

Università degli Studi di FIRENZE
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Facoltà di INGEGNERIA

APPENDICE

**Sommario di Calcolo Differenziale
e Integrale**

Dipartimento di Matematica Applicata "G.Sansone"
Anno Accademico 2005-06

DIFFERENZIABILITÀ E GLI OPERATORI: GRAD, DIV, ROT

PRELIMINARI SULLE FUNZIONI

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, una funzione scalare (a valori reali) definita in un insieme aperto D di \mathbb{R}^n . Per semplicità fissiamo l'attenzione ad $n = 3$, ricordando che tutto si può generalizzare a più dimensioni.

Ricordiamo la definizione di **derivata parziale**. Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di D , la derivata parziale di f in P_0 rispetto alla variabile x è il limite (se esiste finito)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

ed analogamente si definisce $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Ricordiamo anche la definizione di **derivata direzionale** della funzione f nel punto P_0 **nella direzione** \mathbf{v} , \mathbf{v} è un versore, come il limite (se esiste finito)

$$D_{\mathbf{v}}f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\mathbf{v}) - f(P_0)}{t}.$$

Supponiamo che la funzione $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ammetta tutte le derivate parziali nel punto P_0 , il vettore le cui componenti sono le derivate parziali della f in P_0 , è per definizione il **gradiente** della funzione f

$$\text{grad } f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right).$$

È noto dall'analisi che l'esistenza delle derivate parziali non implica la differenziabilità della funzione f in P_0 , che è legata all'idea di potere approssimare l'incremento della funzione con una funzione lineare dell'incremento stesso.

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D insieme aperto, f è **differenziabile** in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, se esiste un **operatore lineare** $\mathbb{L}_{P_0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(P_0 + h) - f(P_0) = \mathbb{L}_{P_0}h + o(\|h\|), \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0, \quad (1)$$

per ogni (incremento) $h \in \mathbb{R}^3$ con $P_0 + h \in D$. Il simbolo $o(\|h\|)$ significa che il resto è infinitesimo di ordine superiore ad $\|h\|$ per $\|h\| \rightarrow 0$. La (1) si può scrivere pure con $o(\|h\|) = \|h\| o(1)$, dove $o(1)$ è un infinitesimo rispetto ad $\|h\|$.

L'operatore \mathbb{L}_{P_0} è lineare nella variabile h e dipende dal punto P_0 , l'algebra lineare insegna a rappresentare un'applicazione lineare da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} tramite il prodotto scalare per un opportuno elemento di \mathbb{R}^3 . Nel nostro caso il vettore che rappresenta l'operatore \mathbb{L}_{P_0} quando opera su h è proprio il vettore gradiente e tale rappresentazione viene effettuata tramite il prodotto scalare. Quindi $\mathbb{L}_{P_0}h$ si può rappresentare esplicitamente come

$$\mathbb{L}_{P_0} h = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)h_3,$$

dove $h = (h_1, h_2, h_3)$. Quindi la definizione di differenziabilità prende la forma

$$f(P_0 + h) - f(P_0) = \text{grad } f(P_0) \cdot h + o(\|h\|), \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0,$$

per ogni (incremento) $h \in \mathbb{R}^3$ con $P_0 + h \in D$, dove \cdot indica il prodotto scalare. L'applicazione $h \rightarrow \mathbb{L}_{P_0} h = \text{grad } f(P_0) \cdot h$ viene chiamata usualmente **differenziale** di f in P_0 e viene indicata col simbolo $df(P_0)$. Se identifichiamo $h_1 = dx$, $h_2 = dy$, $h_3 = dz$, si ha la nota espressione del differenziale in termini degli incrementi (infinitesimi) dx, dy, dz

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Abbiamo omesso la dipendenza dal punto P_0 , pensando che tali formule possono essere derivate per ogni altro punto $P \in D$ dove la funzione f è differenziabile. Si può scrivere anche

$$df = \text{grad } f \cdot dP, \quad dP = (dx, dy, dz).$$

Note. Lasciamo al lettore di approfondire il seguente fatto. L'applicazione lineare \mathbb{L}_{P_0} può essere vista come un elemento dello spazio duale di \mathbb{R}^3 , denotato usualmente con \mathbb{R}^{3*} . L'isomorfismo canonico fra \mathbb{R}^3 ed il suo duale \mathbb{R}^{3*} permette di identificare gli elementi del duale con i vettori di \mathbb{R}^3 , quindi il gradiente di f è proprio la rappresentazione dell'operatore lineare \mathbb{L}_{P_0} tramite l'isomorfismo canonico fra lo spazio \mathbb{R}^3 ed il suo duale (vedi Complementi).

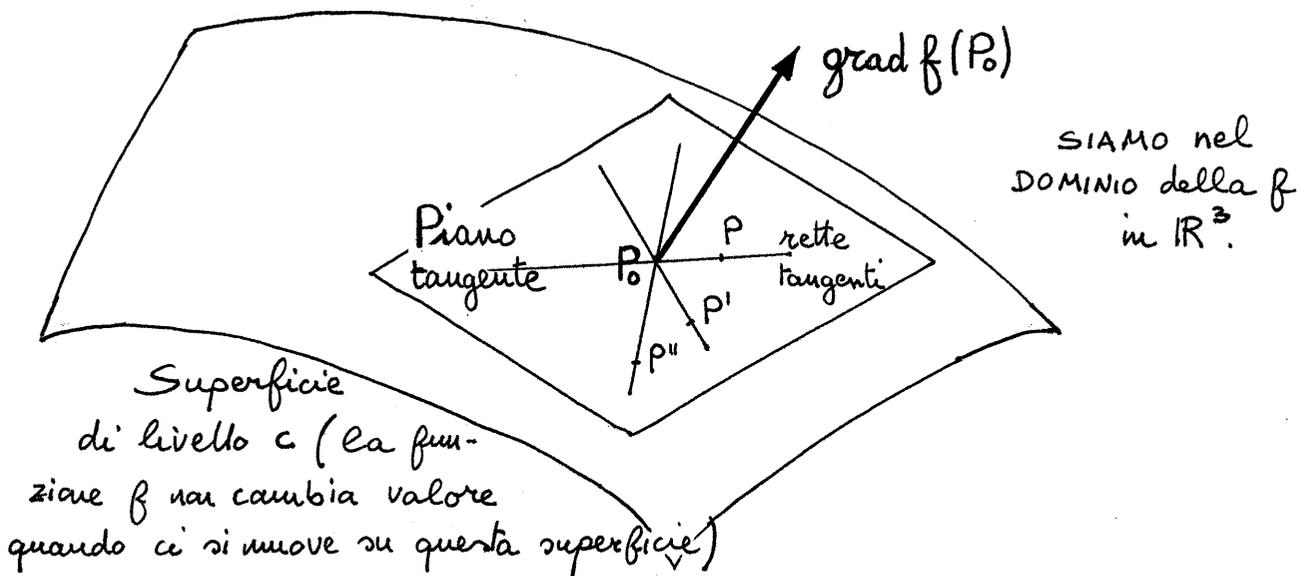
Lasciamo al lettore di scrivere l'incremento $f(P_0 + h) - f(P_0)$, per una qualche fissata funzione f , al fine di isolarne la parte lineare e di verificare se la parte rimanente (d'ordine superiore al primo) tende a zero per $\|h\|$ tendente a zero.

Dopo aver introdotto il gradiente la derivata direzionale assume la forma

$$D_v f(P_0) = \text{grad } f(P_0) \cdot v,$$

cioè la derivata nella direzione v è data dal prodotto scalare del gradiente per il versore della direzione stessa, (ammesso che f sia differenziabile in P_0).

Vediamo il significato grafico di questi concetti per $n = 2$. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sufficientemente liscia (per esempio di classe $C^2(D)$), disegniamone il grafico in \mathbb{R}^3 .



Il piano tangente in $(P_0, f(P_0))$ alla superficie $z = f(x, y)$ è la rappresentazione grafica

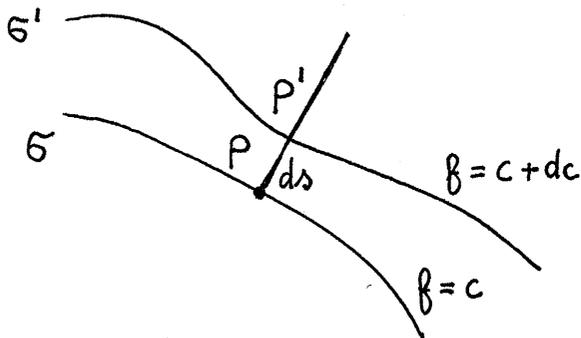
dell'applicazione lineare, che approssima la f nell'intorno di P_0 .

SIGNIFICATO DEL GRADIENTE

Data la funzione $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D un insieme aperto di \mathbb{R}^3 , sufficientemente liscia, ad esempio di classe $C^2(D)$; una tale funzione è detta anche **campo scalare**. Dopo aver scelto un sistema di riferimento cartesiano, di versori i, j, k , vogliamo precisare il significato del gradiente, caratterizzando e giustificandone il nome:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k.$$

Definiamo innanzitutto una superficie di livello $f = c$ (costante) e consideriamo due superfici di livello infinitamente vicine $\sigma: f = c$ e $\sigma': f = c + dc$.



