

Indice

1	Modello delle forze per i sistemi continui	3
1.1	Descrizione euleriana e lagrangiana	3
1.2	Qualche nozione sui tensori	4
1.3	Equazione di continuità	8
1.4	Equazioni indefinite	8
2	Fluidi perfetti	11
2.1	Equazione di Eulero e trinomio di Bernoulli	11
2.2	Equazione delle onde	12
2.2.1	Risoluzione dell'equazione delle onde	14
2.3	Fluido attorno ad un ostacolo	15
3	Fluidi viscosi	19
3.1	Equazione di Navier-Stokes	19
3.2	Applicazioni di N-S	21
3.2.1	Flusso in un canale	21
3.2.2	Flusso in un tubo	22
3.2.3	Viscosimetro a cilindro rotante	24
4	Strato limite	29
4.1	Formulazione del problema	29
4.2	Equazione dello strato limite	32
5	Teoria dell'elasticità	37
5.1	Misura della deformazione	37
5.2	Legame costitutivo	39
5.3	Equazioni di Navier	40
5.4	Considerazioni sui coefficienti di Lamè	40
6	Applicazioni alla teoria delle deformazioni	43
6.1	Cilindro sottoposto ad una coppia su un'estremità	43

6.2	Sbarra di sezione generica	46
6.3	Principio di massimo	50
6.4	Risoluzione del problema di Dirichlet	51
6.5	Sbarra a sezione rettangolare	52

Capitolo 1

Modello delle forze per i sistemi continui

1.1 Descrizione euleriana e lagrangiana

Sia $C(t)$ la configurazione attuale del sistema con le proprie coordinate x e sia $\Gamma(t)$ la configurazione di riferimento, quest'ultima, come è noto, ammette delle coordinate di riferimento ξ dette lagrangiane con il legame:

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$

La velocità e l'accelerazione sono ottenute banalmente dalla derivazione delle x rispetto al tempo. Definiamo ora la funzione densità (di volume)

$$\rho = \rho(\underline{\xi}, t)$$

con le condizioni che sia $\rho(\underline{\xi}, t) \geq 0$ e che l'integrale esteso a tutto il volume del continuo coincida con la massa. Se ne studiamo la sua variazione otteniamo¹:

$$\frac{d}{dt}\rho = \underline{v} \cdot \nabla\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (1.1)$$

Senza scendere nel particolare si può affermare che un'osservazione di tipo euleriano descrive il comportamento di grandezze fisiche (velocità, densità o altro) registrandone i valori assunti localmente al variare del tempo, mentre

¹per chi non fosse pratico si dimostra la scrittura successiva nel caso bidimensionale (in tre dimensioni è del tutto analogo)

$$\frac{d}{dt}\rho(x_1, x_2, t) = \frac{\partial\rho}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1} \frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial x_2}{\partial t}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\rho \cdot \underline{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

un'osservazione di tipo lagrangiano descrive il comportamento delle medesime grandezze lungo il moto dei singoli punti del sistema. Poichè ci stiamo addentrando nel mondo dei campi vettoriali, ricordiamo qualche definizione che ci sarà utile in seguito. Sia $\underline{v}(\underline{x}, t)$ un campo di velocità (euleriano), questo viene detto stazionario se non dipende esplicitamente dal tempo e cioè $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$, viene poi detto irrotazionale se $\text{rot} \underline{v} = 0$. In tal caso esiste un potenziale $\varphi(\underline{x}, t)$ tale che $\underline{v} = \nabla \varphi$. Un campo viene poi detto solenoidale se $\text{div} \underline{v} = 0$. Da queste definizioni si ha che se il campo di velocità è solenoidale e irrotazionale la φ deve essere armonica infatti $\text{div}(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0$. Ricordiamo inoltre un paio di teoremi che verranno sfruttati ampiamente nel corso:

Il teorema di Gauss o della divergenza:

Sia S una superficie chiusa di normale esterna \underline{n} che racchiude un volume V , e sia \underline{F} un campo vettoriale, allora:

$$\int_S \underline{F} \cdot \underline{n} ds = \int_V \text{div}(\underline{F}) dv$$

Il teorema di Stokes:

Sia \underline{F} un campo vettoriale, e sia γ una curva chiusa che funga da bordo di una superficie S di normale esterna \underline{n} , allora:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{p} = \int_S \text{rot} \underline{F} \cdot \underline{n} ds$$

ove il primo membro rappresenta la circuitazione del campo vettoriale \underline{F} .

1.2 Qualche nozione sui tensori

Sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ la consueta terna ortonormale, l'elemento $\underline{e}_i \underline{e}_j$ rappresenta una coppia ordinata di direzioni coordinate. A seconda delle varie combinazioni si possono ottenere nove coppie che formano lo spazio di un tensore del secondo ordine. Si può allora definire un tensore τ come la combinazione di ogni coppia secondo la seguente notazione:

$$\tau = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

o in maniera equivalente:

$$\tau = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

in maniera più schematica ma meno esatta può essere rappresentato anche solo dalla matrice dei coefficienti come segue:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

o anche con la notazione di Einstein secondo cui si sottintendono le somme sugli indici cioè:

$$\tau = \tau_{ij}$$

Anche se quindi si è visto che i tensori (del secondo ordine) non sono, come si potrebbe semplicisticamente pensare, delle matrici, conservano per fortuna alcune delle proprietà di quest'ultime. In particolare la somma di due tensori è un tensore che ha per componenti la somma delle componenti corrispondenti cioè:

$$\tau + \sigma = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \underline{e}_i \underline{e}_j$$

anche il prodotto di uno scalare per un tensore è uguale al prodotto di uno scalare per una matrice. Il tensore trasposto di τ è definito come:

$$\tau^t = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

Ogni tensore può inoltre sempre essere decomposto in una parte simmetrica più una parte antisimmetrica cioè:

$$\tau = \overbrace{\frac{1}{2}(\tau + \tau^t)}^{\text{parte simmetrica}} + \overbrace{\frac{1}{2}(\tau - \tau^t)}^{\text{parte antisimmetrica}}$$

oppure secondo la notazione di Einstein:

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_{ij} + \tau_{ji}) + \frac{1}{2}(\tau_{ij} - \tau_{ji}) \quad (1.2)$$

Detta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

la delta di Kronecker, si definiscono tre tipi di operazioni fra le coppie. il prodotto tensoriale:

$$(\underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot (\underline{e}_k \underline{e}_l) = \underline{e}_i (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k) \underline{e}_l = \delta_{jk} \underline{e}_i \underline{e}_l$$

6CAPITOLO 1. MODELLO DELLE FORZE PER I SISTEMI CONTINUI

il prodotto interno (o scalare):

$$(\underline{e}_i \underline{e}_j) : (\underline{e}_k \underline{e}_l) = (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)(\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l) = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

e il prodotto di una coppia per un vettore:

$$(\underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_k = \underline{e}_i (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k) = \delta_{jk} \underline{e}_i$$

di queste tre solo la seconda è commutativa. Immediata conseguenza sono il prodotto tensoriale:

$$\begin{aligned} \tau \cdot \sigma &= \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{kl} (\underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot (\underline{e}_k \underline{e}_l) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{kl} \delta_{jk} \underline{e}_i \underline{e}_l = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{kl} \right) \underline{e}_i \underline{e}_l \end{aligned}$$

il doppio prodotto tensoriale:

$$\tau : \sigma = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{ji} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

e il prodotto di un tensore per un vettore:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \underline{a} &= \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 a_k \underline{e}_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ij} a_k \underline{e}_i (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ij} a_k \delta_{jk} \underline{e}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} a_j \right) \underline{e}_i \end{aligned}$$

similmente si ottiene che

$$\underline{a} \cdot \sigma = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} a_j \right) \underline{e}_i$$

ovviamente quest'ultimo prodotto è commutativo se e solo se σ è simmetrico. Definiamo infine alcune espressioni, utili nel proseguio, di alcuni operatori lineari. Sia

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

l'operatore gradiente. Se questo viene moltiplicato nel senso del prodotto interno o scalare con un campo vettoriale \underline{u} , si ottiene la divergenza del campo medesimo cioè:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 u_j \underline{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.3)$$

se invece il gradiente viene applicato a un campo vettoriale \underline{u} si ha:

$$\nabla \underline{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \sum_{j=1}^3 u_j \underline{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad (1.4)$$

che risulta un tensore del secondo ordine!

Proseguendo il laplaciano di un campo vettoriale \underline{u} si ottiene facilmente come:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{u} &= \nabla \cdot (\nabla \underline{u}) = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \underline{e}_j \underline{e}_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \delta_{ij} \underline{e}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \underline{e}_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \underline{e}_k \end{aligned}$$

e l'operatore rotore di un campo vettoriale \underline{u}

$$\nabla \wedge \underline{u} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 u_j \underline{e}_j \right) = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

Si faccia attenzione quando si esprime la divergenza di un tensore τ in quanto risulta in maniera diversa non più uno scalare, come si è visto sopra, ma bensì un vettore, infatti:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tau_{jk} \underline{e}_j \underline{e}_k \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} \delta_{ij} \underline{e}_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \underline{e}_k \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si ricorda, poichè è di grande uso applicativo, anche l'espressione della matrice identità Id :

$$Id = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad (1.6)$$

1.3 Equazione di continuità

consideriamo un continuo S al cui interno non vi sia generazione di materia e facciamo un bilancio di massa. Indicando con \underline{n} la normale esterna se mi muovo tangenzialmente a ∂S non entro ne esco mentre se mi muovo lungo la normale entro o esco dal continuo. Il bilancio può allora essere scritto come:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x}, t) d\underline{x} = - \int_{\partial S} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma$$

ma per il teorema della divergenza il secondo membro è uguale a

$$- \int_S \operatorname{div}(\rho \underline{v}) d\underline{x}$$

e poichè tale equazione è indipendente da S si ha

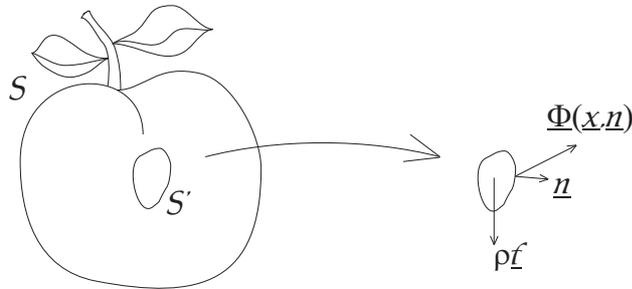
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (1.7)$$

Combinando la (1.1) e la (1.2) si ottiene la forma lagrangiana dell'equazione di continuità

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

1.4 Equazioni indefinite

Immaginiamo di avere un continuo S e di operare un taglio S' all'interno di esso diciamo come se togliessimo il nocciolo a una pesca.



