

ANALISI QUALITATIVA di EQUAZIONI DIFFERENZIALI ed APPLICAZIONI

1. INTRODUZIONE

Si consideri un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine della forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sono funzioni reali incognite della variabile reale t , f_i sono funzioni assegnate delle variabili dipendenti x_1, x_2, \dots, x_n , mentre t è la variabile indipendente. Un tale sistema si dice di **dimensione n** , quando n sono le equazioni e si dice **autonomo** quando le f_i **non dipendono** da t . Al sistema (1.1) vanno associate n condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \dots \dots \dots \\ x_n(0) = x_{n0} \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.1) ed (1.2) prendono il nome di **problema ai valori iniziali**.

Introducendo la notazione matriciale (di particolare utilità soprattutto quando si hanno n equazioni)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

il problema ai valori iniziali può essere scritto nella forma compatta

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Risolvere un problema ai valori iniziali significa trovare n funzioni $x_i(t)$ di classe C^1 che soddisfino (1.1) + (1.2). Sotto opportune ipotesi di regolarità delle funzioni f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (per le quali si rimanda al corso di Analisi II) il sistema ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0, T)$.

Esempio. Si consideri un sistema materiale isolato costituito da n punti materiali (P_i, m_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Le leggi di Newton consentono di scrivere le equazioni differenziali per il moto del sistema:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

con le condizioni iniziali

$$P_i(0) = P_{i0}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad (1.6)$$

dove le forze \mathbf{F}_i dipendono in generale dallo stato cinematico del sistema e dal tempo. Le equazioni (1.4) costituiscono un sistema di $3n$ equazioni differenziali scalari del secondo ordine nelle incognite $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$. Il sistema (1.4) si può ridurre ad uno equivalente di $6n$ equazioni differenziali del 1° ordine nel seguente modo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = v_{ix} \\ \dot{y}_i = v_{iy} \\ \dot{z}_i = v_{iz} \\ \dot{v}_{ix} = \frac{1}{m_i} F_{ix} \\ \dot{v}_{iy} = \frac{1}{m_i} F_{iy} \\ \dot{v}_{iz} = \frac{1}{m_i} F_{iz} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

con le condizioni (1.5)-(1.6). Se le \mathbf{F}_i dipendono dal tempo esplicitamente allora il sistema è **non autonomo**. Vedremo in seguito come potrà in ogni caso trasformarsi in un sistema di $6n + 1$ equazioni **autonomo**.

In questo caso il prodotto cartesiano di \mathbb{R}^3 , n volte, \mathbb{R}^{3n} è detto **spazio delle configurazioni** di un sistema costituito da n punti materiali liberi.

Sia $[0, T)$ l'intervallo di tempo, le n applicazioni $(x_i, y_i, z_i): [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue con le derivate prime e seconde, soluzioni del sistema (1.7), definiscono un'applicazione

$$\mathbf{x}: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$$

continua con le derivate prima e seconda, dall'intervallo dei tempi (che può essere anche $[0, +\infty)$) nello spazio delle configurazioni, che prende il nome di **moto di un sistema di n punti (liberi)**.

Diciamo **atto di moto** del sistema di punti (P_i, m_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, all'istante t , il vettore

$$\mathbf{v} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, \dots, v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}) \in \mathbb{R}^{3n}$$

dove \mathbf{v}_i è la velocità di P_i all'istante t .

Si chiama **spazio delle fasi di un sistema di n punti (liberi)** lo spazio $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$ di tutte le configurazioni e di tutti gli atti di moto. \square

Torniamo al problema ai valori iniziali (1.3). Non è sempre facile ottenere in maniera esplicita le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine,

facendo uso di funzioni note (polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche, ecc.), anche se sotto forma di integrali o di serie infinite. Ma anche quando ciò è possibile, spesso risulta difficile studiare le proprietà della soluzione, il suo comportamento asintotico, la periodicità, ecc.