Sia P un punto appartenente alla superficie σ e dP uno spostamento infinitesimo sulla superficie σ . Ovviamente

$$df = \text{grad} f \cdot dP,$$

ma poiché dP è tangente alla superficie, allora non c'è variazione di f , cioè $df = 0$, quindi $\text{grad} f \cdot dP = 0$. In conclusione

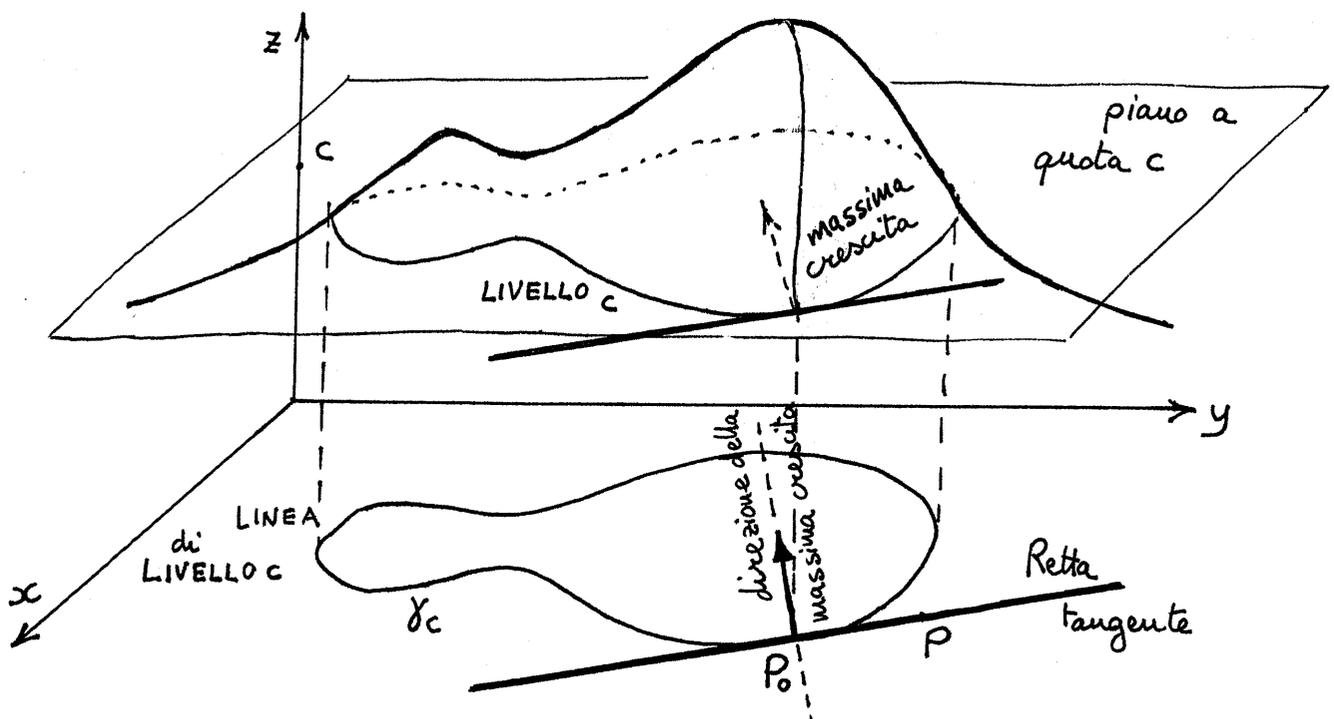
$$\text{grad} f \perp dP,$$

ovvero il $\text{grad} f$ in un punto P del campo ha direzione normale alla superficie di livello passante per quel punto.

Sia dP un spostamento da σ a σ' cioè verso i valori crescenti della f . Allora

$$df = dc = \text{grad} f \cdot dP > 0,$$

ovvero l'angolo formato con la direzione dello spostamento dP è minore di $\frac{\pi}{2}$, il $\text{grad} f$ ha quindi il verso rivolto verso la parte dove la funzione f cresce.



Infine consideriamo uno spostamento dP' normale alla superficie σ e diretto verso σ' di modulo $|dP'| = ds$, si ha $df = \text{grad } f \cdot dP'$, ed essendo dP' parallelo al $\text{grad } f$

$$dc = |df| = |\text{grad } f \cdot dP'| = |\text{grad } f| \cdot ds .$$

Quindi

$$|\text{grad } f| = \frac{dc}{ds} ,$$

in altre parole il modulo del $\text{grad } f$ è direttamente proporzionale all'incremento dc della funzione f ed inversamente proporzionale alla distanza fra σ e σ' .

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D un insieme aperto di $\mathbb{R}^2: (x, y) \rightarrow f(x, y)$. Sia f tale da ammettere γ_c come curva di livello c , $\gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = c\}$. Sia $P_0 \in \gamma_c$ e sia f differenziabile in P_0 con $|\text{grad } f(P_0)| \neq 0$. Cerchiamo la retta tangente alla linea di livello in P_0 . Sia P un punto generico di tale retta, la derivata direzionale della f in P_0 nella direzione di $v = P - P_0$ sarà zero, ovvero la tangente al grafico in $(P_0, f(P_0))$ sarà orizzontale, quindi

$$\text{grad } f(P_0) \cdot (P - P_0) = 0,$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right) \cdot (y - y_0) = 0. \quad (2)$$

Si noti dalla figura che i punti (x, y) dell'equazione (2) sono quelli della retta tangente in P_0 alla linea di livello. Il vettore $\text{grad } f(P_0)$ è un vettore del piano \mathbb{R}^2 , dove sta la linea di livello (nel dominio della funzione) ed ortogonale alla retta tangente alla linea di livello nel piano. **Non si commetta l'errore di pensare il gradiente ortogonale alla retta tangente al grafico o al grafico stesso.** Si noti infine che il gradiente punta verso la porzione di piano dove la funzione è crescente. Più precisamente il gradiente gode della proprietà che la massima variazione della funzione si ha nella direzione del gradiente, la minima variazione della funzione si ha nella direzione opposta a quella del gradiente.

L'OPERATORE NABLA ∇

È utile introdurre il vettore simbolico o operatore simbolico ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

∇ opera formalmente su una funzione scalare f , col risultato formale di ottenere in coordinate cartesiane il gradiente di f

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

∇ è uno strumento simbolico utile nella differenziazione dei campi scalari, **che rappresenta il gradiente in coordinate cartesiane.** (Vedi Nota al termine del paragrafo). Nell'usuale sistema di riferimento cartesiano, di versori i, j, k , useremo il vettore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k ,$$

come se lo fosse a tutti gli effetti.

Vediamone ora i vantaggi formali. Si consideri un campo vettoriale $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, $F = (A, B, C)$ definito dalle componenti scalari

$$A: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \rightarrow A(x, y, z)$$

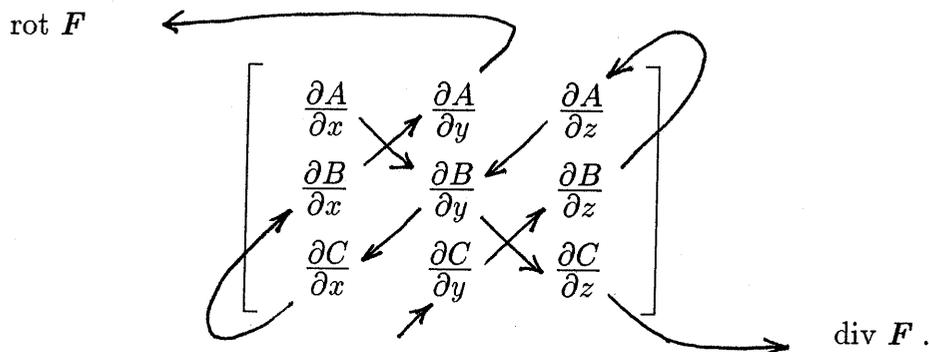
$$B: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \rightarrow B(x, y, z)$$

$$C: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)$$

che supponiamo di classe $C^2(\Omega)$. Possiamo associare al campo vettoriale F la matrice delle derivate parziali, le cui righe sono date dalle derivate parziali di ciascuna componente

$$\mathbb{J}F(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

È facile riconoscere negli elementi della matrice \mathbb{J} che si trovano sulla diagonale principale quelli che definiscono la **divergenza del campo vettoriale F** . Mentre gli elementi fuori della diagonale di \mathbb{J} contribuiscono a formare le componenti del **rotore di F** .



La divergenza del campo vettoriale è definita come la traccia della matrice \mathbb{J} . Formalmente si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

e quindi

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Il rotore è definito formalmente da

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Conviene ricordare la regola mnemonica

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix},$$

che usa il determinante simbolico per scrivere le componenti del prodotto vettoriale.