Noi vogliamo cercare di costruire un modello di forze che ci permetta di capire cosa tiene "appiccicato" il nocciolo alla pesca. questo modello è costituito dalle forze di volume e dalle forze di superficie. Le prime dipendono sostanzialmente dalla gravità, è infatti quella che agisce sui volumetti del continuo, anche se in altri ambiti non sono le sole. Esse le indicheremo con $\rho \underline{f}$ essendo le \underline{f} forze specifiche di massa. Le forze di superficie che indicheremo con $\underline{\Phi}$ sono concentrate in un punto e dipendono infatti da quest'ultimo ma anche dalla normale alla superficie dove è stato effettuato il taglio (giacitura del taglio). Poiché queste sono le uniche forze che abbiamo supposto agire sul continuo, in condizione di equilibrio, per le equazioni cardinali della statica la risultante e il momento risultante devono essere nulli cioè:

$$\int_{S'} \rho \underline{f} d\underline{x} + \int_{\partial S'} \underline{\phi}(\underline{x}, \underline{n}) d\sigma = 0 \quad (1.8)$$

e

$$\int_{S'} \rho \underline{f} \wedge \underline{x} d\underline{x} + \int_{\partial S'} \underline{\phi}(\underline{x}, \underline{n}) \wedge \underline{x} d\sigma = 0 \quad (1.9)$$

Per il teorema di Cauchy (che non dimostriamo) si ha che $\underline{\phi}(\underline{x}, \underline{n}) = \tau(\underline{x})\underline{n}$ dove $\tau(\underline{x})$ è il cosiddetto tensore degli sforzi. Dalla seconda equazione cardinale si ricava inoltre che tale tensore è simmetrico. Riscriviamo allora la (1.3) per una componente:

$$\int_{S'} \rho f_1 d\underline{x} + \int_{\partial S'} \tau_1 \cdot \underline{n} d\sigma$$

ma per il solito teorema della divergenza si ha (osservando al solito che il risultato è indipendente da S'):

$$\rho f_1 + \operatorname{div} \tau_1 = 0$$

ed in generale:

$$\rho \underline{f} + \operatorname{div} \tau = 0 \quad (1.10)$$

la quale è detta equazione indefinita della statica dei sistemi continui. Per d'Alambert le equazioni della dinamica si ottengono sostituendo semplicemente $\underline{f} - \underline{a}$ al posto di \underline{f} .

10CAPITOLO 1. MODELLO DELLE FORZE PER I SISTEMI CONTINUI

Capitolo 2

Fluidi perfetti

2.1 Equazione di Eulero e trinomio di Bernoulli

Un continuo viene detto fluido se ha il tensore degli sforzi $\tau_{ij} = 0 \forall i \neq j$ in condizione di equilibrio. Se anche in condizioni dinamiche il tensore ha gli elementi tutti nulli tranne la diagonale allora il fluido viene detto perfetto. In tal caso il tensore è esprimibile come $\tau_{ij} = -p(\underline{x}, t)\delta_{ij}$ dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Con queste notazioni la (1.5) in condizioni dinamiche diventa:

$$\rho(\underline{g} - \underline{a}) = \nabla p$$

dove come forze di volume abbiamo considerato evidentemente solo la forza peso. Ma $\underline{a} = \frac{d}{dt}\underline{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$, si arriva quindi a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.1)$$

che è l'equazione di Eulero per fluidi perfetti con densità costante. Consideriamo ora l'identità

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \text{rot} \underline{v} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2$$

che dimostriamo nel seguito solo per la prima componente in quanto per le altre due è esattamente analogo.

Dimostrazione:

Ricordando che $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ ne consegue che

$$\left(\frac{1}{2} \nabla v^2\right)_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1}$$

mentre

$$\begin{aligned} (\text{rot} \underline{v} \wedge \underline{v})_i &= \left(\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \right)_i = \\ &= v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) - v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

svolgendo i calcoli e semplificando si ottiene che:

$$(\text{rot} \underline{v} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2)_i = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})_i$$

sfruttando l'identità appena dimostrata e ponendo $\underline{g} = \nabla(-gz)$, l'equazione di Eulero diventa:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{rot} \underline{v} \wedge \underline{v} = \nabla(-gz - \frac{1}{2}v^2 - \frac{p}{\rho})$$

che per moti stazionari e irrotazionali assume la forma:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{costante} \quad (2.2)$$

detto trinomio di Bernoulli.

2.2 Equazione delle onde

Consideriamo l'equazione di Eulero trascurando le forze di massa insieme all'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

supponendo la densità funzione della pressione, in condizioni di equilibrio si avrà:

$$\begin{cases} \underline{u} = 0 \\ \rho = \rho^* = \rho(p^*) \\ p = p^* \end{cases}$$

ora se ci spostiamo di poco dall'equilibrio avremo:

$$\begin{cases} \underline{u} = \tilde{\underline{u}} \\ \rho = \rho^* + \tilde{\rho} \\ p = p^* + \tilde{p} \end{cases}$$

dove le quantità soprastegnate dalla tilde sono piccole. Riscriviamo allora l'equazione di Eulero in questa nuova configurazione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial t} + \tilde{\underline{u}} \cdot \nabla \tilde{\underline{u}} &= -\frac{1}{\rho^* + \tilde{\rho}} \nabla(p^* + \tilde{p}) \\ &= -\frac{1}{\rho^*(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho^*})} \nabla \tilde{p} \simeq -\frac{1}{\rho^*} \nabla \tilde{p}\end{aligned}$$

trascurando infine $\tilde{\underline{u}} \cdot \nabla \tilde{\underline{u}}$ si arriva a:

$$\frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla \tilde{p} \quad (2.3)$$

operando le medesime considerazioni sull'equazione di continuità si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}[(\rho^* + \tilde{\rho})\tilde{\underline{u}}] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho^* \text{div} \tilde{\underline{u}} &= 0\end{aligned} \quad (2.4)$$

inoltre se sviluppiamo la ρ in un intorno della configurazione di equilibrio tramite il teorema di Taylor si ottiene:

$$\rho^* + \tilde{\rho} \simeq \rho(p^* + \tilde{p}) = \rho^* + \frac{\partial \rho}{\partial p}(p^*)\tilde{p} + o(\tilde{p})$$

da cui:

$$\tilde{\rho} \simeq \frac{\partial \rho}{\partial p}(p^*)\tilde{p} \Rightarrow \tilde{p} \simeq \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial p}(p^*)} \tilde{\rho} \quad (2.5)$$

Se deriviamo la (2.4) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho^* \text{div} \frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial t} = 0$$

e sfruttando la (2.3) e la (2.5)

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho^* \text{div} \left(-\frac{1}{\rho^*} \nabla \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial p}(p^*)} \tilde{\rho} \right) = 0$$

poichè ora $\frac{\partial \rho}{\partial p}(p^*) > 0$ allora lo si può porre uguale a una quantità positiva c^2 (quadrato della velocità del suono) giungendo in definitiva all'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \tilde{\rho} \quad (2.6)$$

è interessante cercare di calcolare la velocità del suono. Se supponiamo di trovarci in condizioni isoterme allora si avrà una relazione del tipo $p = C\rho$ da cui $c = \sqrt{\frac{p^*}{\rho^*}} \sim 280 \text{ m/s}$. Laplace sosteneva invece che la vibrazione è un processo veloce, non può essere isoterma in quanto non fa in tempo a scambiare con l'ambiente. Supponendo allora di essere in condizioni di adiabaticità abbiamo:

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)^n \Rightarrow c = \sqrt{1.4} \sqrt{\frac{p^*}{\rho^*}} = 332 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1195 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

che è un risultato molto più vicino alla realtà.

2.2.1 Risoluzione dell'equazione delle onde

Esiste più di un metodo per risolverla, per esempio si usa la separazione delle variabili la quale però in generale riconduce il problema a una risoluzione per serie non sempre agevole nei conti. Si riporta qui invece la soluzione di D'Alembert per il caso unidimensionale. Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde assume la forma¹:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (2.7)$$

Il metodo di D'Alembert consiste in un cambio di variabile passando da $u(x, t)$ a $v(\xi, \eta)$, con i legami:

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned}$$

con la regola a catena (chains rule) è facile esprimere le derivate nelle nuove coordinate:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_\xi + v_\eta \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c(v_\eta - v_\xi) \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2(v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} - v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta})$$

e sostituendo nella (2.7) si arriva a²:

$$\begin{aligned} 4c^2 v_{\xi\eta} &= 0 \Rightarrow v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \\ \Rightarrow u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \end{aligned}$$

¹si risolve il problema per la velocità e non per la densità poichè è del tutto equivalente

²solo esprimendo la $v(\xi, \eta)$ come somma di funzioni di variabile indipendente che si può ottenere la derivata seconda mista nulla (provare per credere!)

dove la f è detta onda progressiva mentre la g è detta onda regressiva. Sfruttando le condizioni al bordo arriviamo a questo sistema:

$$\begin{cases} -cf'(x) + cg'(x) = v_0(x) \\ f'(x) + g'(x) = u_0'(x) \end{cases}$$

da cui

$$f'(x) = \frac{cu_0' - v_0}{2c} \text{ e } g'(x) = \frac{v_0 + cu_0'}{2c}$$

giungendo a

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x v_0(s)ds \text{ e } g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x v_0(s)ds$$

ed infine

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$$

detta formula di D'Alambert.

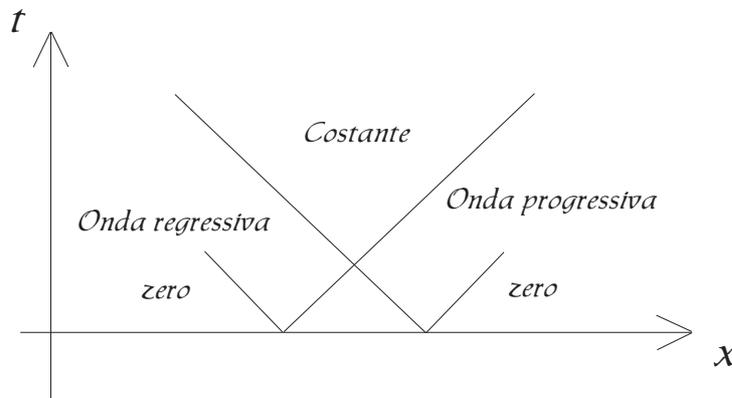


Figura 2.1: zona di influenza dei dati

2.3 Fluido attorno ad un ostacolo

Consideriamo un fluido che incontra un ostacolo $\Omega \in \mathfrak{R}^3$ non necessariamente circolare e supponiamo il moto irrotazionale e il fluido incomprimibile. Da queste ipotesi consegue immediatamente che $\nabla^2 \varphi = 0$ dove φ è il potenziale

di \underline{v} . Si suppone infine il moto stazionario e tale che all'infinito il flusso si disponga lungo una direzione privilegiata, diciamo l'asse x , in formule:

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow +\infty} \underline{v}(\underline{x}) = v_\infty \underline{i}$$

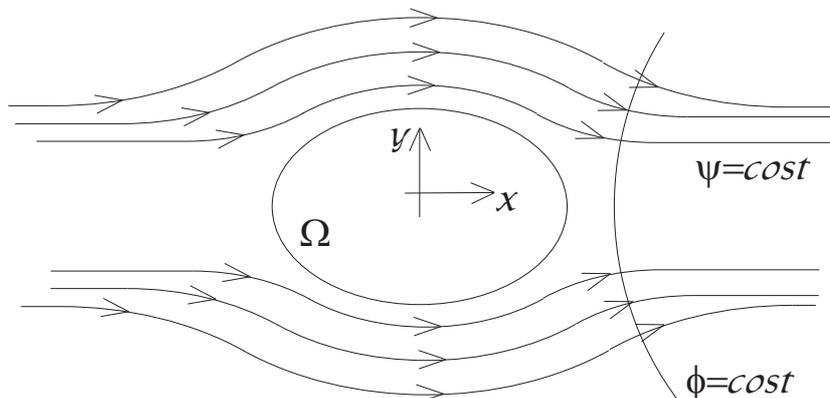
cioé

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow +\infty} [\varphi(\underline{x}) - v_\infty x_1] = 0$$

dove v_∞ è detta velocità asintotica. Detta \underline{n} la normale esterna a $\partial\Omega$, per la condizione di non penetrabilità si ha evidentemente:

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \nabla\varphi \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

Andiamo ora a risolvere il problema nel caso dell'idrodinamica piana. Detta quindi $\underline{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1, x_2)\underline{i} + v_2(x_1, x_2)\underline{j}$ con il fluido incomprimibile, da cui $\text{div}\underline{v} = 0$, si considera il campo di velocità ruotato di $\frac{\pi}{2}$ cioè $\underline{w} = \underline{k} \wedge \underline{v} = (-v_2, v_1) \Rightarrow \text{rot}\underline{w} = \text{div}\underline{v} = 0 \Rightarrow \exists \psi(x_1, x_2) : \underline{w} = \nabla\psi$. Essendo \underline{w} ortogonale a \underline{v} allora le curve $\psi = \text{cost}$ sono tangenti al campo di velocità. Non solo, essendo il flusso irrotazionale per ipotesi allora esiste un potenziale anche per \underline{v} che abbiamo denotato precedentemente con φ da cui ne consegue l'evidente $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0$. Da semplici calcoli si ricava anche che $\text{div}\underline{w} = -\text{rot}\underline{v} = \nabla^2\psi = 0$ immettendo un'ipotesi aggiuntiva per la ψ equivalente a quella per la φ e cioè che $\lim_{|(x_1, x_2)| \rightarrow +\infty} |\psi - v_\infty x_2| = 0$.