Ci sono due modi alternativi di procedere. Primo si possono applicare algoritmi numerici per trovare soluzioni approssimate, con risultati numerici o grafici; secondo si può eseguire un'analisi qualitativa dell'equazione, che conduca a trovare proprietà della soluzione, senza determinarla prima esplicitamente.

2. SISTEMI AUTONOMI E NON AUTONOMI

Un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

si dice **autonomo**, cioè F non dipende esplicitamente dal tempo.

Un sistema del tipo

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

si dice invece **non autonomo**.

A volte, soprattutto per ragioni computazionali, può essere utile trasformare un sistema **non autonomo** in un **sistema autonomo**. Ciò può essere fatto aggiungendo al sistema un'altra equazione differenziale, con una opportuna condizione iniziale.

Vediamo, ad esempio come si può operare su un **sistema di 2 equazioni del 1° ordine non autonomo**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t) , & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t) , & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove le funzioni f_1 ed f_2 dipendono esplicitamente dal tempo. Se aggiungiamo l'equazione

$$\frac{dz}{dt} = 1, \text{ con la condizione iniziale } z(t_0) = t_0,$$

la soluzione di questa nuova equazione è $z(t) = t$. Si può così sostituire t con z in tutte le funzioni alla destra ed **il sistema diventa autonomo**, a scapito di aumentare la dimensione da 2 a 3 (in generale da n ad $n + 1$)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z) , & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z) , & y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = 1 & , z(t_0) = t_0 \end{cases}$$

3. ANALISI QUALITATIVA

Vediamo con un esempio quali sono gli scopi dell'analisi qualitativa di un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine.

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ le popolazioni di due specie in competizione fra loro a causa delle risorse limitate e degli spazi abitativi limitati nel loro microcosmo. Supponiamo che la crescita di tali popolazioni sia governata dalle leggi esprimibili con il sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Con l'analisi qualitativa, anziché ai valori di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ all'istante t , siamo interessati alle proprietà di $x_1(t)$ e $x_2(t)$. In particolare siamo interessati a rispondere alle seguenti domande:

1. Esistono valori ξ_1 e ξ_2 delle popolazioni, a cui le due specie coesistono in uno stato stazionario? Cioè $x_1(t) \equiv \xi_1$, $x_2(t) \equiv \xi_2$, $\forall t$, sono soluzioni di (3.1)? Tali valori prendono il nome di **punti di equilibrio**.

2. Supponiamo che le due popolazioni coesistano in equilibrio. Se aggiungiamo alcuni membri alla prima popolazione nel microcosmo, le nuove popolazioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rimarranno vicino ai loro valori di equilibrio nei tempi successivi? O forse la prima specie prenderà il sopravvento, fino ad estinguere la seconda specie?

3. Siano x_{10} e x_{20} valori arbitrari delle due popolazioni al tempo $t = 0$. Cosa accade di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ quando t tende all'infinito? Le soluzioni si avvicinano a valori di **equilibrio**? Oppure se non ci si avvicina a soluzioni di equilibrio, le soluzioni tendono a **soluzioni periodiche**?

L'**analisi qualitativa** insegna a rispondere a queste domande per un sistema di equazioni differenziali. Nei paragrafi successivi daremo un po' di terminologia e poi faremo seguire una serie di esempi.

4. PIANO DELLE FASI

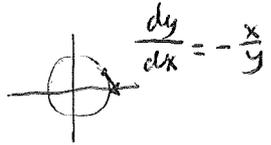
Per studiare la dinamica delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali è di notevole aiuto lo spazio delle fasi.

