i)}, \vec{F}_2^{(i)}, \dots, \vec{F}_n^{(i)}$ le forze interne degli n punti P_1, P_2, \dots, P_n . Supponiamo che ciascuna forza interna ammetta un potenziale, ovvero siano $U_i^{(i)}$ i potenziali di ciascuna forza interna definiti da

$$\vec{F}_i^{(i)} = \text{grad} U_i^{(i)}.$$

La somma di questi potenziali non dà in genere il potenziale dell'intero sistema di forze interne.

Definizione 2.6.1 Un sistema di forze interne $\{(P_1, \vec{F}_1^{(i)}), (P_2, \vec{F}_2^{(i)}), \dots, (P_n, \vec{F}_n^{(i)})\}$ è conservativo se esiste una funzione $U^{(i)} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{F}_i^{(i)} = \text{grad}_{P_i} U^{(i)}.$$

ESEMPIO 2.2 Siano (P_1, m_1) e (P_2, m_2) due punti materiali pesanti che si attraggono con una forza elastica di costante k . Le forze agenti su ciascuno dei due punti sono

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} = -k(P_1 - P_2); \quad (2.6)$$

il potenziale per l'intero sistema è

$$U^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2.$$

Infatti

$$\text{grad}_{P_1} U^{(i)} = -\frac{1}{2}k \text{grad}_{P_1} (P_1 - P_2)^2 = -k(P_1 - P_2) = \vec{F}_{1,2}$$

$$\text{grad}_{P_2} U^{(i)} = -\frac{1}{2}k \text{grad}_{P_2} (P_1 - P_2)^2 = -k(P_2 - P_1) = \vec{F}_{2,1}$$

Si noti che non è corretto sommare i potenziali di ciascuna delle due forze $U_1^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2$ e $U_2^{(i)} = -\frac{1}{2}k(P_1 - P_2)^2$, anche se singolarmente i loro gradienti danno le forze (2.6).

Per le forze esterne (invece)

$$U_1^{(e)} = -m_1 g z_1, \quad U_2^{(e)} = -m_2 g z_2$$

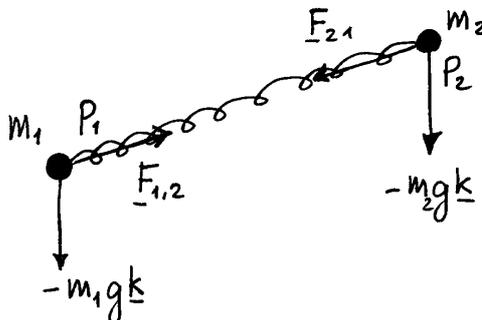


Figura 2.2 Sistema di due punti con forze interne ed esterne dell'Esempio 2.2

e quindi

$$U^{(e)} = -m_1gz_1 - m_2gz_2.$$

ESERCIZIO 2.6.1 *Si osservi che in generale le forze interne possono compiere lavoro. Dare qualche semplice esempio.*

ESERCIZIO 2.6.2 *Dimostrare che le reazioni di rigidità in un corpo rigido (cioè le forze che mantengono rigido il corpo, mantenendo inalterate le distanze) non compiono lavoro, ovvero hanno potenza nulla.*

Capitolo 3

EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE

3.1 Introduzione

In questo capitolo si introducono le equazioni di Lagrange di II specie come metodo sintetico ed efficiente per scrivere le equazioni di moto di un sistema olonomo sottoposto a vincoli lisci senza darne una giustificazione teorica, in quanto il nostro primo scopo è quello di fornire una ricetta pratica per scrivere le equazioni di moto.

Questo primo capitolo è introduttivo all'equazioni di Lagrange, mentre nel capitolo successivo verrà introdotto il concetto di vincoli lisci per un sistema olonomo e poi saranno dimostrate le equazioni di Lagrange.

3.2 Le equazioni di Lagrange di II specie nel caso non conservativo

Si consideri un sistema \mathcal{S} di n punti materiali. Senza entrare nei particolari, con l'esperienza che il lettore si è fatta nello studio dei vincoli nella statica dei sistemi, supponiamo di essere in grado di introdurre, al posto delle $3n$ coordinate cartesiane una serie di nuove coordinate, che chiameremo *coordinate lagrangiane* e che potranno essere sufficienti ad individuare la configurazione dell'intero sistema.

Si consideri un sistema \mathcal{S} sottoposto a vincoli olonomi bilateri, cioè un sistema la cui configurazione generica sia esprimibile in funzione di uno ed un solo numero l di coordinate che chiameremo *lagrangiane*: q_1, q_2, \dots, q_l . Tali coordinate potranno essere parte delle originarie coordinate cartesiane od anche altre coordinate comunque esprimibili tramite di esse. Se i vincoli sono fissi le coordinate q_1, q_2, \dots, q_l saranno sufficienti ad esprimere la configurazione del sistema, nel caso di vincoli mobili dovremo aggiungere, come variabile esplicita, anche il tempo t .