Dalla teoria dell'analisi complessa sappiamo che se l'ostacolo è circolare la funzione complessa di variabile complessa che soddisfa il nostro problema è la cosiddetta funzione di Jukowski:

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{r^2}{z} \right)$$

con $z = x + iy$ e $f(x + iy) = \varphi + i\psi$, dove r è il raggio dell'ostacolo circolare. Definiamo ora l'azione dinamica \underline{R} che il fluido esercita sull'ostacolo come:

$$\underline{R} = - \int_{\partial\Omega} (p - p_0) \underline{n} d\sigma$$

ma sotto le ipotesi che abbiamo citato vale l'equazione di Bernoulli da cui deducendone gli integrali primi di moto e trascurando le forze di massa si ha:

$$p - p_0 = -\rho \frac{v^2}{2} \Rightarrow \underline{R} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \rho v^2 \underline{n} d\sigma = 0$$

per il teorema dell'integrale di Cauchy. Questo risultato ci deve far riflettere in quanto è evidente che non è plausibile che la resistenza del corpo sia nulla, e infatti non lo è. L'errore nasce dal considerare il fluido perfetto. Si vedrà nel seguito come tralasciando questa ipotesi semplicistica si arriva a determinare delle equazioni di moto molto più complesse ma anche molto più vicine alla realtà

Capitolo 3

Fluidi viscosi

3.1 Equazione di Navier-Stokes

come si è già accennato bisogna ricercare una forma del tensore degli sforzi tale che sia più fedele alla realtà. Bisogna aggiungere un pezzo che facciamo dipendere dalle derivate della velocità (rispetto alla posizione) cioè dal tensore $\nabla \underline{v}$ del quale però prendiamo solo la parte simmetrica poichè la parte antisimmetrica è non nulla nei moti rigidi. Noi vogliamo solo che ci sia scorrimento fra gli strati del fluido quindi non è ammissibile nel nostro modello un moto rigido nel cui caso, inoltre, impedirebbe la formazione di attriti. Si ipotizza quindi un tensore del tipo $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \alpha D_{ij} + \beta \text{div} \underline{v} \delta_{ij}$ dove $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$. In una struttura più compatta il tensore D può essere espresso come:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^t)$$

Si può notare come questo tensore rappresenta nient'altro che la parte simmetrica di $\nabla \underline{v}$. Ciò rispetta quanto detto sopra infatti la parte antisimmetrica di $\nabla \underline{v}$ è collegata ai moti rigidi e noi eliminandola imponiamo che gli unici moti accettabili siano di tipo "scorrimento" fra gli strati del fluido. Sotto queste ipotesi il fluido è detto newtoniano in quanto il tensore degli sforzi dipende in maniera lineare dalle derivate prime della velocità, in più supponiamo il fluido incomprimibile facendo così scomparire la $\text{div} \underline{v}$. Riscriviamo allora la (1.9) nel caso dinamico con questo nuovo tensore:

$$\begin{aligned} \rho(\underline{f} - \underline{a}) + \text{div}[-pId + \eta(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^t)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(\underline{f} - \underline{a}) - \nabla p + \eta \text{div}(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^t) &= 0 \end{aligned}$$

in quanto per la (1.6)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot p &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p \delta_{jk} \underline{e}_j \underline{e}_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta_{jk} \delta_{ij} \underline{e}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta_{ik} \underline{e}_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_k} \underline{e}_k = \nabla p\end{aligned}$$

dove si è posto $\frac{\alpha}{2} = \eta$ (coefficiente di viscosità dinamico). Inoltre sfruttando la (1.5) e la (1.2):

$$\begin{aligned}div(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^t) &= \nabla \cdot (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^t) = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \underline{e}_j \underline{e}_k \right] = \\ &= \dots = \nabla^2 \underline{v} + \nabla(\nabla \cdot v_1) \underline{e}_1 + \nabla(\nabla \cdot v_2) \underline{e}_2 + \nabla(\nabla \cdot v_3) \underline{e}_3 = \\ &= \nabla^2 \underline{v} + \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) = \nabla^2 \underline{v}\end{aligned}$$

poichè l'incomprimibilità del fluido fa sparire, come prima, la divergenza di v mentre con \underline{e}_j ($j = 1, 2, 3$) si indica la consueta terna ortonormale $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$. Poniamo ora $\underline{f} = \nabla u$ e riscriviamo la \underline{a} nella maniera che avevamo già trovato¹. Ma allora si ha:

$$\rho(\nabla u - \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - rot \underline{v} \wedge \underline{v} - \frac{1}{2} \nabla v^2) - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} = 0$$

e riordinando i termini:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + rot \underline{v} \wedge \underline{v} = \nabla(u - \frac{1}{2} v^2 - \frac{p}{\rho}) + \nu \nabla^2 \underline{v} \quad (3.1)$$

con $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. In alternativa si può lasciare l'accelerazione nella sua precedente espressione ottenendo:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho} \nabla(u - p) + \nu \nabla^2 \underline{v} \quad (3.2)$$

Queste sono le cosiddette equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili le cui risoluzioni esplicite sono possibili in soli alcuni semplici casi. Si ricorda inoltre che a queste vanno accoppiate l'equazione di continuità e le condizioni al bordo. Se si scalano le incognite di grandezze caratteristiche, (cioè $x' = \frac{x}{l}$; $\underline{v}' = \frac{\underline{v}}{v_0}$; ecc..) si ottiene l'equazione di N-S in forma adimensionale:

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \underline{v}' \cdot \nabla' \underline{v}' = \nabla'(u - p) + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \underline{v}' \quad (3.3)$$

dove Re è il numero di Reynolds.

¹infatti $\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = rot \underline{v} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2$

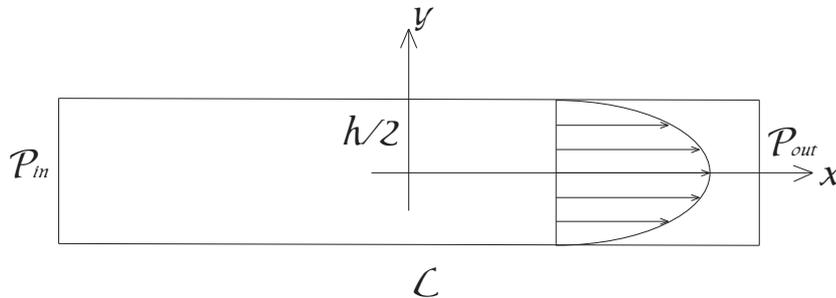
3.2 Applicazioni di N-S

Scriviamo le equazioni di N-S secondo la (3.2), esplicitando le tre componenti, insieme all'equazione di continuità ricordando al solito che supponiamo il fluido incomprimibile:

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\nabla^2 v_1 + \rho g_x \\ \rho\left[\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\nabla^2 v_2 + \rho g_y \\ \rho\left[\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\nabla^2 v_3 + \rho g_z \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

3.2.1 Flusso in un canale

Consideriamo un canale di lunghezza L , infinito lungo z , nel quale il fluido all'interno è mosso da una differenza di pressione $\Delta p = P_{out} - P_{in}$. Il canale è alto $2h$ e noi poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento lungo l'asse del canale a distanza $\frac{L}{2}$. Ipotizziamo per semplicità la forza peso trascurabile



e il flusso stazionario (per cui $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$) con $P_{in} > P_{out}$. Da quanto detto sopra possiamo supporre che la velocità sia solo lungo l'asse x cioè $\underline{v} = v_1(x, y)\underline{e}_x$ (con $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ si indica la consueta terna ortonormale $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$), per cui dall'equazione di continuità si ricava:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_1 = v_1(y)$$

mentre dalle N-S si ha:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Dalle cui ultime due si ricava che $p = p(x)$ mentre dalla prima:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \eta \frac{\partial^2 v_1(y)}{\partial y^2} = \text{costante} \quad (3.4)$$

poichè due funzioni indipendenti di variabile indipendente sono uguali se e solo se sono costanti. Risolvendo quella al membro sinistro con le condizioni al bordo si trova:

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{L}x + P_{in}$$

per quella al membro destro bisogna aggiungere la condizione di non slittamento, $v_1(h) = 0$, inoltre sappiamo che la v_1 è una funzione pari (anche solo intuitivamente non abbiamo motivo di pensare che non sia simmetrica rispetto all'asse del canale), ma le funzioni pari hanno derivata lungo l'asse di simmetria nulla cioè $\frac{\partial v_1}{\partial y}(0) = 0$. Integrando con queste condizioni il membro destro della (3.4) si ottiene:

$$\int_0^y \frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2} = -\int_0^y \frac{\Delta p}{\eta L} \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y}(y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(0) = -\frac{\Delta p}{\eta L}y$$

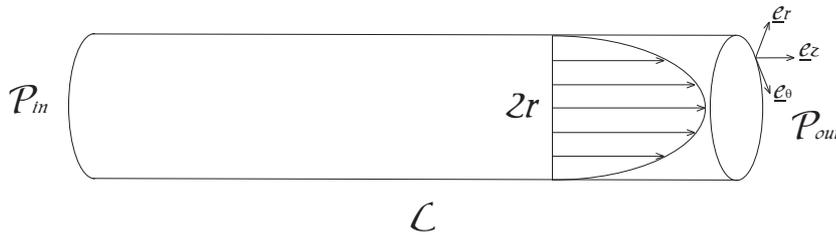
ed infine

$$\begin{aligned} \int_y^h \frac{\partial v_1(y')}{\partial y'} dy' &= -\int_y^h \frac{\Delta p}{\eta L} y' dy' \Rightarrow v_1(h) - v_1(y) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \int_y^h y' dy' \\ \Rightarrow v_1(y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{L} (h^2 - y^2) \end{aligned}$$