Limitiamoci ancora ad un sistema di due equazioni autonomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -x \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$$



con condizioni iniziali $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Le soluzioni di (4.1) $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definiscono una curva nello spazio 3-dimensionale, cioè $(t, x(t), y(t))$ descrive una curva nello spazio (t, x, y) . Per esempio, la soluzione $x = \cos t$ e $y = \sin t$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{cases}$$

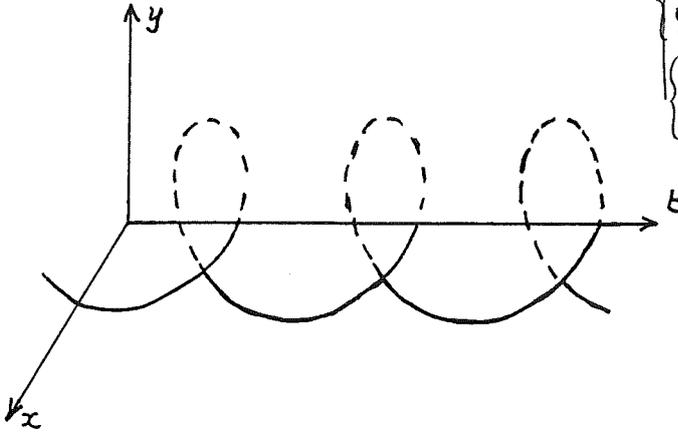
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

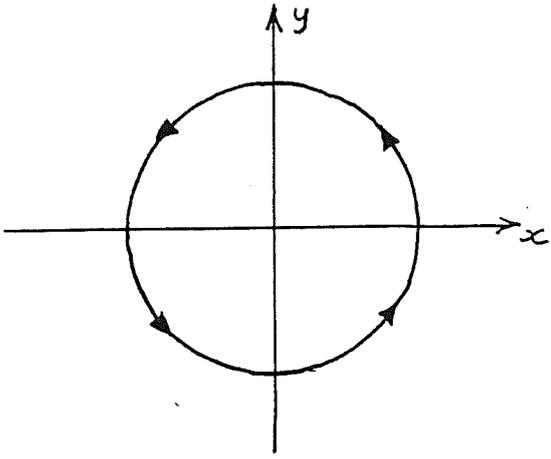
$$(4.2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

descrive un'elica nello spazio (t, x, y)

La teoria geometrica delle equazioni differenziali si basa sull'osservazione che ogni soluzione $x = x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq T$, descrive una curva nel piano $x-y$. Questa curva è chiamata **orbita**, o **traiettoria**, della soluzione $x = x(t)$ e $y = y(t)$ ed il piano $x-y$ è chiamato **piano (spazio) delle fasi** delle soluzioni di (4.2). Lo spazio delle (x, y, t) dove si disegna il grafico della soluzione $x = \cos t, y = \sin t$ prende il nome di **spazio delle fasi esteso**.



Quando $t \in [0, 2\pi]$, l'insieme dei punti $(\cos t, \sin t)$ riempie il cerchio unitario $x^2 + y^2 = 1$ nel piano $x-y$. Di qui il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ è l'orbita della soluzione per $0 \leq t \leq 2\pi$.



Quando t varia da 0 a $+\infty$, l'insieme dei punti $(\cos t, \sin t)$ riempie il cerchio infinite volte.

Altro esempio. Il sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x - y, y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x, x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -x - y, y(0) = 1 \end{cases}$$

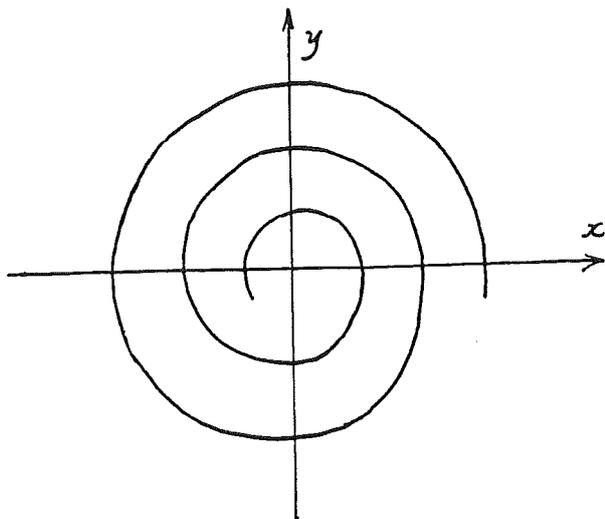
ammette la soluzione

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \cos t & x(t) &= e^{-t} \sin t \\ y(t) &= e^{-t} \sin t & y(t) &= e^{-t} \cos t \end{aligned}$$

$t \in [0, +\infty)$. L'orbita della soluzione, nel piano $x-y$ è una spirale di equazione $x^2 + y^2 = e^{-2 \arctg \frac{y}{x}}$.