Siamo quindi in grado di esprimere ogni punto degli n punti del sistema \mathcal{S} tramite le coordinate lagrangiane, ad ogni istante t

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t), t) \quad (3.1)$$

Elenchiamo passo per passo come si deve operare per scrivere le equazioni di Lagrange di

II specie, innanzitutto nel caso più semplice in cui le forze agenti sul sistema siano tutte conservative e quindi esprimibili tramite un potenziale U

- Calcolare l'energia cinetica del sistema ed esprimerla in funzione dei solo parametri lagrangiani q_1, q_2, \dots, q_l , delle sue derivate, dette anche velocità lagrangiane, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l$, ed eventualmente anche esplicitamente del tempo, se i vincoli sono mobili.

Per calcolare l'energia cinetica si tratta, partendo dalla definizione $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$, di tenere conto dell'espressione delle velocità in termini di coordinate lagrangiane, ovvero derivando la (3.1), dell'espressione

$$\vec{v}_i(t) = \frac{\partial P_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial P_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (3.2)$$

A conti fatti, si otterrà un'espressione dell'energia cinetica quadratica nelle velocità lagrangiane che dipende dalle seguenti coordinate (si può anche provare che tale espressione è quadratica nelle \dot{q}_k)

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t)$$

- Calcolare il potenziale U del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_l , e del tempo t .
- Definire la *funzione Lagrangiana* come

$$\mathcal{L} = T + U \quad (3.3)$$

Tale funzione risulterà in generale funzione di

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t) \quad (3.4)$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per scrivere le seguenti equazioni di Lagrange di II specie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (3.5)$$

Se invece le forze agenti sul sistema non sono conservative, allora le equazioni (3.5) si scrivono nella forma (non conservativa)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (3.6)$$

dove le Q_k sono dette *forze generalizzate* o lagrangiane, definite da

$$Q_k = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (3.7)$$

dove F_i è la forza agente sul punto $P_i \in S$.

Pur rimandando il lettore ai capitoli successivi per maggiori dettagli, si può giustificare la definizione (3.7) interpretando le Q_k come la proiezione delle forze sulle direzioni individuate dai vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$, che, come vedremo in seguito, rappresentano i versori di base dello spazio tangente nel punto considerato nello spazio delle configurazioni.

3.3 Primi esercizi sul formalismo lagrangiano

In questi primi esercizi si vuole vedere a cosa si riduce il formalismo lagrangiano quando lo si applica a semplici esercizi, che possono essere risolti direttamente, facendo uso dell'equazione di Newton.

3.3.1 Equazione di moto di una particella libera

Si studi il moto di una particella di massa m , libera di muoversi nello spazio sotto l'azione di una forza (qualsiasi) \vec{F} .

Il punto libero ha tre gradi di libertà e si possono scegliere le usuali coordinate cartesiane quali parametri lagrangiani. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

per cui

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Analogamente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}.$$

Calcoliamo ora le componenti delle forze generalizzate

$$Q_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \vec{F} \cdot \vec{i} = F_x \quad (3.1)$$

$$Q_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \vec{F} \cdot \vec{j} = F_y \quad (3.2)$$

$$Q_3 = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = \vec{F} \cdot \vec{k} = F_z \quad (3.3)$$

Quindi dalle equazioni di Lagrange di II specie, nel caso non conservativo, si ottengono le tre equazioni

$$m\ddot{x} = F_x \quad (3.4)$$

$$m\ddot{y} = F_y \quad (3.5)$$

$$m\ddot{z} = F_z \quad (3.6)$$

ovvero si sono ritrovate le equazioni di Newton. L'assenza di vincoli e la scelta delle coordinate cartesiane ci ha fatto ottenere l'equazione $m\vec{a} = \vec{F}$ proiettata sulle direzioni coordinate.

3.3.2 Equazione di moto di una particella libera usando coordinate polari

Si studi il moto di una particella di massa m , libera di muoversi nel piano sotto l'azione di una forza \vec{F} , scegliendo questa volta le coordinate polari.