3.2.2 Flusso in un tubo

Consideriamo un tubo di lunghezza L e raggio R il cui flusso all'interno è mosso da un gradiente di pressione $\Delta p = P_{out} - P_{in}$, assumiamo trascurabile la forza peso e supponiamo il flusso stazionario. In tal caso è preferibile risolvere il problema sfruttando il cambio di coordinate da cartesiane a cilindriche. Se indichiamo con \underline{e}_z il versore lungo la direzione dell'asse del tubo, con \underline{e}_r il versore radiale e con \underline{e}_θ il versore tangente alla direzione radiale, allora il campo di velocità \underline{v} può essere espresso come:

$$\underline{v} = v_r(r, \theta, z, t)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z, t)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z, t)\underline{e}_z$$



Ora se assumiamo il numero di Reynolds $Re < soglia$ allora il flusso è laminare e il campo di velocità (non più funzione del tempo a causa della stazionarietà e nemmeno di θ per simmetria) è diretto solo lungo z cioè $\underline{v} = v_z(r, z)\underline{e}_z$. Applicando l'equazione di continuità rimane allora, per le considerazioni precedentemente fatte:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$$

Le equazioni N-S in coordinate cilindriche (già semplificate) diventano

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

dalle prime due si ricava che $p = p(z)$ mentre per quanto riguarda l'ultima:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) = \text{costante}$$

in quanto due funzioni indipendenti di variabile indipendente sono uguali se e solo se sono costanti. L'integrazione del membro sinistro con le condizioni al bordo dà:

$$p(z) = -\frac{\Delta p}{L} z + P_{in} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L}$$

per il membro a destra dobbiamo risolvere il problema:

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) = -\frac{\Delta p}{L} r \\ v_z(R) = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r}(0) = 0 \end{cases}$$

non ci resta dunque che integrare l'equazione:²

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial v_z(t)}{\partial t} \right) dt = - \int_0^r \frac{\Delta p}{\eta L} t dt \Rightarrow r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} = - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{2}$$

ed integrando nuovamente

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{\partial v_z(t)}{\partial t} dt &= - \int_r^R \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{t}{2} dt \Rightarrow v_z(R) - v_z(r) = - \frac{\Delta p}{2\eta L} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \\ \Rightarrow v(r) &= \frac{\Delta p}{L} \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

siamo giunti così alla formula di Poiseuille, notando che è stato eliminato il pedice z per non appesantire troppo la scrittura. Il problema è risolto tuttavia se vogliamo avere una stima del numero di Reynolds per verificare se la nostra ipotesi iniziale è accettabile ci andiamo a calcolare la velocità media:

$$V_{media} = \frac{1}{R} \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{\eta}$$

una volta nota si ricava facilmente $Re = \frac{2\rho V_{media} r}{\eta}$. Si ricorda inoltre che purtroppo non basta questo dato per verificare la corretta impostazione del problema, può succedere infatti che si abbia turbolenza anche con bassi Reynolds se la scabrezza ε è grande. Per completezza calcoliamo la portata $Q = \int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS$ dove S è la sezione del tubo e \underline{n} la normale a tale sezione (in questo caso è \underline{e}_z):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho [v(r)\underline{e}_z] \cdot \underline{e}_z r dr d\theta = \frac{\pi \rho}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} R^4$$

Si ricorda a costo di essere ripetitivi che tale risultato è valido solo in regime laminare.

3.2.3 Viscosimetro a cilindro rotante

Questo è l'ultimo ma più importante esercizio. Con questo dispositivo, costituito da un recipiente contenente un fluido (allo stato liquido) e da un cilindro immerso in esso ed appeso con un cavo, è possibile verificare la viscosità del fluido e in particolare se è di tipo newtoniano. Facendo ruotare il recipiente con velocità angolare Ω costante, l'attrito fra gli strati del fluido trasmette alla faccia laterale del cilindro immerso una forza che determina una coppia

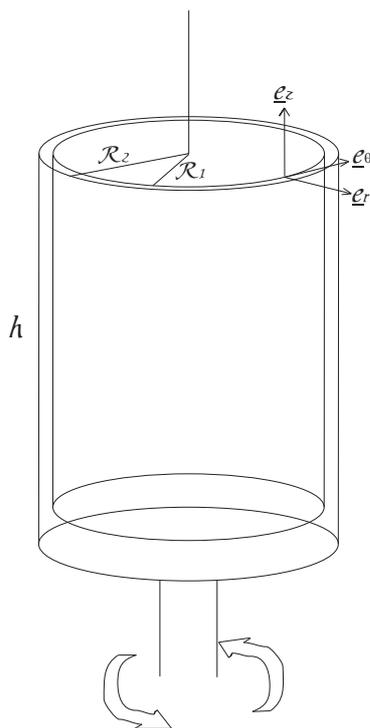
²la variabile indipendente r è stata sostituita da t per non creare confusione con gli estremi di integrazione

che lo farà girare di un certo angolo. Una volta misurata la coppia è possibile risalire alla viscosità. Detto R_1 il raggio del cilindro, \underline{n} la normale esterna alla superficie laterale S di esso, per il teorema di Cauchy, la forza agente sulla superficie laterale di quest'ultimo è data da:

$$\underline{F} = \int_S \tau \cdot \underline{n} ds = \int_0^h \int_0^{2\pi} \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} R_1 d\theta dz$$

in quanto \underline{n} coincide con la direzione radiale $\underline{e}_r = (1 \ 0 \ 0)$ e h è l'altezza del fluido che coincide pressapoco con la faccia laterale del cilindro. Non essendoci gradienti di pressione il tensore $\tau_{ij} = \eta D_{ij} = \eta [\frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^t)]$. Il tensore simmetrico D_{ij} espresso in coordinate cilindriche assume la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \dots & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \dots & \dots & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$



Una volta quindi noto il campo di velocità sarà possibile risalire alla forza agente sulla superficie laterale del cilindro immerso e quindi al momento. Per

ragioni di "buon senso" ci aspettiamo che, delle tre componenti di \underline{v} , prevalga $v_\theta(r, \theta, z)$, inoltre se supponiamo che il cilindro e il recipiente siano molto alti allora si può pensare, trascurando ciò che succede sul pelo dell'acqua e sul fondo, che "ogni particella d'acqua vede sopra e sotto di se la stessa quantità di acqua", in altre parole c'è invarianza rispetto a z . Questa condizione può essere equivalentemente espressa anche da :

$$\frac{R_2 - R_1}{h} \ll 1$$

dove R_2 è il raggio interno del recipiente. Da tutte queste considerazioni si evince che:

$$\underline{v} = v_\theta(r, \theta) \underline{e}_\theta$$

Cominciamo col considerare l'equazione di continuità espressa in coordinate cilindriche (siamo in condizioni di incomprimibilità):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

scriviamo ora le equazioni di N-S rispettivamente lungo r , θ , z :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) \right] \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(\theta, r) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ricavato dalla terza che p è solo funzione di r e θ , osserviamo inoltre dalla prima che la derivata parziale di $p(r, \theta)$ rispetto a r è uguale a una funzione della sola r , ma allora vuol dire che la p sarà la somma di due funzioni una di r e una di θ , infatti è solo in questa maniera che derivandola si otterrà una funzione della sola r . in formule:

$$p(r, \theta) = F(r) + G(\theta)$$

se andiamo a sostituire la p così costruita nella seconda delle N-S troviamo:

$$\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} = r \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) \right] = \text{costante}$$

in quanto due funzioni indipendenti di variabile indipendente sono uguali se e solo se sono costanti. Quindi integrando il membro sinistro:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos t d\theta \\ \Rightarrow G(2\pi) - G(0) &= 2\pi \cos t \end{aligned}$$

ma la G in 0 e in 2π è evidentemente coincidente ne consegue che la loro differenza è nulla. Per rispettare l'equazione bisogna allora che la costante sia nulla. Ne consegue che la G è costantemente nulla. quindi si arriva infine a trovare che $p = p(r)$. Dobbiamo risolvere come ultimo problema la seconda delle N-S con le condizioni che la velocità del flusso a contatto con la parete laterale del cilindro immerso sia nulla (all'equilibrio) e che la velocità del flusso a contatto con il recipiente coincida con la velocità tangenziale del recipiente medesimo cioè:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) \\ v_\theta(R_1) = 0 \\ v_\theta(R_2) = \Omega R_2 \end{cases}$$

Abbiamo tutti gli elementi, non ci resta quindi che procedere all'integrazione (al solito si sostituisce t al posto di r per non creare confusione con gli estremi di integrazione)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) &= \cos t \cdot r \\ \Rightarrow \int_{R_1}^r \frac{\partial}{\partial t} (t v_\theta) dt &= \cos t \int_{R_1}^r t dt \\ \Rightarrow r v_\theta(r) - R_1 v_\theta(R_1) &= \frac{\cos t}{2} (r^2 - R_1^2) \\ \Rightarrow v_\theta(r) &= \frac{\cos t}{2r} (r^2 - R_1^2) \end{aligned}$$

e sfruttando l'ultima condizione al bordo si ricava anche la costante giungendo infine a:

$$v_\theta(r) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\Omega}{r} (r^2 - R_1^2)$$

Siamo quindi finalmente in grado di calcolare la forza F agente sulla superficie laterale del cilindro immerso:

$$\underline{F} = R_1 \eta \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \dots & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \dots & \dots & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\theta dz e_\theta$$

ricordando che rimane solo v_θ e che $v_\theta(R_1)$ è nulla dalle condizioni al bordo, l'integrale si semplifica notevolmente:

$$\begin{aligned}\underline{F} &= \frac{R_1\eta}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{R_1} d\theta dz \underline{e}_\theta \\ \Rightarrow \underline{F} &= 2\pi\eta h R_1 \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \underline{e}_\theta\end{aligned}$$

ed il momento è:

$$\underline{\Gamma} = R_1 \underline{e}_r \wedge \underline{F} = 2\pi\eta h \Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \underline{e}_z$$

all'equilibrio questa quantità si eguaglia al momento torcente potendo così ricavare η . Inoltre in un grafico $(\Omega, \underline{\Gamma})$ se l'andamento di $\underline{\Gamma}$ è lineare potremo concludere che il fluido è newtoniano altrimenti no.