Si osservi che in generale una curva soluzione di (4.1) è una orbita solo se $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ non sono simultaneamente zero lungo la soluzione. La curva soluzione è ~~una~~ data dalla soluzione di

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \quad (4.3)$$



Orbita di $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$

$x^2 + y^2 = 1$ è un punto di equilibrio del sistema (4.4). Così, le orbite sono i cerchi $x^2 + y^2 = c^2$, con $c \neq 1$, e **tutti i punti** del cerchio unitario $x^2 + y^2 = 1$.

In generale non è possibile risolvere esplicitamente l'equazione (4.3) e ricavarne le orbite di (4.1). Nondimeno, è possibile ottenere da (4.3) un'accurata descrizione delle orbite di (4.1). Il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \quad (4.1)$$

dà luogo nel piano x - y ad un **campo di direzioni**. Cioè il sistema (4.1) ci dice come velocemente una soluzione si muove lungo la sua orbita ed in quale direzione si sta muovendo. Più precisamente, sia $x = x(t)$ e $y = y(t)$ una soluzione di (4.1), al crescere t , il punto $(x(t), y(t))$ si muove lungo l'orbita di questa soluzione. La sua velocità nella direzione x è $\frac{dx}{dt}$, la sua velocità nella direzione y è $\frac{dy}{dt}$. Il modulo della sua velocità è

$$\left[\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}. \text{ Essendo}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f_1(x(t), y(t))$$

$$\text{e } \frac{dy(t)}{dt} = f_2(x(t), y(t)),$$

allora in ogni punto (x,y) del piano delle fasi si conosce la tangente all'orbita in (x,y) con la pendenza

$$\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \text{ e la velocità } \sqrt{f_1^2(x,y) + f_2^2(x,y)}$$

con cui la soluzione attraversa la sua orbita.

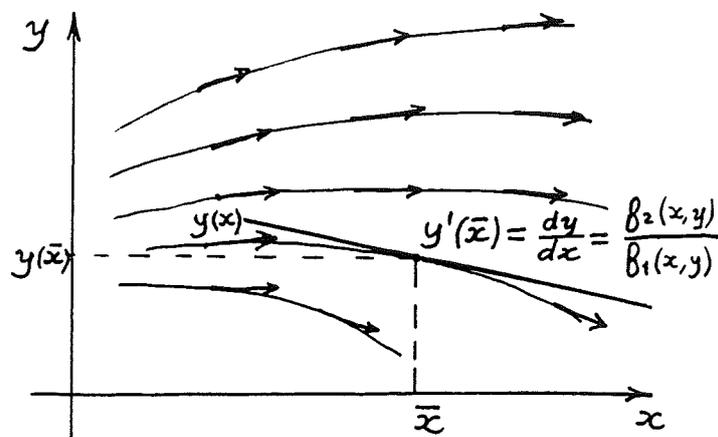
Nel caso in cui la soluzione di (4.3) ~~se essa~~ passa attraverso un punto di equilibrio di (4.1), allora l'intera curva soluzione non è un'orbita. Piuttosto essa è l'unione di orbite distinte. Per esempio, si consideri

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Le curve soluzione dell'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{x}{y}$$

sono la famiglia di cerchi concentrici $x^2 + y^2 = c^2$. Ma ogni punto del cerchio



La nozione di **orbita** può essere estesa facilmente al caso $n > 2$. In un sistema di n equazioni, l'insieme dei punti $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ soluzione del sistema di n equazioni traccia una **curva** nello spazio a dimensione n . Questa curva è chiamata nuovamente **orbita della soluzione** e lo spazio n -dimensionale x_1, x_2, \dots, x_n è chiamato **spazio delle fasi** delle soluzioni del sistema.