Ricordiamo alcune proprietà del gradiente, divergenza e rotore, che si ricavano facilmente usando in modo simbolico le regole del calcolo vettoriale:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} f &= \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{F} = 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \nabla \wedge \nabla f = 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f, \end{aligned}$$

dove

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

è detto **operatore di Laplace o Laplaciano**.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F},$$

dove, in coordinate cartesiane, $\Delta \mathbf{F} = \Delta A \mathbf{i} + \Delta B \mathbf{j} + \Delta C \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (f \mathbf{F}) &= f \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot} (f \mathbf{F}) &= \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{F} + f \operatorname{rot} \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

NOTA. Il gradiente è un concetto che può essere introdotto senza fare uso di coordinate (in modo intrinseco). ∇f è definito invece come un operatore in coordinate cartesiane. Il gradiente assume una forma diversa se si fa uso di altri tipi di coordinate curvilinee, vediamone i due più famosi.

Coordinate sferiche.

Siano (ρ, θ, φ) le coordinate sferiche legate alle coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

e siano $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i versori tangenti alle linee coordinate $\rho = \text{cost.}$, $\theta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_3; \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 A)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial(B \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial C}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \theta} & \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} & \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A & \rho B & \rho C \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix};$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Coordinate cilindriche.

Siano (ρ, θ, ζ) le coordinate cilindriche legate alle coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = \zeta \end{cases}$$

e siano $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ i versori tangenti alle linee coordinate $\rho = \text{cost.}$, $\theta = \text{cost.}$, $\zeta = \text{cost.}$ Si ha

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \vec{u}_3;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \zeta};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \frac{1}{\rho} \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ A & \rho B & C \end{vmatrix};$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}.$$

CAMPO DEL GRADIENTE

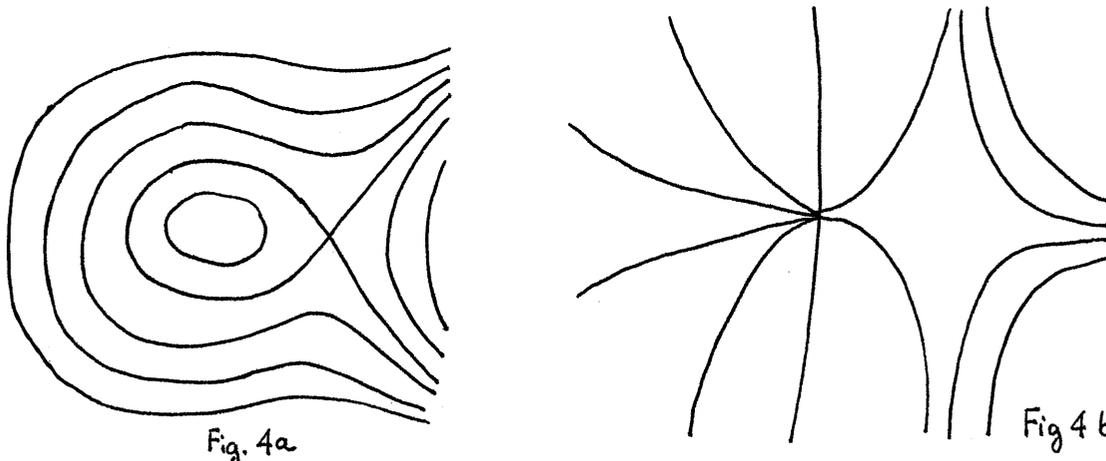
Limitiamoci in questa sezione a campi scalari $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiti in un insieme D aperto di \mathbb{R}^2 , $(x, y) \rightarrow f(x, y)$. Sotto opportune proprietà di regolarità sulla f , fissato c , si può ricavare la linea di livello

$$\gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = c\}.$$

L'insieme delle γ_c al variare di c definisce l'insieme di livello del campo scalare f .

Se siamo in tre o più dimensioni l'insieme γ_c viene chiamato superficie di livello.

La fisica è piena di esempi in cui si usano le superfici di livello, si pensi ai punti dello spazio che hanno la stessa temperatura (superfici isoterme) o la stessa pressione (superfici isobariche). Dal punto di vista matematico, il problema della determinazione



delle linee di livello è spesso difficile e complesso, solo sotto opportune ipotesi (gradiente diverso da zero) la linea rappresenta il grafico di una funzione e solo localmente.

Nella figura n. 4a sono disegnate le curve di livello di un campo scalare f , per diversi valori della costante c , nella figura n. 4b sono invece disegnate le curve che hanno, punto per punto, direzione perpendicolare alle precedenti. Queste curve costituiscono il cosiddetto **campo del gradiente**.

Vediamo ora le proprietà principali del campo del gradiente.

Se denotiamo con F il campo del gradiente

$$F = \text{grad } f,$$

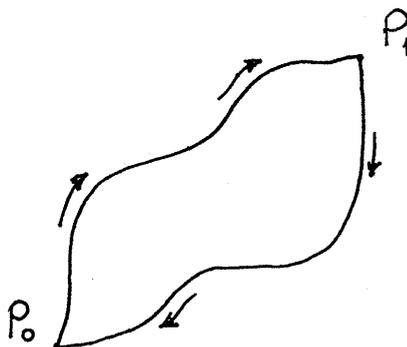
allora l'integrale curvilineo lungo una curva regolare γ di estremi P_0 e P_1 , parametrizzata da $\alpha = \alpha(t)$, vale

$$\int_{\gamma} F \cdot d\alpha = \int_{\gamma} \text{grad } f \cdot d\alpha = f(P_1) - f(P_0).$$

Se vogliamo scrivere tale integrale come funzione del generico punto P di una curva regolare γ nel dominio del campo del gradiente si ha

$$\int_{\gamma} F \cdot d\alpha = f(P) + \text{cost.} \tag{4}$$

La funzione scalare f , determinata a meno di una costante, viene detta **potenziale scalare**. È chiaro che in generale **non** tutti i campi vettoriali F hanno un potenziale scalare. L'equazione (4) implica che l'integrale curvilineo, che risulta pari al lavoro fatto dal campo sul punto lungo la curva γ , è indipendente dal cammino d'integrazione. Questo non è vero per tutti i campi vettoriali. Limitiamoci a vedere



un esempio grafico, analizzando il campo delle direzioni di F .

Per andare da P_0 a P_1 si trovano due valori diversi del lavoro se ci si muove in senso orario od in senso antiorario.

Un campo vettoriale $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, definito da $F = (A, B, C)$, che ammette un potenziale scalare, si dice **campo conservativo**.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale di classe C^1 , definito su un aperto e connesso (due punti sono sempre congiungibili da una traiettoria regolare a tratti contenuta in esso) Ω di \mathbb{R}^3 sia il gradiente di uno scalare è che l'integrale curvilineo del campo tra due punti qualsiasi P_0 e P_1 risulti indipendente dal cammino percorso.

Si può dimostrare anche che, sia F un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) F ammette un qualche potenziale scalare in Ω .
- ii) L'integrale curvilineo di F è indipendente dalla traiettoria in Ω .
- iii) L'integrale curvilineo di F è zero lungo ogni traiettoria chiusa in Ω .

Nelle applicazioni il seguente criterio è importante per stabilire se un campo non è conservativo.

Teorema. Sia $F = (A, B, C)$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^3 . Se F è il gradiente di un campo scalare in Ω , allora $\text{rot } F = 0$ in Ω .

Dimostrazione: Poiché F è il gradiente di un campo scalare, esisterà una funzione φ tale che $F = \text{grad } \varphi$, quindi

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Derivando le prime due espressioni rispetto ad y e ad x rispettivamente, si ottiene

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Quindi per il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate parziali miste

$$\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

ovvero si ha l'annullamento della terza componente del rotore. Ripetendo il discorso per le altre componenti si prova che $\text{rot } F = 0$.

Esempio. Si consideri il campo vettoriale, definito nel piano \mathbb{R}^2 ad eccezione dell'origine $(0,0)$, da

$$F(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j},$$

noto anche come campo di Biot-Savart. Lasciamo al lettore di verificare che in questo caso il $\text{rot } F = 0$, ma il lavoro su una curva chiusa che racchiude l'origine non è uguale a zero.

L'esempio precedente mostra che in generale l'ipotesi $\text{rot } F = 0$ è una condizione

necessaria ma non sufficiente perché un campo vettoriale sia conservativo. Tale condizione diventa sufficiente se il campo vettoriale F è di classe $C^1(\Omega)$ in un insieme Ω stellato rispetto ad un suo punto, o più in generale semplicemente connesso (ogni curva chiusa è contraibile in un punto dell'insieme).

In letteratura un campo vettoriale con rotore nullo viene detto **irrotazionale**.