Capitolo 4

Strato limite

4.1 Formulazione del problema

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes adimensionale nel caso stazionario e trascurando la forza peso. Allora la (3.3) assume la forma:

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{u} \quad (4.1)$$

Viene quasi spontaneo chiedersi se all'aumentare della turbolenza del fluido (e quindi del numero di Reynolds) sia possibile trascurare $\nabla^2 \underline{u}$. In effetti se il Reynolds crescesse parecchio sarebbe comodo poter dire che l'ultimo termine della (4.1) tende a zero. In realtà non è così. Quando il fluido incontra un ostacolo, come si è visto nel paragrafo "fluido attorno ad un ostacolo", non si può semplicisticamente considerare l'equazione di Bernoulli, cosa che verrebbe fuori semplificando l'ultimo termine della (4.1), in quanto si scoprirebbe che la resistenza opposta dall'ostacolo sarebbe nulla. Nella realtà in prossimità della superficie dell'ostacolo si forma una zona detta viscosa dove gli attriti sono molto elevati e il flusso segue un'equazione detta dello "strato limite", mentre mano a mano che ci allontaniamo dalla superficie dell'ostacolo il flusso può essere trattato come non viscoso ed essere approssimato con l'equazione di Eulero. È molto importante che l'ultimo termine della (4.1) non venga trascurato nella zona viscosa in quanto non dobbiamo dimenticarci che alle equazioni di N-S vengono accoppiate delle condizioni da rispettare quali l'aderenza al bordo che non potrebbe essere soddisfatta senza la presenza del laplaciano. Per capire questo concetto importante è utile presentare un esempio molto semplice ma che rende l'idea. Consideriamo il seguente problema di

Cauchy:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 + 2\epsilon) \frac{du}{dx} + 2u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

con $\epsilon \in \mathfrak{R}$. Come per il laplaciano, se $\epsilon \rightarrow 0$, non si può togliere di mezzo la derivata seconda in quanto non si potrebbe più soddisfare le condizioni al bordo o almeno non entrambe. Ecco cosa succederebbe nel porre $\epsilon = 0$:

$$u' + 2u = 0$$

e se gli si fà soddisfare $u(1) = 0$ troviamo:

$$u(x) = e^{-2(x-1)}$$

la quale non ci pensa nemmeno ad annullarsi in 0 come richiederebbe l'altra condizione del problema di Cauchy. Questa soluzione tuttavia è utile in quanto allontanandoci dall'asse delle y gli effetti della condizione in $x = 0$ si faranno sentire meno, quindi può essere una buona approssimazione della soluzione reale per $x > 0$. Questa soluzione è detta infatti "soluzione esterna" (outer solution). Se riusciamo ora a trovare un'altra soluzione che rispetti la condizione in $x = 0$, messe insieme queste due soluzioni potrebbero costituire una valida approssimazione della soluzione reale $\forall x$. La tecnica usuale per trovare la soluzione approssimata in prossimità dell'asse delle y (analogamente per trovare la soluzione approssimata di N-S in prossimità della superficie dell'ostacolo), è quella di operare una dilatazione delle coordinate con un cambio di variabile del tipo:

$$\xi = \frac{x}{\delta(\epsilon)}$$

dove $\delta(\epsilon)$ è una particolare funzione tale che se $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(\epsilon) \rightarrow 0$. Nel nostro caso:

$$\delta(\epsilon) = \epsilon \Rightarrow \xi = \frac{x}{\epsilon} \Rightarrow u(x) = v(\xi)$$

da cui:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = \frac{d^2}{dx^2} v(\xi) = \frac{d}{dx} \frac{d}{d\xi} v(\xi) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dx} \frac{d}{d\xi} v(\xi) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{d^2}{d\xi^2} v(\xi)$$

per cui il problema (4.2) si trasforma in:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} v + (1 + 2\epsilon) \frac{dv}{d\xi} + 2\epsilon v = 0$$

e se $\epsilon \rightarrow 0$ si perviene a:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} v + \frac{d}{d\xi} v = 0$$

alla quale facciamo rispettare l'altra condizione del problema di Cauchy e cioè $v(0) = 0$ trovando quella che viene chiamata "inner solution":

$$v(\xi) = A(1 - e^{-\xi}) \quad (4.3)$$

Ponendo come abbiamo fatto $\epsilon \sim 0$ per trovare l'outer solution è ovvio che la $\xi \rightarrow \infty$. Prendiamo dunque la inner solution e ne facciamo il limite per $\xi \rightarrow \infty$ ponendolo uguale, per riallacciare le due soluzioni, al limite per $x \rightarrow 0$ della outer, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = e^2 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} v(\xi)$$

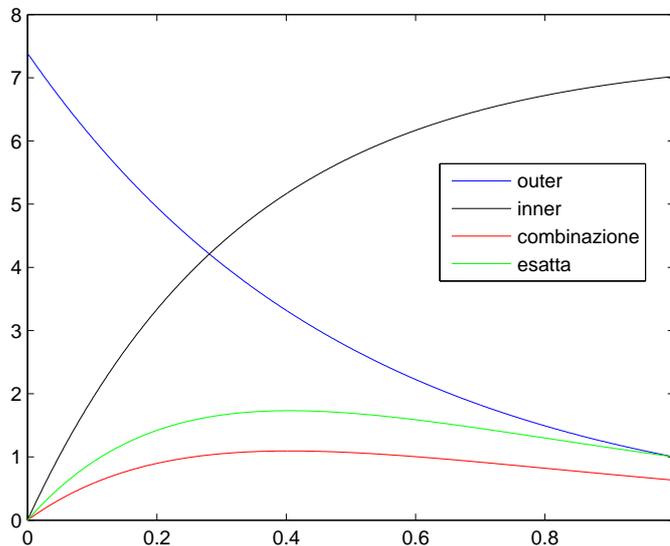
ricavando che $A = e^2$ da cui:

$$v(\xi) = e^2(1 - e^{-\xi})$$

La soluzione combinazione delle due è infine:

$$u(x) = e^{-2(x-1)} + e^2(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}) - e^2$$

bisogna sottrarre e^2 in quanto per $x \rightarrow 0$ questa soluzione deve tendere a e^2 .



Si riporta inoltre la soluzione esatta del problema (in questo caso è stato possibile calcolarla perchè era un'equazione semplice ma per N-S non è

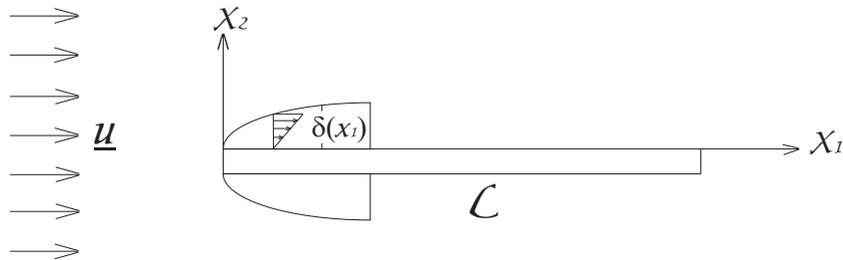
praticamente quasi mai possibile farlo):

$$u(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{e^{-2} - e^{-\frac{1}{\epsilon}}}$$

si dimostra che la famiglia delle soluzioni di quest'ultima converge uniformemente alla soluzione del problema esterno escludendo lo 0 mentre converge uniformemente alla soluzione del problema interno nell'intorno di 0.

4.2 Equazione dello strato limite

Abbiamo capito che in prossimità dell'ostacolo si ha una zona detta dello strato limite nel quale vale la inner solution. Si è intuito con un facile esempio come bisogna agire per trovare questa soluzione semplificata che è necessario trovare quando non siamo in grado di risolvere le N-S. Il nostro metodo si basava su una dilatazione di coordinate ed è proprio ciò che faremo per trovare l'equazione del campo di velocità nei pressi dell'ostacolo cioè l'equazione dello strato limite. Consideriamo allora un flusso bidimensionale in regime turbolento ($Re \gg 1$) e supponiamo di immergere in un flusso una lastra piana di lunghezza $L \gg \delta$ dove $\delta(x)$ rappresenta l'altezza dello strato limite e indichiamo con $\underline{u} = (u(x, y), v(x, y))$ il campo di velocità.



Operiamo questi cambi di variabile:

$$\begin{aligned} u &= U u^* ; x = L x^* ; y = \delta y^* \\ p &= \rho U^2 \rho^* ; v = V v^* ; t = \frac{L}{U} t^* \end{aligned}$$

dove con U e V si sono indicate le velocità medie rispettivamente lungo x e lungo y . Con questi cambi di coordinate si ha che:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dx} = \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{dy^*}{dy} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho U^2 \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dx} = \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\end{aligned}$$

Allora la N-S (in regime stazionario e trascurando le forze di massa) lungo l'asse x che è:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

diventa (moltiplicando ambo i membri per $\frac{L}{U^2}$):

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{VL\nu^*}{\delta U} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L\nu}{U\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (4.4)$$

mentre per l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

ma dovendo, i coefficienti delle derivate, essere comparabili si ha che:

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \Rightarrow V \sim \frac{U\delta}{L}$$

ma allora la (4.4) diventa:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L\nu}{U\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Facciamo ora alcune considerazioni. I termini predominanti nelle N-S sono $\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$ (termine convettivo che porta via vortici) e $\nabla^2 \underline{u}$ (termine diffusivo che crea vortici). Dovendo quindi essere dello stesso ordine ne consegue che:

$$\frac{\nu L}{U\delta^2} \sim 1 \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \sqrt{\frac{L^2}{Re}} \quad (4.5)$$

il coefficiente di $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ cioè $\frac{\nu}{UL}$ nonostante faccia parte del termine convettivo non potrà mai essere dell'ordine di 1 poichè la L al denominatore è $\gg 1$, ciò lo rende un termine molto piccolo ma può essere trascurato? la risposta è sì (qui viene alla luce il discorso fatto sull'equazione differenziale del secondo ordine presa come esempio precedentemente) perchè $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ non deve rispettare alcuna condizione al bordo! Ciò che vogliamo far rispettare è la condizione di non slittamento sulla lastra (e cioè in $y = 0$) la quale modificherà la soluzione nella variazione lungo y in quanto a un certo punto dovrà per forza di cose

tendere a zero. Ma lungo x non ho nessuna condizione. Applicando le stesse trasformazioni di coordinate a N-S lungo la componente y si scopre invece che il termine predominante è $\frac{\partial p^*}{\partial y^*}$ quindi per la N-S lungo y rimane soltanto:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \Rightarrow p^* = p^*(x)$$

In base a tutte queste considerazioni e ricordando la (4.5) si arriva a:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (4.6)$$

con le condizioni:

$$\begin{aligned} u &= v = 0 \text{ in } y = 0 \\ \text{e } u &= u_0 \text{ per } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

risolviamo l'equazione, nel caso in cui non vi siano gradienti di pressione, considerando la funzione di corrente (o di Stokes) $\psi(x, y)$ tale che $\underline{u} = (\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x})$ così la (4.6) diventa:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (4.7)$$

Questo problema apparentemente più complicato può essere risolto con una trasformazione invariante la quale riconduce l'equazione differenziale a derivate parziali in un'equazione a derivate ordinarie la cui soluzione è però solo una soluzione particolare del problema a derivate parziali. Tale trasformazione è nel nostro caso:

$$\psi(x, y) = f(\eta) x^{\frac{1}{2}} \text{ con } \eta = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$$

il problema di Cauchy per la (4.7) si trasforma quindi in:

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(+\infty) = u_0 \end{cases}$$

Questa è l'equazione di Blasius per lo strato limite che è risolvibile numericamente.

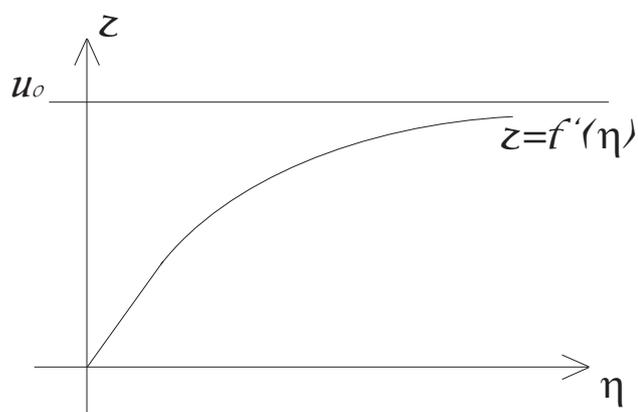


Figura 4.1: soluzione dell'equazione di Blasius

Capitolo 5

Teoria dell'elasticità

In questo capitolo analizzeremo il comportamento di continui particolari che hanno la proprietà di essere elastici. Per essere tali devono rispettare queste caratteristiche:

- il continuo nella fase di prestress e nella fase di poststress deve essere coincidente
- deve essere un sistema omogeneo (cioè in ogni punto deve avere il medesimo comportamento)
- deve essere isotropo (ciò che succede in una direzione deve accadere anche in tutte le altre)

Quando un continuo elastico viene sottoposto a stress tende a deformarsi in modo *finito* o in modo *infinitesimo*. nel secondo caso si ricerca una relazione lineare fra il tensore degli sforzi e il tensore delle deformazioni. Quest'ultimo però deve essere ancora definito ed è ciò che ci apprestiamo a fare nel seguito.