5. PUNTI DI EQUILIBRIO

Si consideri un sistema meccanico, le cui equazioni di moto siano traducibili in un sistema del tipo (1.3) del primo ordine (in \mathbb{R}^{2n} se n sono i gradi di libertà del sistema). Uno stato del sistema è detto di equilibrio se a partire da tale stato, tale stato non cambia nel tempo. Conseguentemente $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{d^2X}{dt^2}$ sono simultaneamente zero. È bene osservare che l'annullarsi della derivata prima non è da sola sufficientemente per equilibrio. Cerchiamo di tradurre questa idea abbastanza intuibile per un sistema meccanico (si pensi al sistema di un solo punto materiale) al caso di un sistema del primo d'ordine in \mathbb{R}^n

$$\text{in } \mathbb{R}^{2n} \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

DEF. di P.to di Equ. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un punto } X_e, \text{ corrispondente allo stato } (x_e, 0), \text{ è un punto di equilibrio del sistema (1.3),} \\ \text{se } X(t) = X_e \text{ è soluzione di (1.3) per } \forall t \text{ a partire dallo stato iniziale } X_e. \end{array} \right.$
In altri termini

$$F(X_e) = 0,$$

cioè il campo vettoriale F si annulla in X_e , per $\forall t$.

Tornando ora alla rappresentazione nel piano delle fasi, si osserva che un punto di equilibrio X_e deve essere situato sull'asse X del piano delle fasi, in quanto $\dot{X} = 0$. $\Rightarrow y = 0$ nel caso meccanico

Ora siamo interessati a determinare quando un punto di equilibrio è stabile o meno. Cioè siamo interessati a vedere se ogni soluzione di (1.3) che parte sufficientemente vicina ad uno stato di equilibrio (nel piano delle fasi) si mantiene vicina a tale stato anche per tutti i tempi successivi $t \geq 0$. In termini rigorosi diamo la seguente definizione.

Un punto X_e , corrispondente allo stato $(x_e, 0)$, è un **punto di equilibrio stabile** del sistema (1.3) se comunque presa una sfera B_R di raggio R e centro X_e , nello spazio delle fasi, è possibile determinare una sfera B_r di centro X_e e raggio $r \leq R$, tale che ogni orbita che parte per $t = 0$ in B_r rimanga dentro B_R per $t > 0$.

CONFIGURAZIONE $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si noti che la configurazione } x_e, \text{ corrispondente allo punto di equilibrio} \\ X_e = (x_e, 0), \text{ si dirà stabile quando lo è } X_e \text{ nello spazio delle fasi. Si osservi comunque} \\ \text{che quando si sposta un punto dalla sua posizione di equilibrio, occorre che questa} \end{array} \right.$

perturbazione, seppur piccola, sia effettuata sia variando la configurazione, sia variando la velocità. Questo spiega perchè lo spazio naturale per studiare la stabilità sia quello delle fasi.

La stabilità di X_e si dice **asintotica** se esiste un raggio R_0 tale che ogni orbita che parte per $t = 0$ nella sfera B_{R_0} tende ad X_e per $t \rightarrow +\infty$.

Quando quanto detto non vale si dirà che il punto X_e , corrispondente allo stato $(x_e, 0)$, è un **punto di equilibrio instabile**, in altre parole esiste un qualche R per cui comunque si scelga una sfera B_r di centro X_e e raggio $r \leq R$, ^{di senso arbitrario} che parte per $t = 0$ in B_r non rimane dentro B_R .