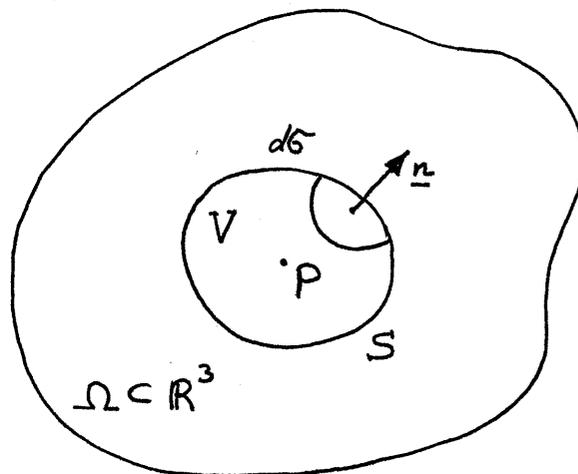
DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

Un campo vettoriale è detto **solenoidale** quando il flusso del campo attraverso ogni superficie chiusa è zero. Questo non è vero per un qualsiasi campo vettoriale e la **divergenza misura quanto un campo differisce dall'essere solenoidale**.

Si consideri un campo vettoriale $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, definito da $F = (A, B, C)$. Sia $V \subset \Omega$ un volume qualsiasi di Ω contenente il punto P , diamo una nuova definizione della **divergenza** di F come

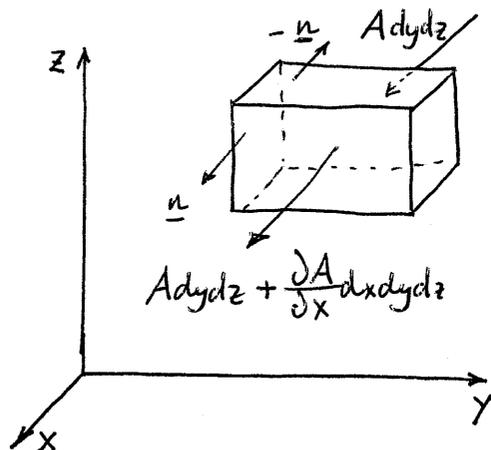
$$\operatorname{div} F = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S F \cdot n \, d\sigma \quad (5)$$

dove S è la superficie chiusa che racchiude il volume V ed n è la normale uscente alla superficie. V nella (5) sta ad indicare la misura del volume ed il simbolo $V \rightarrow 0$ significa che il volume tende a ridursi al solo punto P . Per un campo non solenoidale si ha un flusso netto attraverso una superficie infinitesima intorno al punto P ed in questo caso la $\operatorname{div} F$ è diversa da zero in quel punto.



Verifichiamo che questa definizione coincide con quella già data in coordinate cartesiane, limitandoci ad un volume a forma di parallelepipedo.

Consideriamo un volume come in figura. Il flusso approssimato netto uscente attraverso le facce parallele al piano yz :



$$-A dy dz + \left(A dy dz + \frac{\partial A}{\partial x} dy dz dx \right) = \frac{\partial A}{\partial x} dy dz dx.$$

Quindi sommando i tre flussi netti uscenti attraverso le facce del parallelepipedo

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, d\sigma &= \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Dividendo per la misura del volume V e passan-

do al limite per mis $V \rightarrow 0$, si ottiene

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (7)$$

e quindi la vecchia definizione

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (8)$$

Se assumiamo la (8) come definizione di divergenza di un campo vettoriale, la dimostrazione fatta sopra, anche se limitata ai domini a forma di parallelepipedo, esprime tramite la (7) il famoso **teorema della divergenza (teorema di Gauss)**.

Teorema. Il flusso di un campo vettoriale \mathbf{F} attraverso una superficie chiusa S è uguale all'integrale di volume della divergenza del campo \mathbf{F} sul volume V racchiuso da S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

Se la normale \mathbf{n} è espressa da $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ e $dV = dx dy dz$, allora il teorema della divergenza per ogni componente prende la forma

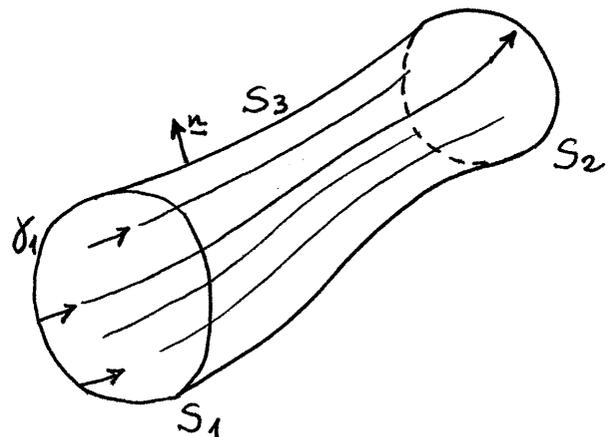
$$\begin{aligned} \iint_S A \cos \alpha \, d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x} dx dy dz, \\ \iint_S B \cos \beta \, d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial B}{\partial y} dx dy dz, \\ \iint_S C \cos \gamma \, d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial C}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

ANCORA SULLA DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

Vogliamo approfondire cosa significhi l'essere un campo vettoriale solenoidale e come la divergenza misuri quanto un campo differisce dall'essere solenoidale.

Si consideri un campo vettoriale $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, definito da $\mathbf{F} = (A, B, C)$ ed una superficie a forma di tubo contenuta in Ω . Si consideri una curva chiusa γ_1 contenuta in Ω , e si prendano le linee del campo \mathbf{F} che passano attraverso γ_1 . Tutte queste linee costituiscono un tubo, dal quale ne tagliamo un tratto finito delimitato da una superficie S_1 e da una seconda superficie S_2 , entrambi con la proprietà di essere perpendicolari a tutte le linee del campo. Denotiamo infine con S_3 la superficie laterale del tubo.

Nell'ipotesi che il campo vettoriale \mathbf{F}



sia solenoidale, il flusso totale attraverso l'intera superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ è zero. Quindi, facendo attenzione al segno delle normali alle superfici, si ha

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

L'integrale su S_3 è zero perché il campo non ha componenti normali alla superficie laterale, ne segue

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (13)$$

ovvero i flussi attraverso le due superfici trasversali del tubo sono uguali, se \mathbf{F} è solenoidale.

Possiamo interpretare questa uguaglianza in termini infinitesimi, considerando delle superfici sufficientemente piccole così da trascurare le variazioni del campo in direzione ed intensità attraverso le due superfici S_1 e S_2 . Allora se \mathbf{F} è solenoidale, la (13) si può scrivere nella forma

$$|\mathbf{F}_1| \text{mis}(S_1) = |\mathbf{F}_2| \text{mis}(S_2).$$

Il numero di linee del campo che passano attraverso S_1 deve essere uguale a quello delle linee che passano per S_2 , quindi se $\text{mis}(S_2) > \text{mis}(S_1)$ il numero per unità di area di linee che attraversano S_2 è ridotto nella proporzione $\frac{\text{mis}(S_1)}{\text{mis}(S_2)}$. In conclusione in un campo solenoidale il valore di $|\mathbf{F}|$ in ogni punto è direttamente proporzionale al numero delle linee di campo che attraversano perpendicolarmente l'unità di area.

ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE

Sia $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, un campo vettoriale definito da $\mathbf{F} = (A, B, C)$, il rotore di \mathbf{F} è un altro campo vettoriale definito da

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (9)$$

Per ogni campo vettoriale \mathbf{F} si può definire il rotore di \mathbf{F} in altra maniera con un processo di limite sulla circuitazione lungo una curva intorno al punto. Sia $P \in \Omega$ ed $S \in \Omega$ una superficie qualsiasi (ma sufficientemente regolare) di Ω contenente il punto P ed avente la normale \mathbf{n} in P , delimitata da una curva chiusa C , assumiamo come nuova definizione di rotore di \mathbf{F}

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}. \quad (10)$$

$d\boldsymbol{\alpha}$ è lo spostamento elementare sulla curva C pensata parametrizzata da $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$. Per ogni direzione \mathbf{n} in P esiste un unico limite (per le ipotesi di regolarità richieste su A , B , C , per le quali rimandiamo ai trattati di Analisi), ripetendo questo processo di limite per ogni direzione (ne basteranno tre linearmente indipendenti) si ottiene il vettore

rot F nel punto P . Poi ripetendo il calcolo per ogni punto P si ottiene il nuovo campo vettoriale in Ω .

La nuova definizione sembrerà al lettore un po' macchinosa, e quindi vogliamo provare che essa porta ancora alla definizione (9), se usiamo le coordinate cartesiane. Per semplicità partiamo limitandoci al caso piano e dimostriamo un teorema conosciuto come **Teorema di Green**.

Teorema di Green per un rettangolo nel piano. Sia $F = (A, B)$ un campo vettoriale di classe $C^1(R)$, dove $R \subset \mathbb{R}^2$ è il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Allora

$$\iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} A dx + B dy,$$

dove ∂R è la curva costituita dai quattro segmenti che delimitano il rettangolo.