5.1 Misura della deformazione

detta \underline{x} la generica coordinata prima della deformazione e \underline{x}' la posizione dopo la deformazione, si definisce il vettore spostamento $d\underline{u} = d\underline{x}' - d\underline{x}$ che per la formula del differenziale da:

$$du_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$
$$\Rightarrow d\underline{x}'^2 = \sum_{i=1}^3 (dx_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 dx_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2 \\
&= (dl)^2 + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_k \right) \\
&= (dl)^2 + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_k \right) \\
&= (dl)^2 + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k \\
&\Rightarrow (dl')^2 = (dl)^2 + 2 \sum_{i,k} u_{ik} dx_i dx_k \tag{5.1}
\end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = u_{ik}$$

a cui si dà il nome di tensore delle deformazioni. Se \underline{u} è piccolo si riduce a:

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{5.2}$$

il quale è detto tensore di deformazione infinitesimo. Se consideriamo il tensore di deformazione nel riferimento principale, costituito quindi dai tre elementi posti sulla diagonale u_1 , u_2 , u_3 e 0 altrove, e andiamo a calcolarci l'allungamento lungo x_1 otteniamo dalla (5.1):

$$dx_1'^2 = dx_1^2 + 2u_1 dx_1^2 \Rightarrow dx_1' = \sqrt{1 + 2u_1} dx_1$$

ma se u è piccolo sviluppando in serie e troncando al primo termine abbiamo:

$$\sqrt{1 + 2u_1} \cong 1 + u_1 \Rightarrow dx_1' = (1 + u_1) dx_1$$

nelle altre due direzioni l'allungamento è analogo, ma allora possiamo calcolare la variazione di volume:

$$dV' = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) dV$$

ed eliminando i termini trascurabili si giunge a:

$$\begin{aligned}
dV' &= (1 + u_1 + u_2 + u_3) dV \\
\Rightarrow \text{traccia}(u) &= \frac{dV' - dV}{dV} \tag{5.3}
\end{aligned}$$

la (5.3) ci da quindi un'informazione importante e cioè che la variazione relativa del volume di un sistema continuo deformato è pari alla traccia del tensore di deformazione. In realtà questo non ci deve sorprendere in quanto in generale la variazione relativa non è altro che il determinante dello Jacobiano associato alla trasformazione il cui sviluppo di Taylor al primo ordine coincide proprio con la traccia di u .

5.2 Legame costitutivo

abbiamo dunque scoperto che la misura della deformazione (se è piccola) di un corpo elastico può essere espressa mediante un tensore detto delle piccole deformazioni che abbiamo indicato con e . Proseguendo con la costruzione del nostro modello dobbiamo dunque ipotizzare una forma di collegamento fra gli sforzi e la deformazione, ebbene tale collegamento si presume lineare. Ciò vuol dire che il tensore degli sforzi ed il tensore delle deformazioni saranno legati da un'altro tensore c secondo quest'equazione¹:

$$\sigma_{ij} = \sum_{h,k} C_{ij}^{hk} e_{kh}$$

o

$$\sigma = ce \quad (5.4)$$

dove c possiede 81 componenti indipendenti. Ora tralasciando la dimostrazione matematica possiamo asserire che se il continuo è isotropo allora gli assi principali di σ coincidono con gli assi principali di e , cosa peraltro abbastanza intuitiva infatti se attuo uno sforzo lungo una direzione principale non ho motivo di pensare che mi produca una deformazione lungo un'altra direzione principale, se a ciò si aggiunge la simmetria di c , si scopre che le uniche due componenti indipendenti sono due!, cioè:

$$\sigma_{ii} = \lambda \text{traccia}(e) + 2\mu e_{ii} \quad i = 1, 2, 3$$

ma sia la traccia sia un multiplo dell'identità sono invarianti (non cambiano cambiando il sistema di riferimento). Allora si ha:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{traccia}(e) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (5.5)$$

I due coefficienti λ e μ sono detti coefficienti di Lamè. Dalla (5.5) si deduce che $\text{traccia}(\sigma) = (3\lambda + 2\mu)\text{traccia}(e)$ e se $3\lambda + 2\mu \neq 0$ allora il legame è invertibile ottenendo:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \text{traccia}(\sigma)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \quad (5.6)$$

¹per questo paragrafo si sostituisce σ a τ

5.3 Equazioni di Navier

Consideriamo le equazioni indefinite all'equilibrio:

$$\operatorname{div}(\tau) + \underline{F} = 0$$

avendo indicato con \underline{F} le ρf . Ma ora noi conosciamo la forma del tensore τ espresso mediante la relazione (5.5). Non ci resta che sostituire e svolgere i calcoli:

$$(\operatorname{div}\tau)_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \operatorname{traccia}(e) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij})$$

ma ci si accorge facilmente che $\operatorname{traccia}(e) = \operatorname{div}(\underline{u}) = \nabla \cdot \underline{u} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ e quindi:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\tau)_i &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \lambda \sum_j \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \sum_j \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \end{aligned}$$

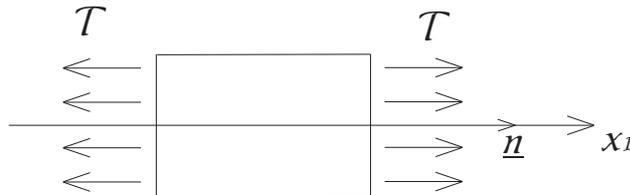
ma $\sum_j \delta_{ij} \sum_k f(k, j) = \sum_k f(k, i)$ allora:

$$\begin{aligned} &= \lambda \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ \Rightarrow \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \underline{u} + F_i &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

che sono le equazioni di Navier all'equilibrio al cui bordo si possono assegnare le forze o gli spostamenti.

5.4 Considerazioni sui coefficienti di Lamè

In genere vengono usati altri coefficienti, al posto di quelli di Lamè, per avere un chiaro significato fisico. Consideriamo un pezzo di trave disposto lungo x_1 tirato da ambedue gli estremi lungo x_1 con una forza costante T .



Per risolvere questi problemi in genere si impongono come condizioni al bordo lo spostamento su un lato e lo sforzo sull'altro (problema misto). Si applica il metodo semi inverso il quale consiste nell'ipotizzare una soluzione cercando di individuare il resto. Ipotizziamo dunque la forma del tensore τ nella seguente maniera:

$$\tau = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

con $T = \text{costante}$ agente lungo e_1 mentre nessuna forza agisce lungo e_2 . Si ipotizza che le forze di massa siano trascurabili (del tutto legittima se le tensioni sono molto maggiori di ρf). Poichè T è costante ne consegue che:

$$\text{div}(\tau) = 0 \Rightarrow F = 0$$

dalle equazioni indefinite all'equilibrio, la quale è una soluzione accettabile. Dalla (5.8), sfruttando la relazione (5.6) si ottiene che:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\lambda T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij}$$

da cui si ricava che:

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$$

ed

$$e_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T$$

ricavando due importanti costanti; il modulo di elasticità di Joung

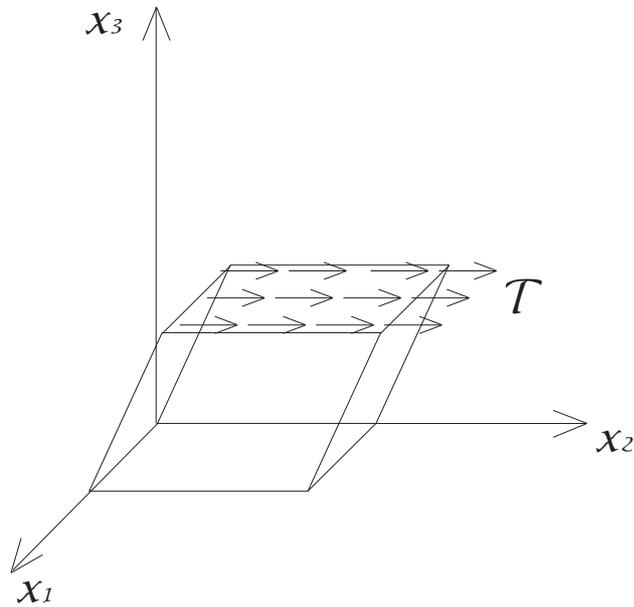
$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

ed il rapporto di Poisson

$$\sigma = \frac{e_{22}}{e_{11}} = \frac{e_{33}}{e_{11}} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

con $E > 0$ e $\sigma > 0$.

Vediamo ora un altro esperimento per capire cosa rappresenta a livello intuitivo il coefficiente di Lamè μ . Consideriamo un caso di shear puro cioè supponiamo che il tensore τ abbia gli elementi sulla diagonale nulli e per semplicità un solo elemento indipendente non nullo $\tau_{23} = \tau_{32} = T = \text{costante}$.



In tal caso, trascurando le forze di massa $div(\tau) = 0$ è ancora soluzione e il tensore e_{ij} da come unico contributo:

$$e_{23} = \frac{T}{2\mu}$$

$\mu > 0$ costituisce quindi un impedimento (al suo crescere) alla deformazione dovuta a stress di taglio e viene dunque detto modulo di rigidità.

Se immergiamo invece un continuo sferico nell'acqua ci accorgiamo che gli sforzi di taglio sono tutti nulli (all'equilibrio) per cui come sapevamo già il tensore degli sforzi assume la forma $\tau = -p\delta_{ij}$ da cui $traccia(\tau) = 3p$ ed $e_{11} = e_{22} = e_{33} = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}$ ed $e_{ij} = 0 \forall i \neq j$. La somma delle deformazioni è allora:

$$traccia(e) = -\frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{k}p$$

dove si è posto $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ detto modulo di compressione.

Capitolo 6

Applicazioni delle equazioni indefinite alla teoria delle deformazioni

In quest'ultimo capitolo affronteremo i problemi fisico matematici legati all'uso pratico della teoria delle deformazioni per i continui elastici senza tralasciare mai e anzi includendo sempre il rispetto delle equazioni cardinali della statica che per i continui diventano le equazioni indefinite all'equilibrio.