Sia $P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Scriviamo le componenti della velocità, usando le nuove coordinate

$$\dot{x} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.7)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

Possiamo quindi esprimere l'energia cinetica

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2r \sin \theta \cos \theta \dot{r} \dot{\theta} \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta \dot{r} \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

come era naturale aspettarsi ricordando che dalla cinematica la velocità in coordinate polari è data da

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}_1,$$

dove \vec{u} e \vec{u}_1 sono i versori radiale e trasverso. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} & \frac{\partial T}{\partial r} &= m r \dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} & \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Da cui la prima equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$, dove la forza generalizzata è data da

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = \vec{F} \cdot \vec{u} = F_r,$$

assume la forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r.$$

La seconda equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$, dove

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r\vec{u}_1 = rF_\theta,$$

assume la forma $2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta$. ovvero

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$$

Osservazione 3.3.1 *Sopra si è fatto uso del fatto che*

$$(P - O) = r\vec{u} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

e $\frac{\partial P}{\partial r} = \vec{u}$ e $\frac{\partial P}{\partial \theta} = r\vec{u}_1$ dove $\vec{u}_1 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$

Osservazione 3.3.2 *Si ricordi che le accelerazioni radiale e trasversa sono date da*

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Osservazione 3.3.3 *La seconda equazione nella forma*

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta$$

corrisponde alla seconda equazione cardinale, dove rF_θ è il momento della forza e $mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$ è la derivata del momento della quantità di moto.

3.4 Un altro semplice esempio: la macchina di Atwood

Per comprendere la potenza del formalismo lagrangiano, risolviamo un classico problema della fisica: la macchina di Atwood.

Si consideri la carrucola di raggio r in figura a cui sono appesi, da parti opposte, due masse m_1 ed m_2 , collegate da un filo di lunghezza l . Si scriva l'equazione di moto per le due masse. Il sistema ha un solo grado di libertà, è conservativo ed a vincoli olonomi.

Indicando con z la quota, a partire dall'asse x in figura, l'energia cinetica delle due masse è

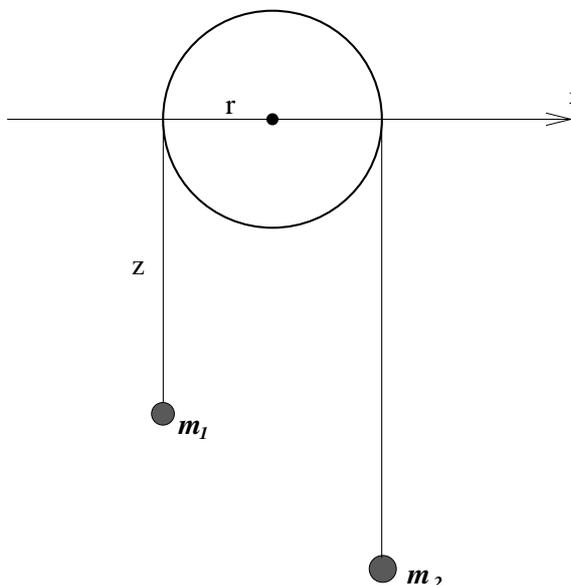


Figura 3.1 Macchina di Atwood

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d(l - \pi r - z)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2,$$

il potenziale è

$$U = -m_1g(-z) - m_2g(-l + \pi r + z) = m_1gz - m_2gz + m_2g(l - \pi r).$$

La funzione \mathcal{L} agrangiana assume quindi la forma (si tralasciano le costanti)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + m_1gz - m_2gz$$

Con semplici calcoli si ottiene $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = (m_1 + m_2)\ddot{z}$ e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = (m_1 - m_2)g$ da cui

$$(m_1 + m_2)\ddot{z} - m_1g + m_2g = 0 \quad (3.1)$$

ovvero

$$\ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

che si può ricavare anche in via elementare.

Si noti, che non si ricava la tensione della fune, perché le forze vincolari non compaiono mai in una descrizione lagrangiana.

3.5 Espressione lagrangiana dell'energia cinetica

Nel formalismo lagrangiano è necessario esprimere l'energia cinetica del sistema, definita da $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$, tramite le nuove coordinate lagrangiane. Per ottenere questo sarà

sufficiente tenere conto dell'espressione della velocità dei punti P_i tramite le coordinate lagrangiane

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2 + \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\partial P_i}{\partial t} \right]^2 \end{aligned}$$

tenendo conto che

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2 &= \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \\ &= \sum_{h,k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k \end{aligned}$$

Quindi scambiando gli indici (operazione lecita perché le sommatorie sono finite) si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2$$

Se definiamo

$$\begin{aligned} a_{hk} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \\ b_h &= 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \\ 2T_0 &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

l'espressione dell'energia cinetica in coordinate lagrangiane è data da

$$2T = \sum_{h,k=1}^l a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^l b_h \dot{q}_h + 2T_0 \quad (3.1)$$

Per evidenziare la struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo, può essere conveniente definire l'espressione di secondo grado nelle \dot{q}_k con

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

e l'espressione di primo grado nelle \dot{q}_k con

$$T_1 = \sum_{h=1}^l b_h \dot{q}_h.$$

Pertanto

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Si osservi che nel caso di vincoli fissi, l'espressione dell'energia cinetica si riduce al solo termine quadratico T_2 .