Dimostrazione: Fissiamo come senso di percorrenza quello antiorario come in figura. Calcoliamo il primo degli integrali doppi, integrando prima rispetto ad x

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial B}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial B}{\partial x} dx \right) dy = \\ &= \int_c^d (B(b, y) - B(a, y)) dy \end{aligned}$$

e poiché l'integrale di linea $\int_{\partial R} B dy$ lungo i tratti orizzontali è zero, allora

$$\int_{\partial R} B dy = \int_c^d (B(b, y) - B(a, y)) dy;$$

analogamente

$$-\iint_R \frac{\partial A}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (A(x, c) - A(x, d)) dx = \int_{\partial R} A dx.$$

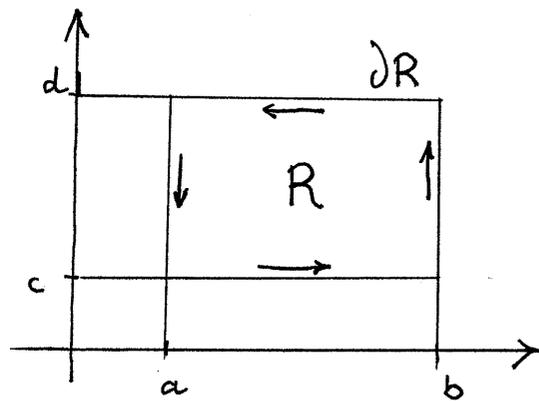
Sommando le due identità si ottiene il teorema di Green per un rettangolo.

Teorema di Green. Il teorema precedente si generalizza ad un qualunque insieme \mathfrak{R} di \mathbb{R}^2 limitato da una curva chiusa semplice $\gamma = \partial \mathfrak{R}$ percorsa nel senso antiorario:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \mathfrak{R}} A dx + B dy .$$

Vogliamo ora estendere questo teorema al caso tridimensionale. La dimostrazione di tale estensione richiede la conoscenza di dettagli tecnici che esulano dai nostri scopi, quindi ci limitiamo a riportare il risultato finale.

Teorema di Stokes. Sia S una superficie semplice e regolare (immagine tramite un trasformazione di classe C^2 di una regione di \mathbb{R}^2 limitata da una curva semplice chiusa)



e sia C la frontiera di S , sia inoltre il campo vettoriale F di classe C^1 su S , allora si ha

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k \right] \cdot n \, d\sigma = \int_C A dx + B dy + C dz, \quad (11)$$

dove n è la normale esterna alla superficie.

Ritorniamo ora alla nuova definizione di rotore data dalla (10). È facile riconoscere nel secondo membro dell'identità (11) l'integrale curvilineo $\int_C F \cdot d\alpha$, quindi se C è una curva che delimita una superficie passante per P ed avente normale n in P , dividendo ciascun membro per la (misura della) superficie S si ha

$$\frac{1}{S} \iint_S \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k \right] \cdot n \, d\sigma = \frac{1}{S} \int_C F \cdot d\alpha.$$

A questo punto facciamo tendere la misura di S a zero, mantenendo la superficie S sempre tangente al piano di normale n . Si ottiene così

$$\begin{aligned} \text{rot } F \cdot n &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C F \cdot d\alpha = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_S \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k \right] \cdot n \, d\sigma = \\ &= \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k \right] \cdot n, \end{aligned}$$

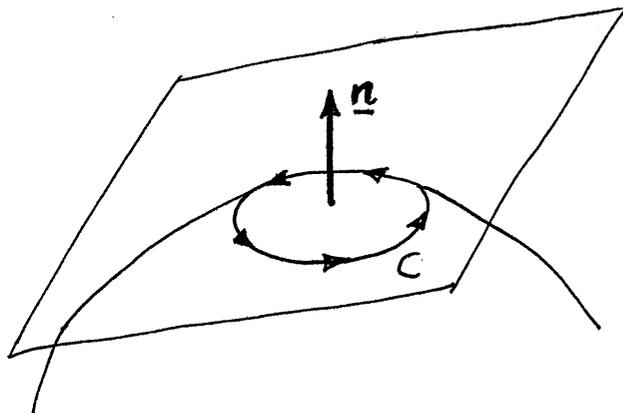
trovando nuovamente l'espressione del rotore in coordinate cartesiane:

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k.$$

ANCORA SUL CAMPO DEL ROTORE

Significato di rotore. Il significato del rotore dovrebbe essere già chiaro dalla definizione (10). L'essere diverso da zero nel punto P , significa che la circuitazione di F lungo ogni curva intorno a P è diversa da zero, ovvero il campo dei vettori intorno a P presenta una tendenza a circolare ovvero a ruotare intorno alla direzione di n .

Un'altro modo di giustificare il nome di rotore che è stato dato al campo vettoriale (9) è il seguente. Si consideri il campo vettoriale delle velocità di un insieme di punti che si muovono mantenendosi rigidamente collegati fra loro



(corpo rigido). Dalle le formule di Poisson, note dalla Meccanica, si ricava facilmente la legge con cui variano le velocità di due punti P ed O

$$v(P) = v(O) + \omega \wedge (P - O),$$

dove ω è la velocità angolare caratteristica del corpo rigido.

Si supponga che il punto O sia fisso ed origine di un sistema di riferimento di versori fissi (i, j, k) , allora la velocità del generico punto $P = (x, y, z)$ soddisfa

$$v(P) = \omega \wedge (P - O).$$

In coordinate $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$, quindi valutiamo il rotore del campo delle velocità $P \rightarrow v(P) = (\omega_2 z - \omega_3 y)i + (\omega_3 x - \omega_1 z)j + (\omega_1 y - \omega_2 x)k$

$$\begin{aligned} \text{rot } v(P) = \nabla \wedge v(P) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_1 + \omega_1)i + (\omega_2 + \omega_2)j + (\omega_3 + \omega_3)k = 2\omega. \end{aligned}$$

Il rotore del campo delle velocità risulta uguale alla velocità di rotazione e si può pensare al rotore come la tendenza di P a ruotare intorno al punto O pensato fisso.

Torniamo alla matrice J introdotta in (3), che il lettore avrà riconosciuto essere la matrice jacobiana della funzione F

$$JF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

i cui elementi presi in modo opportuno abbiamo visto costituire la divergenza ed il rotore di F . È noto dall'algebra lineare che ogni matrice reale A si può decomporre nella somma di una matrice **simmetrica** $\frac{1}{2}(A + A^t)$ e di una matrice **antisimmetrica** $\frac{1}{2}(A - A^t)$. Nel caso di JF si ottiene:

$$\text{parte antisimmetrica di } J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} & 0 & \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} & \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli elementi della parte antisimmetrica, ovvero quelli non diagonali, sono gli elementi del $\text{rot } F$ a parte il segno. Se la matrice jacobiana J è simmetrica, allora $\text{rot } F = 0$.

Nello studio del campo del gradiente, abbiamo risposto al seguente problema:

Dato un campo vettoriale F , esiste un campo scalare φ tale che $F = \text{grad } \varphi$?

I campi che godevano di questa proprietà si sono chiamati conservativi, ed abbiamo dato la condizione necessaria $\text{rot } F = 0$ (anche sufficiente se il dominio è semplicemente connesso).

Nello studio del campo del rotore, possiamo porci un simile problema:

Dato un campo vettoriale F , esiste un campo vettoriale G tale che $F = \text{rot } G$?

Vediamo dal punto di vista analitico a quali equazioni corrisponde questo problema. Sia $F = (A, B, C)$ e $G = (L, M, N)$, $F = \text{rot } G$ si scrive

$$A = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

dove le funzioni scalari L, M ed N sono le incognite da determinarsi in funzione di A, B , e C . Se L, M ed N sono di classe C^2 , allora $\text{div } F = \text{div}(\text{rot } G) = 0$, quindi

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

è condizione necessaria perché esista un campo G di cui F ne sia il rotore.

Esempio. Si consideri il campo vettoriale F , definito nella regione D dello spazio \mathbb{R}^3 delimitata da due sfere concentriche di centro nell'origine $O \equiv (0,0,0)$ e raggi a e b da

$$F(P - O) = \frac{P - O}{|P - O|^3} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Con qualche calcolo si vede che

$$\text{div } F = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0.$$

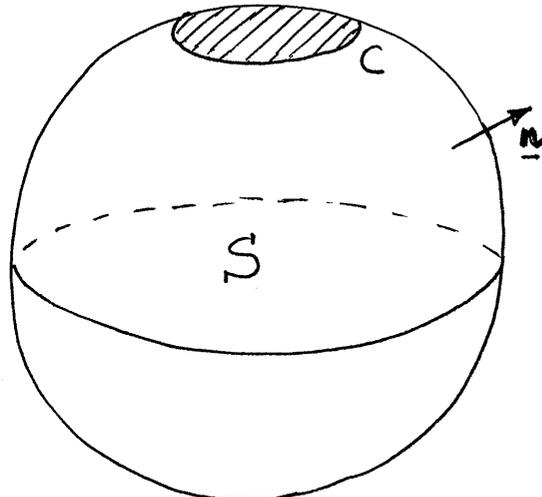
Supponiamo ora (per assurdo) che esista un campo vettoriale G tale che $\text{rot } G = F$. Se così fosse per il teorema di Stokes si

avrebbe

$$\iint_S \text{rot } G \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_C G \cdot d\boldsymbol{\alpha}, \quad (12)$$

dove S è una superficie sferica di raggio R concentrica con le superfici che delimitano il nostro dominio D con $a < R < b$ a cui è stata tolta una calotta polare (come in figura). La frontiera di S è la circonferenza C con normale $\mathbf{n} = \frac{P - O}{|P - O|}$.