6.1 Cilindro sottoposto ad una coppia su un'estremità

consideriamo una sbarra cilindrica, di lunghezza l e raggio R , "incollata" ad una superficie piana sulla quale poniamo x_1, x_2 , due dei tre assi cartesiani che scegliamo come sistema di riferimento ed avente x_3 lungo l'asse del cilindro. All'altro estremo della sbarra imponiamo una rotazione lungo x_3 di un angolo α_l , ipotizziamo inoltre che le forze di massa siano trascurabili da cui consegue che:

$$\operatorname{div}(\tau) = 0$$

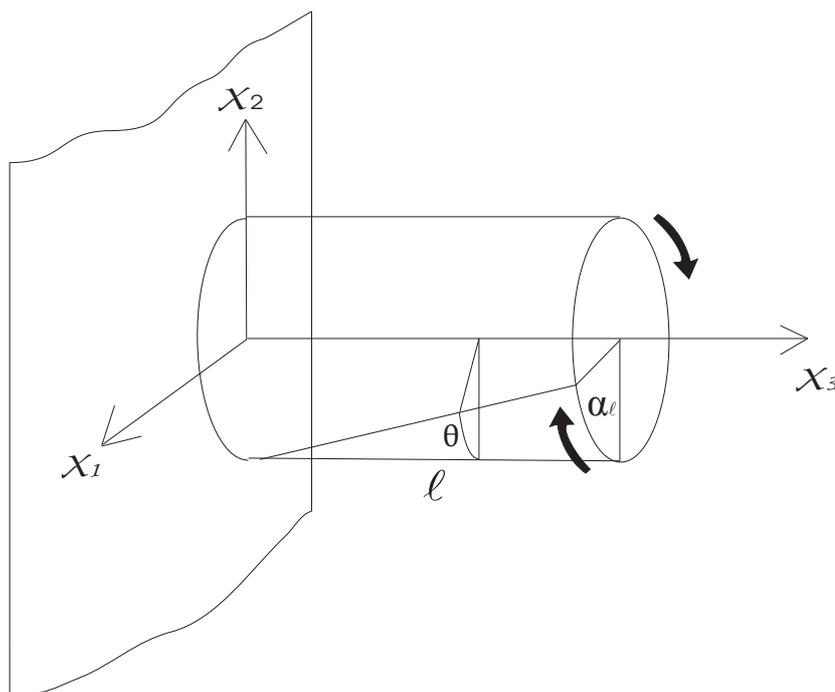
sulla superficie laterale non ci sono sforzi applicati, ne consegue che:

$$\tau \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sul bordo}$$

dove \underline{n} è la normale esterna alla superficie laterale del cilindro. Cerchiamo ora di immaginare cosa può succedere. Il buon senso ci farà pensare che ogni sezione $x_3 = \text{costante}$ ruoti di un angolo θ , inoltre non abbiamo motivo di pensare

che tale generico angolo non segua una legge lineare quindi presupponiamo una legge che legghi θ con α_l del tipo:

$$\frac{\theta}{x_3} = \frac{\alpha_l}{l} = \alpha \quad (6.1)$$



Bisogna sottolineare, e non è cosa di poco conto come si vedrà in un esempio successivo, che con queste ipotesi escludiamo la possibilità che si abbia una deformazione lungo x_3 . Operiamo un taglio immaginario del cilindro ad una generica sezione $x_3 = \text{costante}$, allora le coordinate di un generico punto prima della deformazione saranno:

$$P_1 = (x_1, x_2) = (r \cos(\beta), r \sin(\beta)) \quad 0 < r \leq R$$

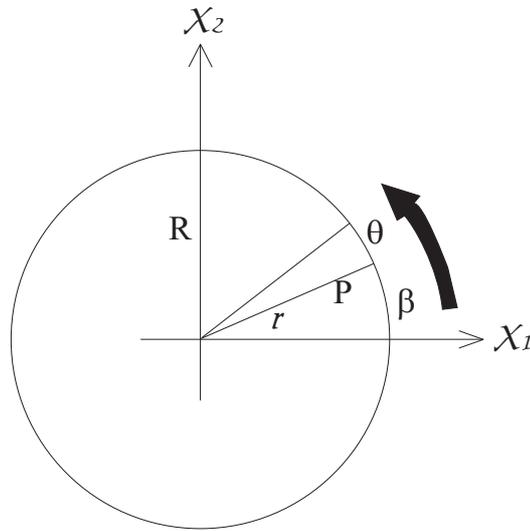
e dopo la deformazione di un angolo θ :

$$P_2 = (r \cos(\beta + \theta), r \sin(\beta + \theta)) \quad 0 < r \leq R$$

per cui la deformazione sarà:

$$\underline{u} = (P_2 - P_1) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = r[\cos(\beta + \theta) - \cos(\beta)] \\ u_2 = r[\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)] \end{cases}$$

6.1. CILINDRO SOTTOPOSTO AD UNA COPPIA SU UN'ESTREMITÀ 45



e sviluppando i calcoli si ha:

$$u_1 = r \cos(\beta) \cos(\theta) - r \sin(\beta) \sin(\theta) - r \cos(\beta) = x_1 [\cos(\theta) - 1] - x_2 \sin(\theta)$$

$$u_2 = r \sin(\beta) \cos(\theta) + r \cos(\beta) \sin(\theta) - r \sin(\beta) = x_2 [\cos(\theta) - 1] + x_1 \sin(\theta)$$

poichè θ è un angolo piccolo (siamo nell'approssimazione lineare delle deformazioni infinitesime) si ha:

$$\cos(\theta) \sim 1$$

$$\sin(\theta) \sim \theta$$

e quindi sfruttando la (6.1) otteniamo:

$$u_1 \sim -\theta x_2 = -\alpha x_2 x_3$$

$$u_2 \sim \theta x_1 = \alpha x_1 x_3$$

ed il tensore e risulta dunque:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha x_1 \\ -\frac{1}{2}\alpha x_2 & \frac{1}{2}\alpha x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

e dalla relazione inversa troviamo:

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \mu x_2 \\ 0 & 0 & \alpha \mu x_1 \\ -\alpha \mu x_2 & \alpha \mu x_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}(\tau) = \underline{0} \quad (6.3)$$

che conferma quanto detto all'inizio. Ricordiamoci inoltre che avevamo supposto nulle le forze agenti sulla superficie laterale esterna del cilindro, difatti presa $\underline{n} = \frac{1}{R}(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ si ha, per il teorema di Cauchy:

$$\underline{\Phi} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha\mu x_2 \\ 0 & 0 & \alpha\mu x_1 \\ -\alpha\mu x_2 & \alpha\mu x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

sulle basi del cilindro dovrà, coerentemente, agire una forza (altrimenti il cilindro non ruota!) e infatti detta $\underline{n} \equiv \underline{x}_3$ la normale agente sulle basi si trova:

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha\mu x_2 \\ 0 & 0 & \alpha\mu x_1 \\ -\alpha\mu x_2 & \alpha\mu x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\mu x_2 \\ \alpha\mu x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

anche il momento sulle basi è ovviamente diverso da zero e vale:

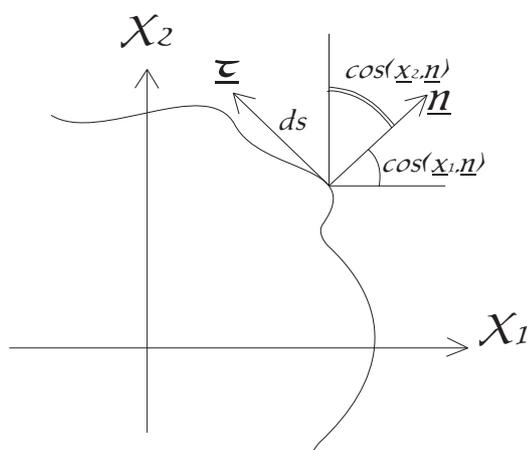
$$\int_{base} \underline{x} \wedge \underline{\Phi} dx_1 dx_2 = \mu\alpha \frac{\pi R^4}{2}$$

La coppia torcente agente sulla base non agirà in maniera uniforme, come si modella matematicamente, ma per fortuna secondo il principio di Saint Venant posso spostarmi dalla base fin tanto che gli effetti "non ideali" diventano trascurabili, in altre parole posso prendere il sistema più comodo.

6.2 Sbarra di sezione generica

Se invece di una sbarra a sezione circolare prendiamo una a sezione generica si scopre che con le ipotesi che avevamo fatto per le deformazioni ci troviamo in contrasto. In particolare, detta $\underline{n} = (\cos(x_1, \underline{n}), \cos(x_2, \underline{n}))$ la normale esterna alla superficie laterale del cilindroide, se utilizziamo lo stesso tensore degli sforzi τ usato nell'esercizio precedente e imponiamo che la forza agente sulla superficie laterale sia nulla (cosa che abbiamo visto essere vera nella sbarra a sezione circolare) otteniamo:

$$\begin{aligned} \tau \cdot \underline{n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha\mu x_2 \\ 0 & 0 & \alpha\mu x_1 \\ -\alpha\mu x_2 & \alpha\mu x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x_1, \underline{n}) \\ \cos(x_2, \underline{n}) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\mu\alpha x_2 \cos(x_1, \underline{n}) + \mu\alpha x_1 \cos(x_2, \underline{n}) = 0 \end{aligned}$$



Osservando la figura si nota però che, detta ds la variazione lungo il versore tangente, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{ds} &= -\cos(\underline{x}_2, \underline{n}) \\ \frac{dx_2}{ds} &= \cos(\underline{x}_1, \underline{n})\end{aligned}$$

e quindi sostituendo e semplificando troviamo:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

che è una banale equazione differenziale la cui soluzione è una circonferenza, e non può essere altrimenti. Ecco quindi l'intoppo, se vogliamo che si rispetti la condizione che sulla superficie laterale del cilindroide le forze agenti siano nulle, allora dobbiamo modificare il vettore deformazione \underline{u} . La domanda è ora, come modificarlo? Ebbene si mantengono le due componenti precedenti ma se ne aggiunge anche una lungo x_3 funzione di x_1 e x_2 , cioè in definitiva:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 x_3 \\ \alpha x_1 x_3 \\ \alpha \varphi(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

ancora una volta $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0$ mentre

$$\begin{aligned}e_{23} &= \frac{\alpha}{2} \left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \\ e_{13} &= \frac{\alpha}{2} \left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)\end{aligned}$$

e dovendo rispettare $\tau \cdot \underline{n} = 0$ perchè al solito sulla superficie esterna non agiscono forze troviamo:

$$\begin{aligned} & (-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1})\cos(\underline{x}_1, \underline{n}) + (x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2})\cos(\underline{x}_2, \underline{n}) = 0 \\ \Rightarrow & (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}) \cdot (\cos(\underline{x}_1, \underline{n}), \cos(\underline{x}_2, \underline{n})) = x_2\cos(\underline{x}_1, \underline{n}) - x_1\cos(\underline{x}_2, \underline{n}) \\ \Rightarrow & \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = x_2\cos(\underline{x}_1, \underline{n}) - x_1\cos(\underline{x}_2, \underline{n}) \quad \text{sul bordo} \end{aligned}$$

ricordando che abbiamo supposto le forze di massa nulle, dall'equazione indefinita all'equilibrio otteniamo $div(\tau) = \nabla^2\varphi = 0$, detta quindi D la sezione generica del cilindroide dobbiamo risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0, & \text{su } D \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (x_2\underline{e}_1 - x_1\underline{e}_2) \cdot \underline{n} = g(x_1, x_2) & \text{su } \partial D \end{cases} \quad (6.4)$$

detto problema di Neumann per il laplaciano. Se il problema ha soluzione ammette infinite soluzioni poichè è definita a meno di una costante arbitraria dovuta all'integrazione che rappresenta nient'altro che un moto rigido. Si ha soluzione solo se:

$$\int_{\partial D} g(x_1, x_2) ds = 0 \quad (6.5)$$

la dimostrazione è banale infatti:

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi = 0 & \Rightarrow \int_D \nabla^2\varphi dx_1 dx_2 = 0 \Rightarrow \int_D div \nabla\varphi dx_1 dx_2 = 0 \\ & \Rightarrow \int_{\partial D} \nabla\varphi \cdot \underline{n} ds = \int_{\partial D} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 0 \end{aligned}$$

da cui la tesi. Andiamo dunque a verificare se la condizione (6.5) è rispettata. Notiamo innanzitutto che:

$$(x_2\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2) \cdot \underline{n} = (x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) \cdot \underline{t}$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\int_{\partial D} g(x_1, x_2) ds = \int_{\partial D} (x_2\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2) \cdot \underline{n} ds = \int_{\partial D} (x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) \cdot \underline{t} ds = 0$$

ma l'ultimo integrale non è altro che la circuitazione del campo vettoriale $x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$. È noto che la circuitazione di $x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ nulla equivale a dire che il campo è conservativo cioè ammette un potenziale, ma:

$$\int_{\partial D} g(x_1, x_2) ds = \int_{\partial D} \nabla \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \cdot \underline{t} ds$$

esiste quindi un potenziale per $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, allora il campo è conservativo, la circuitazione è nulla e la (6.5) è rispettata. Abbiamo verificato la condizione "solo se" che è necessaria per l'esistenza della soluzione ma a noi ci piacerebbe essere sicuri di avere una soluzione unica. Cerchiamo quindi di aggirare il problema modificando la (6.4). Consideriamo la funzione armonica coniugata ψ , della φ legata a quest'ultima dalle Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases}$$

e quindi sfruttando quest'ultime

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \underline{n} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \right) \cdot \underline{n} = \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \right) \cdot \underline{n} = \\ &= \nabla \psi \cdot \underline{t} \end{aligned}$$

ma noi sappiamo anche che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \cdot \underline{t}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \underline{t} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \cdot \underline{t} \\ \Rightarrow \nabla \psi &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \\ \Rightarrow \psi &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

inoltre sappiamo che una funzione complessa di variabile complessa che è analitica (cioè valgono le Cauchy-Riemann) è costituita da due funzioni φ e ψ la prima delle quali è la parte reale e la seconda la parte complessa della funzione ma entrambe (si dimostra facilmente derivando le Cauchy-Riemann) sono armoniche, quindi anche per la ψ il problema si trasforma in maniera analoga

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 & \text{su } D \\ \psi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) & \text{su } \partial D \end{cases} \quad (6.6)$$

questo problema (di Dirichlet) tuttavia è preferibile rispetto a quello per la φ poichè ammette una soluzione unica. Per procedere bisogna però prima sfruttare un teorema che va sotto il nome di principio di massimo che andiamo nel seguito a dimostrare.

6.3 Principio di massimo

Sia D un insieme aperto e limitato di \mathbb{R}^n ; sia $\psi \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ una funzione armonica in D . Indichiamo con m, M rispettivamente il minimo ed il massimo assunto da ψ sulla frontiera ∂D , allora¹:

$$m \leq \psi \leq M \quad \forall x \in \bar{D} \quad (6.7)$$

Dimostrazione:

per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo:

$$v_\varepsilon(x) = \psi(x) + \varepsilon|x|^2$$

la v_ε è di classe $C^0(\bar{D}) \cap C^2(\Omega)$ e per ogni $x \in D$, risulta:

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_\varepsilon &= \nabla^2 \psi + \varepsilon \nabla^2 |x|^2 = \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 2n\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

ora le condizioni necessarie per le quali una funzione abbia un massimo relativo in un insieme D sono che il laplaciano sia minore uguale di zero, quindi nel nostro caso non è possibile che la v_ε ammetta un massimo relativo in D . Quindi il massimo assoluto, esistente per il teorema di Weierstrass, sarà assunto sul bordo di D . Inoltre dato che D è limitato esiste un $R > 0$ tale che $R \geq |x| \quad \forall x \in \bar{D}$ e quindi:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &\leq \max\{\psi(x) + \varepsilon|x|^2 : x \in D\} \leq \\ &\leq \max\{\psi(x) + \varepsilon R^2 : x \in D\} = M + \varepsilon R^2 \end{aligned}$$

cioè:

$$\psi(x) + \varepsilon|x|^2 \leq M + \varepsilon R^2 \quad \forall x \in \bar{D} \quad (6.8)$$

e al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si trova $\psi(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{D}$. Considerando la funzione $w_\varepsilon(x) = \psi(x) - \varepsilon|x|^2$ si dimostra l'altra disuguaglianza.

Grazie a questo principio si riesce a dimostrare l'unicità della soluzione per il problema di Dirichlet infatti supponiamo per assurdo che esistano due funzioni ψ_1 e ψ_2 che soddisfano il problema (6.6), allora detta $w = \psi_1 - \psi_2$ si ha:

$$\nabla^2 w = 0$$

¹con \bar{D} si indica la chiusura di D cioè $D \cup \partial D$

ed al bordo vale

$$w = \psi_1 - \psi_2 = \psi - \psi = 0$$

ma per il principio di massimo

$$m \leq w(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{D}$$

ove $m = \min\{w(x) : x \in \partial D\}$ ed $M = \max\{w(x) : x \in \partial D\}$ per cui w è costantemente nulla cioè:

$$w = 0 = \psi_1 - \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$$

quindi le due soluzioni devono essere necessariamente coincidenti.

6.4 Risoluzione del problema di Dirichlet

torniamo al problema (6.6)

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 & \text{su } D \\ \psi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) & \text{su } \partial D \end{cases}$$

abbiamo dimostrato l'esistenza e l'unicità, è giunto il momento di trovare la soluzione. La ricerca di quest'ultima non è difficile se si pensa alla forma di una funzione armonica. Ipotizziamo una soluzione del tipo:

$$\psi(x_1, x_2) = c^2(x_1^2 + x_2^2) + k^2 \quad c, k \in R$$

determiniamo le due costanti imponendo l'uguaglianza della funzione con il valore che deve assumere sul bordo:

$$c^2(x_1^2 + x_2^2) + k^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

e se $c^2 < \frac{1}{2}$, posto

$$a = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} - c^2}} \text{ e } b = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2} + c^2}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

otteniamo quindi una sbarra a sezione ellittica. Se invece consideriamo una soluzione del tipo:

$$\psi(x_1, x_2) = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^3 = c(x_1^3 - 3x_1x_2^2) + k$$

imponendo al solito l'uguaglianza con la funzione sul bordo e ponendo inoltre

$$c = -\frac{1}{6a} \quad a > 0 \quad k = \frac{2a^2}{3}$$

ottenendo infine:

$$(x_1 - a)(x_1 - x_2\sqrt{3} + 2a)(x_1 + x_2\sqrt{3} + 2a) = 0$$

i singoli fattori eguagliati a zero danno tre equazioni di rette la cui intersezione da origine ad una barra a sezione di triangolo equilatero.

6.5 Sbarra a sezione rettangolare

Il metodo che abbiamo usato per risolvere il problema di Dirichlet non è sempre valido, infatti se prendiamo una sezione di tipo rettangolare si vede subito che la $\psi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ calcolata sul bordo non soddisfa l'equazione di Laplace (in altre parole non è armonica). Più precisamente fissiamo un sistema di assi coordinati con origine nel baricentro del rettangolo di lati a e b . Allora il bordo si esprime come:

$$\partial D = \{x_1 = \pm \frac{a}{2}\} \cup \{x_2 = \pm \frac{b}{2}\}$$

e quindi

$$\psi(x_1, \pm \frac{b}{2}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{b^2}{4}) \quad \psi(\pm \frac{a}{2}, x_2) = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} + x_2^2)$$

da cui

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{b^2}{4})] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} + x_2^2)] = 2$$

non si può certo trovare una funzione che sia armonica dentro e non sul bordo! Bisogna insomma cercare un altro tipo di procedura di risoluzione. Prima di tutto operiamo una sostituzione:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 1 = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + 1 \quad (6.9)$$

ovviamente anche la f è armonica (il laplaciano è invariante alle traslazioni), infatti:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \psi + 1) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \psi + 1) = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0$$

una volta nota la f si può risalire facilmente alla ψ . Il problema da risolvere è:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \nabla^2 f = 0 \\ f(\pm \frac{a}{2}, x_2) = 0 \\ f(x_1, \pm \frac{b}{2}) = 2 \end{cases} \quad (6.10)$$

si ricerca una f del tipo²:

$$f = X(x)Y(y)$$

per cui:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= X''Y + XY'' = 0 \\ \Rightarrow \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = \lambda \end{aligned}$$

perchè due funzioni indipendenti di variabile indipendente sono uguali se e solo se sono costanti. Studiando il problema per la X risulta:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(-\frac{a}{2}) = X(\frac{a}{2}) = 0 \end{cases}$$

se $\lambda = \mu^2 > 0$ si ha

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

ma imponendo le condizioni al bordo si scopre che l'unica soluzione possibile dà $C_1 = C_2 = 0$. Se invece si pone $\lambda = -\mu^2 < 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) \quad \text{con} \\ X(-\frac{a}{2}) &= C_1 \cos(-\mu \frac{a}{2}) + C_2 \sin(-\mu \frac{a}{2}) = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$X(\frac{a}{2}) = C_1 \cos(\mu \frac{a}{2}) + C_2 \sin(\mu \frac{a}{2}) = 0 \quad (6.12)$$

e sottraendo la (6.11) con la (6.12) abbiamo

$$C_2 \sin(\mu \frac{a}{2}) = 0$$

da cui $C_2 = 0$, mentre sommando la (6.11) con la (6.12) si giunge a

$$C_1 \cos(\mu \frac{a}{2}) = 0$$

²per non appesantire la scrittura si pone y al posto di x_2

che si annulla o ponendo anche $C_1 = 0$, ma in tal caso avremmo di nuovo la soluzione nulla, oppure scegliendo

$$\mu = \frac{\pi(2n+1)}{a} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

che infatti annulla il coseno in $\frac{a}{2}$ e $-\frac{a}{2}$. Quindi in definitiva

$$X_n(x) = \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}x\right]$$

dove ormai si è visto che la costante C_1 non ha alcuna importanza. Per la Y il problema è

$$\begin{cases} Y'' - \mu^2 Y = 0 \\ Y(\frac{b}{2}) = 2 \\ Y(-\frac{b}{2}) = 2 \end{cases}$$

quindi bisogna ricercare una funzione pari. Con un procedimento simile al precedente troviamo:

$$Y_n(y) = \cosh\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}y\right]$$

essendo la natura del problema lineare, si possono sommare tutte le soluzioni quindi

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cosh\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}y\right] \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}x\right] \quad (6.13)$$

e con le condizioni al bordo che rimangono

$$f(x, \frac{b}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cosh\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a}b\right] \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}x\right] = 2$$

da cui posto

$$\begin{aligned} A_n &= C_n \cosh\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a}b\right] \quad \text{si ricava} \\ A_n &= \frac{a}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2 \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}x\right] dx \end{aligned}$$

quest'ultimo metodo per ricavare la costante C_n ma anche tutto il procedimento precedente viene detto metodo della separazione delle variabili la cui spiegazione esula dal programma di questo corso. Si ricorda solo che per trovare la ψ bisogna integrare due volte la serie che quindi deve essere convergente. Per fortuna si dimostra che è convergente tranne gli angoli sui quali, se si va a rappresentare, oscilla vistosamente.