3.6 La conservazione dell'energia meccanica nel caso di vincoli fissi

Durante il moto, lo stato del sistema è individuato dalle $q_k = q_k(t)$ e $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$. Si dicono *integrali del moto* quelle funzioni di q_k e \dot{q}_k che si mantengono costanti al variare del tempo, dipendendo solo dalle condizioni iniziali. La meccanica analitica insegna che il numero di integrali del moto indipendenti per un sistema chiuso ad l gradi di libertà è uguale ad $2l - 1$.

Ricaviamo qui un integrale primo di moto direttamente dalla Lagrangiana. Si consideri un sistema meccanico, sottoposto a forze conservative, ad l gradi di libertà avente Lagrangiana \mathcal{L} . Supponiamo inoltre che i vincoli siano indipendenti dal tempo. La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, quindi la sua derivata totale rispetto al tempo risulta

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k.$$

Utilizzando le equazioni di Lagrange di II specie, si ottiene

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right),$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} \right) = 0.$$

Si ottiene così l'integrale primo di un sistema conservativo a vincoli fissi

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = \text{costante}. \quad (3.1)$$

Indichiamo con H l'espressione (3.1), che risulta essere proprio l'energia totale del sistema.

Infatti, nelle nostre ipotesi,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

e ricordando l'espressione dell'energia nel caso di vincoli fissi, si ha

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Si ottiene così

$$H = 2T - (T + U) = T - U.$$

che è l'energia totale del sistema.

3.7 Il potenziale generalizzato

È possibile trattare alcune forze non conservative introducendo una opportuna funzione che può essere interpretata come un potenziale generalizzato.

Per illustrare questo caso, consideriamo l'esempio di un sistema i cui punti siano sottoposti ad una forza d'attrito che sia proporzionale alla velocità della particella, ad esempio (limitiamoci ad un coefficiente k isotropo)

$$\vec{F}_a = -k\vec{v}$$

Possiamo introdurre la seguente funzione detta *funzione di dissipazione di Rayleigh*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

È facile verificare che

$$\vec{F}_{a_i} = -\nabla_{v_i}\mathcal{F},$$

e quindi la funzione $2\mathcal{F}$ può essere interpretata come la potenza dissipata a causa dell'attrito, poiché il lavoro delle forze d'attrito sul punto P_i è pari a

$$\vec{F}_{a_i} \cdot dP_i = \vec{F}_{a_i} \cdot \vec{v}_i dt = kv_i^2 dt.$$

Calcoliamo ora la forza generalizzata corrispondente alla forza d'attrito

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{a_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^n \nabla_{v_i}\mathcal{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^n \nabla_{v_i}\mathcal{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} =$$

Introducendo nell'equazioni di Lagrange la forza generalizzata, espressa tramite la funzione di dissipazione di Rayleigh, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (3.2)$$

A volte si preferisce definire un nuovo potenziale, detto generalizzato, dato da $U - \mathcal{F}$.

Capitolo 4

DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI

a cura di

Giovanni Borgioli (Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni)

Giovanni Frosali (Dipartimento di Matematica Applicata)

Indice

1	RICHIAMI di DINAMICA del PUNTO MATERIALE VINCOLATO	1
1.1	Prima analisi del concetto di vincolo	1
1.2	Velocità virtuale e di trascinamento	4
1.3	Equazioni di moto per un punto vincolato	7
1.4	Vincoli lisci e principio dei lavori virtuali	8
1.5	Punto materiale vincolato ad una linea liscia	10
1.6	Esercizi sul punto materiale vincolato ad una linea liscia	11
1.6.1	Esercizio	11
1.6.2	Esercizio	12
1.6.3	Esercizio	12
2	DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI	13
2.1	Introduzione	13
2.2	Forze interne e forze esterne	13
2.3	Equazioni Cardinali della Dinamica	14
2.4	Equazioni Cardinali della Statica	16
2.5	Questioni Energetiche	16
2.5.1	Caso di forze conservative	18
2.6	Potenziale	18
2.6.1	Potenziale di forze esterne	18
2.6.2	Potenziale di forze interne	19
3	EQUAZIONI DI LAGRANGE di II SPECIE	21
3.1	Introduzione	21
3.2	Le equazioni di Lagrange di II specie nel caso non conservativo	21
3.3	Primi esercizi sul formalismo lagrangiano	23
3.3.1	Equazione di moto di una particella libera	23
3.3.2	Equazione di moto di una particella libera usando coordinate polari	23
3.4	Un altro semplice esempio: la macchina di Atwood	25
3.5	Espressione lagrangiana dell'energia cinetica	25
3.6	La conservazione dell'energia meccanica nel caso di vincoli fissi	27
3.7	Il potenziale generalizzato	28
4	DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI	29