Valutiamo il flusso del rotore di G



$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S \frac{P-O}{|P-O|^3} \cdot \frac{P-O}{|P-O|} \, d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_S d\sigma = \frac{\text{Area di } S}{R^2},$$

essendo ogni punto P della superficie distante R da O . Se riduciamo la calotta polare al solo punto del polo, l'area di S diventa $4\pi R^2$ ed il flusso del rotore di \mathbf{G} diventa 4π .

Vediamo ora l'integrale curvilineo (12)

$$\left| \int_C \mathbf{G} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \right| \leq \int_C \max \|\mathbf{G}\| \, d\alpha = (\max \|\mathbf{G}\|) (\text{lunghezza di } C).$$

Quando la calotta polare tende al polo, la lunghezza di C , e quindi anche l'integrale curvilineo in (12), tendono a zero. Il teorema di Stokes (12) non vale, siamo caduti in assurdo e quindi non esisterà in D un campo vettoriale \mathbf{G} tale che $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Lasciamo al lettore di verificare che in questo caso il $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, ma il lavoro su una curva chiusa che racchiude l'origine non è uguale a zero.

L'esempio precedente mostra che in generale l'ipotesi $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ è una condizione necessaria ma non sufficiente perché un campo vettoriale \mathbf{F} sia un rotore. L'esempio dato dimostra che le difficoltà nascono dalle proprietà del dominio, ma non vogliamo qui dare le condizioni più generali sotto le quali la condizione $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ diventa sufficiente. Ci limitiamo al seguente:

Teorema. Sia $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto, un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$. Sia $\Omega = (a,b) \times (c,d) \times (e,f)$, allora esiste un campo vettoriale \mathbf{G} tale che $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ se e solo se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

Prima di concludere mettiamo un po' d'ordine nella terminologia. In letteratura un campo vettoriale \mathbf{F} tale che $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ si dice **solenoidale**. Dopo quanto detto sopra, è evidente che questa definizione non è sempre in accordo con quella già data (un campo vettoriale è detto **solenoidale** quando il flusso del campo attraverso ogni superficie chiusa è zero). Le due definizioni saranno equivalenti quando la regione Ω ha la proprietà che ogni superficie chiusa in Ω è la frontiera di un solido giacente interamente in D . Vale ad esempio il teorema:

Teorema. Il flusso di un campo vettoriale \mathbf{F} attraverso una superficie chiusa S , che racchiude una certa regione dello spazio \mathbb{R}^3 in cui è definito il campo, è zero, cioè

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

se e solo se esiste un campo vettoriale \mathbf{G} tale che $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

Per i dettagli rimandiamo ai testi di Analisi Vettoriale.

COMPLEMENTI

Qualche commento sulla derivata direzionale. Si consideri come esempio la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow xy$. Vogliamo calcolare la derivata nel punto $(1,1)$ secondo la direzione della bisettrice del primo quadrante, la retta $y = x$.

Attenzione. A chi viene in mente di sostituire $y = x$ nella funzione f e ridurre la derivata lungo quella direzione alla derivata della funzione di una sola variabile $x \rightarrow x^2$, cade in errore. Infatti in questo modo si avrebbe

$$D_v f(1,1) = 2,$$

dove $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Eseguiamo ora la derivata direzionale in maniera corretta. Se valutiamo l'incremento in $P_0 = (1,1)$

$$\frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{t} = \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}{t} = \frac{\frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}}{t} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2}.$$

Quindi si ha

$$D_v f(1,1) = \sqrt{2}.$$

Attenzione. Se il vettore v non è unitario non si ha la derivata direzionale definita sopra. Sia $v = (1,1)$. Se valutiamo l'incremento in $P_0 = (1,1)$

$$\frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \frac{f(1+t, 1+t) - f(1,1)}{t} = \frac{(1+t)^2 - 1}{t} = \frac{2t + t^2}{t} = 2 + t,$$

si ha erroneamente

$$D_v f(1,1) = 2,$$

che coincide col valore errato trovato sopra in modo diverso.

Bibliografia

Tom M. Apostol, *Calcolo Vol. 3 Analisi 2*, Boringhieri, Torino 1980

N. Kemmer, *Vector Analysis, A physicist's guide to the mathematics of fields in three dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge 1977

FORMULARIO

CURVE

γ : Im α Parametrizzazione $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Tangente $t(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{z'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right)$

Normale $n(t) = \frac{t'(t)}{\|t'(t)\|}$ Binormale $b(t) = t(t) \wedge n(t)$

Lunghezza $L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Parametrizzazione canonica $s = s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b], \quad s \in [0, L]$

(s ascissa curilinea) $ds = \|\alpha'(t)\| dt, \quad d\alpha = t(t) \|\alpha'(t)\| dt = t(t(s)) ds$

Integrale curvilineo

Funzione scalare $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad S \subset U$

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

(col parametro x)

$$= \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx$$

SUPERFICIE

Parametrizzazione $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}; \quad I_1 = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \quad I_2 = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \quad I_3 = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

$\varphi: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Area $A = \iint_D \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} du dv$

Normale $n = \frac{(I_1, I_2, I_3)}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}$

Integrale di Superficie

Funzione scalare $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad S \subset U$

$$\begin{aligned} \iint_S f d\sigma &= \iint_D f \circ \varphi \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} du dv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} du dv \end{aligned}$$

Con k parametrizzazioni $\varphi_i: D_i \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad U_i \varphi_i(D_i) = S, \quad \varphi_i(D_i) \cap \varphi_j(D_j) = \emptyset$
 D_i aperti

$$\iint_S f d\sigma = \sum_i \iint_{D_i} f \circ \varphi_i \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} du dv$$

TEOREMI DI GAUSS, STOKES, GREEN, etc.

$$F = (A, B, C), \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) k.$$

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot n \, d\sigma. \quad \text{Teorema della DIVERGENZA}$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S [A \cos(n,i) + B \cos(n,j) + C \cos(n,k)] \, d\sigma$$

Teorema di GAUSS-OSTROGRADSKY

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_C F \cdot d\alpha \quad (\text{Flusso del rotore} = \text{circuitazione}) \quad \text{Teorema di STOKES}$$

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \cos(n,i) + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(n,j) + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cos(n,k) \right] d\sigma =$$

$$= \int_C A \, dx + B \, dy + C \, dz$$

Nel piano M varietà piana, ∂M curva in senso antiorario

$$\iint_M \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial M} A \, dx + B \, dy \quad \text{Teorema di GAUSS-GREEN}$$

FORME DIFFERENZIALI

$\omega_0 = f$

$d\omega_0 = df$

$\omega_1 = A \, dx + B \, dy + C \, dz$

$d\omega_1 = \operatorname{rot}(A, B, C) \cdot (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$

$\omega_2 = A \, dy \wedge dz + B \, dz \wedge dx + C \, dx \wedge dy$

$d\omega_2 = \operatorname{div}(A, B, C) \, dx \wedge dy \wedge dz$

Teorema di STOKES (per le forme differenziali)

$$\left\{ \begin{array}{l} M: \text{varietà di dimensione } i \\ \omega: (i-1)\text{-forma definita su un aperto } U \supset M \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

INTEGRALI DI FORME DIFFERENZIALI

Campo Vettoriale $\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (A, B, C)$,
 $\mathbf{F}(x, y, z) = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}$

1-forma $\omega_1 = A dx + B dy + C dz$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1 &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \|\alpha'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b [A(\alpha(t))x'(t) + B(\alpha(t))y'(t) + C(\alpha(t))z'(t)] \, dt \\ &= \int_a^b [A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t)] \, dt \end{aligned}$$

2-forma $\omega_2 = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$

$$\begin{aligned} \iint_S \omega_2 &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_D ((\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \circ \varphi) \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} \, du \, dv = \\ &= \iint_D [A(\varphi(u, v))I_1 + B(\varphi(u, v))I_2 + C(\varphi(u, v))I_3] \, du \, dv = \\ &= \iint_D [A(x(u, v), y(u, v), z(u, v))I_1 + B(x(u, v), y(u, v), z(u, v))I_2 + \\ &\quad + C(x(u, v), y(u, v), z(u, v))I_3] \, du \, dv \end{aligned}$$

3-forma $\omega_3 = A(x, y, z) \, dx \wedge dy \wedge dz$

$V \subset \mathbb{R}^3$, ∂V superficie regolare senza bordo, con \mathbf{n} diretta verso l'esterno

$$\iiint_V \omega_3 = \iiint_V A(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

- V varietà di dim-3
$$\int \int_{\partial V} \omega_2 = \int \int \int_V d\omega_2 = \int \int \int_V \operatorname{div}(A,B,C) dx dy dz$$

- $\partial S = C$ curva chiusa
$$\int_C \omega_1 = \int \int_S d\omega_1 = \int \int_S \operatorname{rot}(A,B,C) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

- $\omega_1 = df$, M dim-1 con bordo
$$\int_M \omega_1 = \int_{\partial M} f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

α : parametrizzazione di M

- ω esatta $\Rightarrow d\omega = 0$

- ω esatta, γ chiusa
$$\int_\gamma \omega = 0$$

- Campo solenoidale
$$\int \int_{\partial V} \omega_2 = \int \int \int_V d\omega_2 = \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = 0$$

$\mathbf{F} = (A,B,C)$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ Flusso nullo

T. di STOKES in dim-3

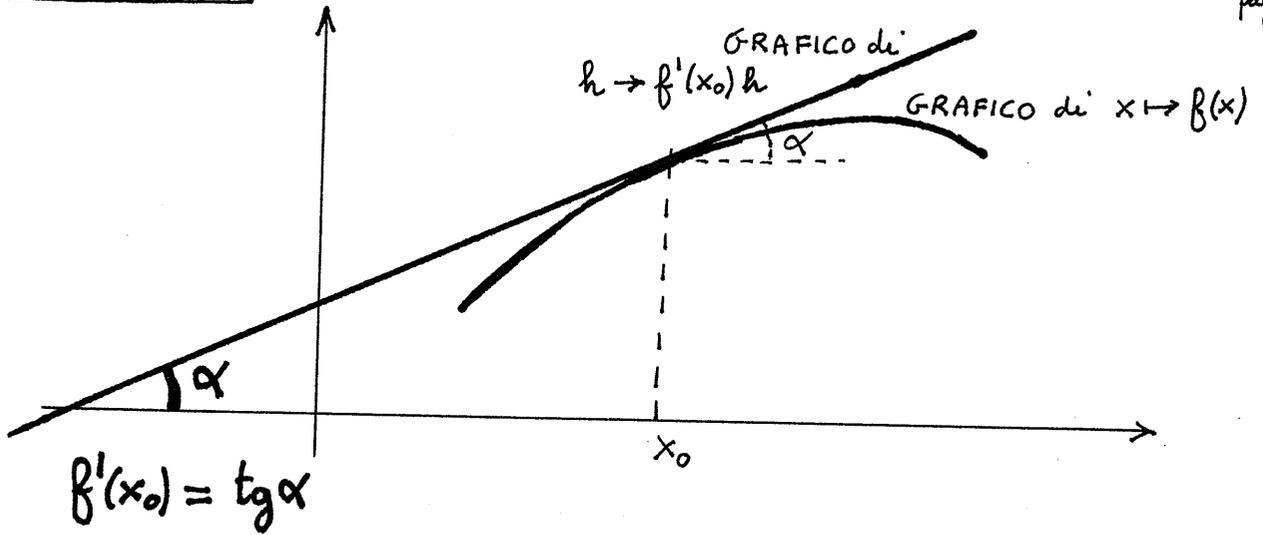
- $V \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (A,B,C)$
$$\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

T. di STOKES in dim-2

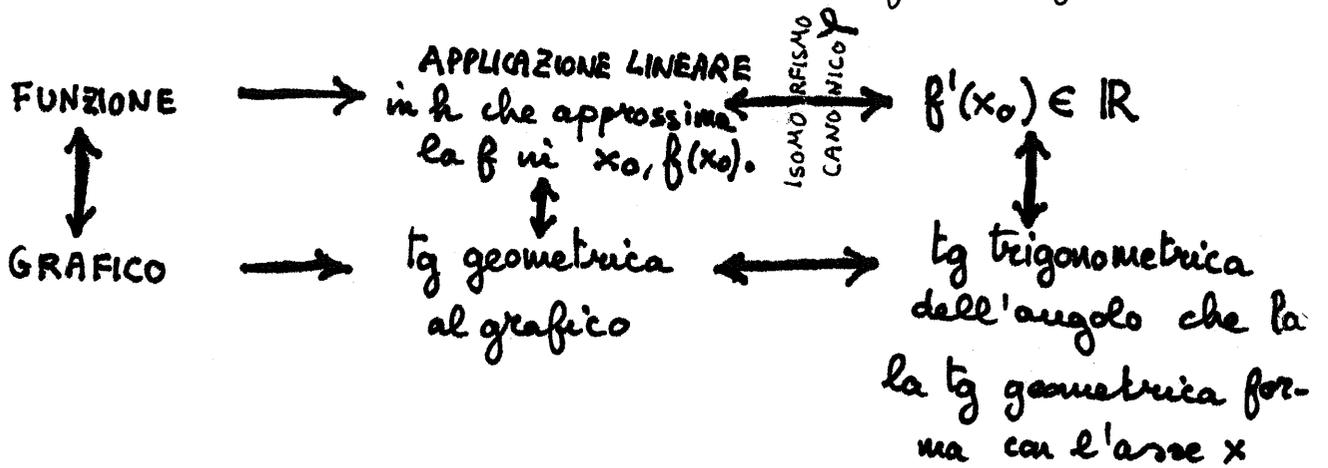
- $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (A,B)$
 \mathbf{n} normale esterna a ∂M
$$\int \int_M \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

T. di STOKES in dim-1

- $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{F} = (A)$
$$\int_a^b \operatorname{div} \mathbf{F} dx = \int_a^b \frac{\partial A}{\partial x} dx = A(b) - A(a).$$



➔ SIGNIFICATO GEOMETRICO della DERIVATA di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



L'APPLICAZIONE φ fa corrispondere alla legge lineare $x \mapsto \beta x, \beta \in \mathbb{R}^*$ il NUMERO REALE $K \in \mathbb{R}$

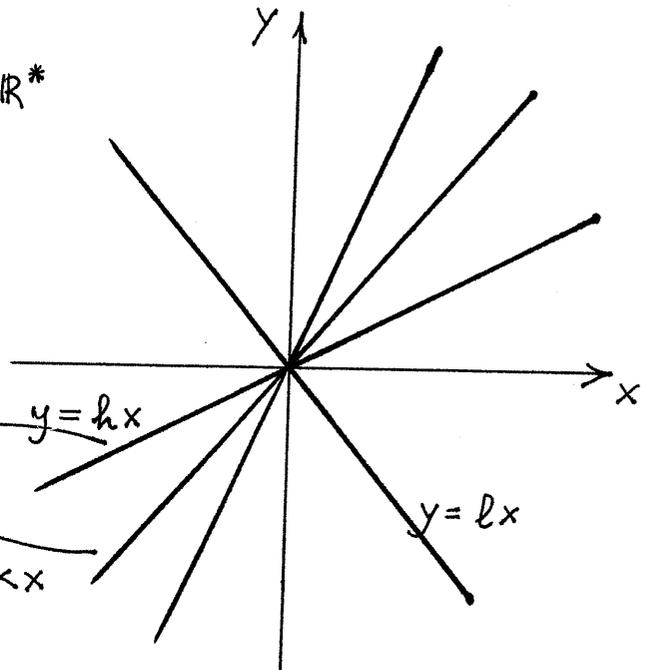
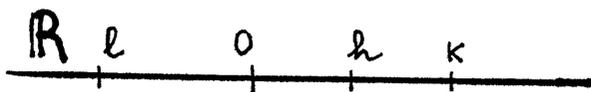


GRAFICO DELLE FUNZIONI LINEARI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cioè delle $\beta \in \mathbb{R}^*$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Legge} \\ x \mapsto \beta(x) \\ \text{lineare} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^*$ (duale di \mathbb{R})

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE DERIVATE PARZIALI

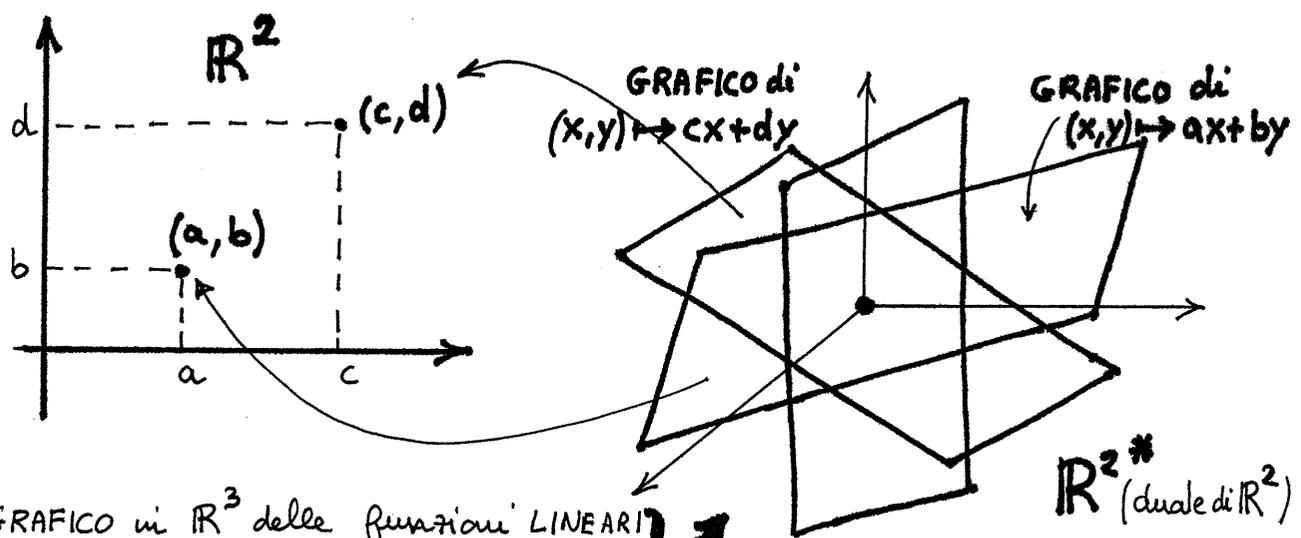
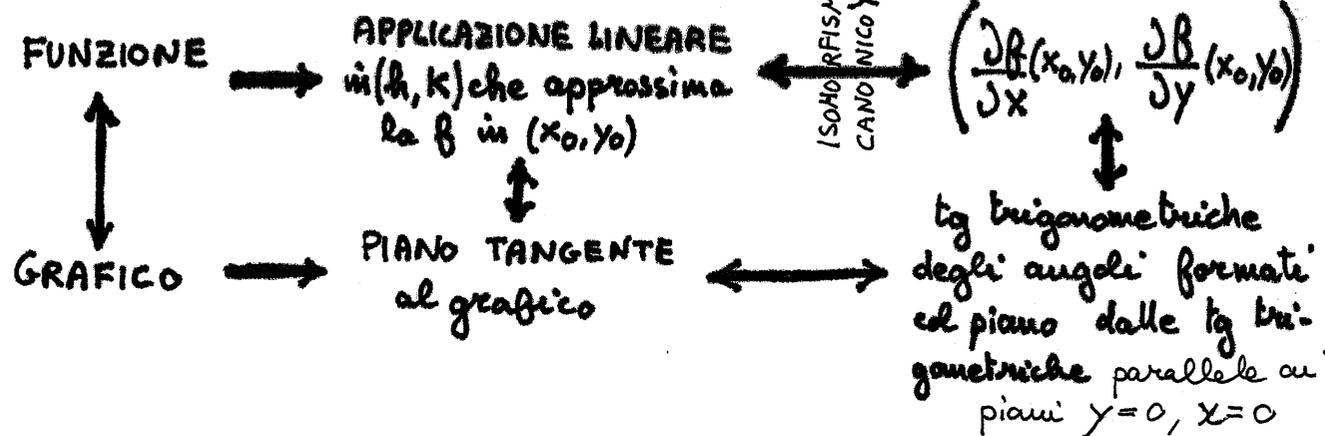
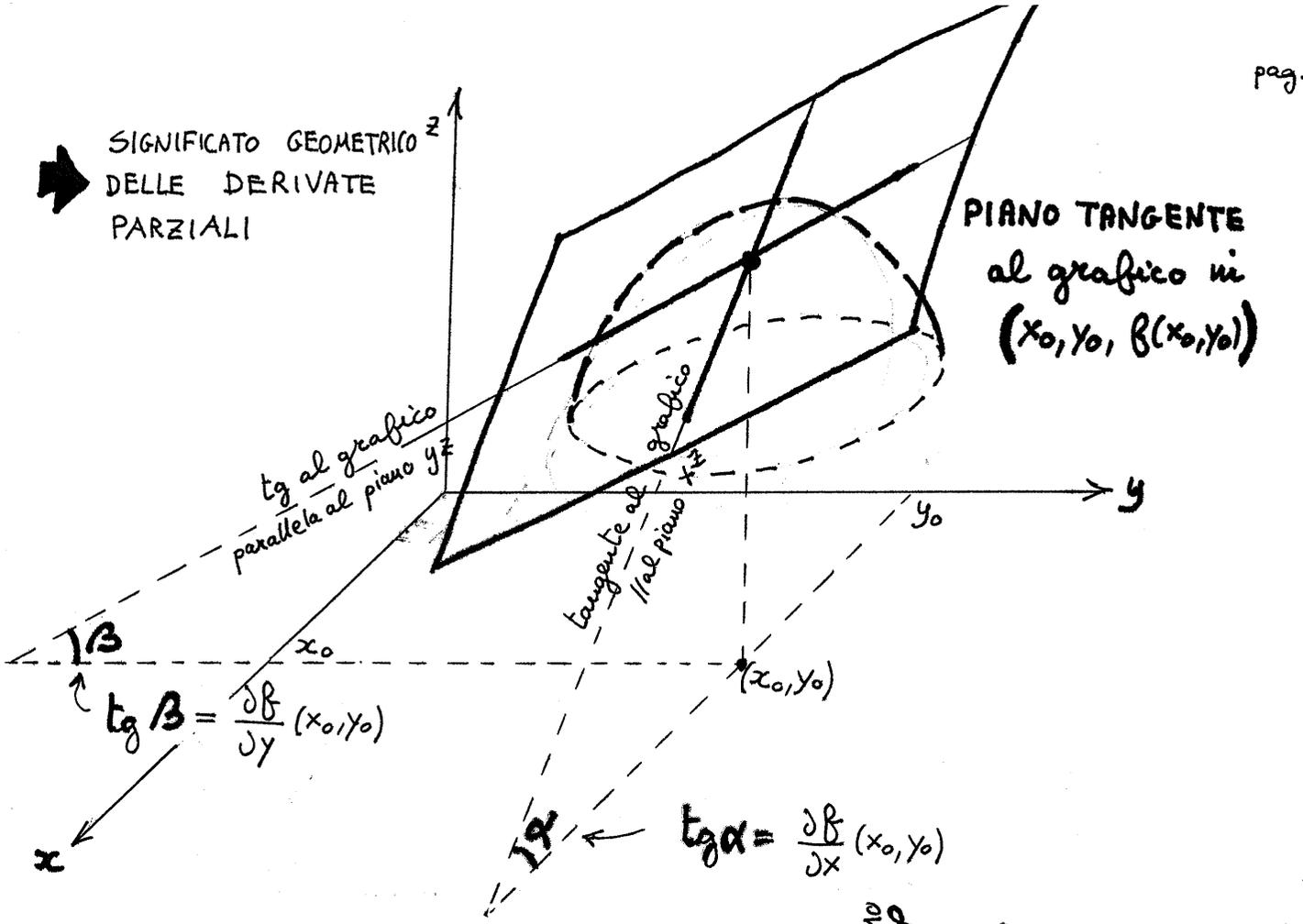


GRAFICO in \mathbb{R}^3 delle funzioni LINEARI da $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cioè delle $\beta \in \mathbb{R}^{2*}$

COME SI LEGGE UNO SVILUPPO DI FUNZIONE

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (x^2 < \infty)$$

L'espressione sopra scritta si legge nel seguente modo per $x \rightarrow 0$:

$\text{sen } x = o(1)$ ovvero $\text{sen } x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$

$\text{sen } x = O(x)$

$\text{sen } x \sim x$

$\text{sen } x = x + o(x)$

$\text{sen } x = x + O(x^3)$

$\text{sen } x \sim x - \frac{x^3}{3!}$

$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$\text{sen } x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ e così via.

Nei calcoli per non introdurre termini superflui, si potrà scegliere l'espressione più conveniente !!!!!

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < \infty)$$

$$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < \infty)$$

$$\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\sim 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n \text{ per } x \rightarrow 0$$

dove α è un numero reale ; $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \quad (x^2 < 1)$

Casi particolari per $x \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \quad (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + O(x^3) \quad (1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3) \quad (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + O(x^4) \quad (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + O(x^4)$$

$$\cotg x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945}x^5 + O(x^7) \quad \text{la cotg}x \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ è un infinito} \quad (x^2 < \pi^2)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + O(x^9) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < \infty)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + O(x^8) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < \infty)$$

$$\tgh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O(x^{11}) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < \pi^2/4)$$

$$\cotgh x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 + O(x^9) \quad \text{la cotgh}x \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ è un infinito} \quad (x^2 < \pi^2)$$

$$\arcsen x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + O(x^9) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < 1)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots \right) \quad (x^2 < 1)$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O(x^9) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (x^2 < 1, x = 1)$$

$$\log(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (x^2 < 1, x = -1)$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) = 2 \operatorname{arctgh} x \quad (x^2 < 1)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x^2 < \infty)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x^2 < \infty)$$

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \log a)^n}{n!} + \dots \quad (x^2 < \infty)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 - \frac{3}{6!}x^6 + \frac{56}{7!}x^7 + \dots \quad (x^2 < \infty)$$

$$e^{\operatorname{cos} x} = e \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{4!}x^4 - \frac{31}{6!}x^6 + \dots \right) \quad (x^2 < \infty)$$

$$e^{\operatorname{tgh} x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \frac{37}{5!}x^5 + \dots \quad (x^2 < \pi^2/4)$$

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \log \sqrt{2\pi} + \sigma_n, \quad \text{con } 0 < \sigma_n < \frac{1}{12n}, \quad (\text{STIRLING})$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \epsilon_n \text{ dove } 0 < \epsilon_n < \frac{1}{n}, \gamma = 0.5772\dots \text{ è la costante di Eulero-Mascheroni}$$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right], \quad n \rightarrow \infty$$