6. STABILITÀ DI SISTEMI LINEARI

Si consideri il caso in cui la funzione F sia lineare, quindi partendo da (1.3) il problema ai valori iniziali può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mathbb{A}X \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

dove \mathbb{A} è una matrice $n \times n$. Se ci limitiamo a considerare un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine, allora il sistema (6.1) diventa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

dove $a, b, c, e d$ sono parametri reali. In questo caso la stabilità è legata alle proprietà degli autovalori della matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

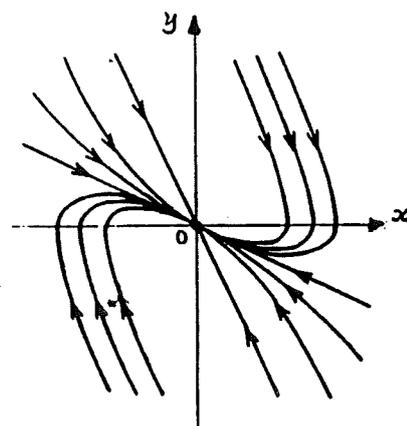
Siano λ_1 e λ_2 i due autovalori della matrice \mathbb{A} , distinguiamo i vari casi.

1. λ_1 e λ_2 reali, entrambi negativi. Siano (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) gli autovettori corrispondenti.

La soluzione generale prende la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

A causa degli esponenziali negativi, ogni soluzione (6.2) per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2 tende a $(0,0)$ per $t \rightarrow +\infty$. In particolare le semirette che hanno direzione (ξ_1, η_1) ,



NODO S'TABILE

(ξ_2, η_2) e $-(\xi_1, \eta_1)$, $-(\xi_2, \eta_2)$ sono orbite rettilinee che tendono all'origine. Il punto $(0,0)$ viene detto **nodo stabile**.

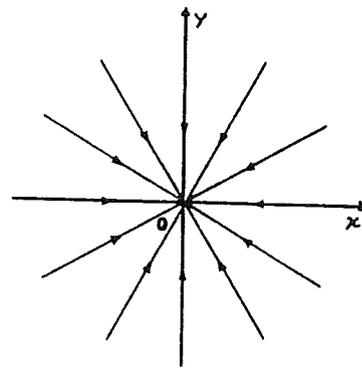
2. λ_1 e λ_2 **reali, entrambi positivi**. Siano (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) gli autovettori corrispondenti. Questo caso è analogo al precedente, il diagramma nel piano delle fasi, con la differenza che le frecce temporali sono invertite. Il punto $(0,0)$ viene detto **nodo instabile**.

3. $\lambda_1 = \lambda_2$ **reali, negativi**. Questa volta dobbiamo distinguere due casi: A ha uno o due vettori linearmente indipendenti.

3.1 Siano (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) gli autovettori linearmente indipendenti. La soluzione ha la forma generale

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[c_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right].$$

Al variare di c_1 e c_2 si ha ogni direzione per l'origine e quindi il diagramma delle fasi è costituito da semirette con la direzione temporale verso $(0,0)$.



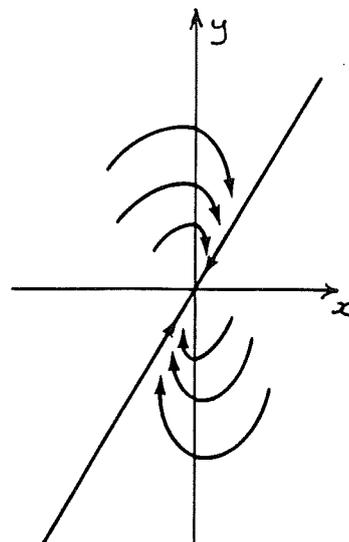
CASO 3.1

3.2 Sia (ξ, η) l'unico autovettore corrispondente a $\lambda < 0$. L'algebra lineare ci insegna a scrivere la soluzione nella forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[c_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} + c_2 k t \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right].$$

dove k è una costante e $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$ è un opportuno vettore indipendente da $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Innanzitutto, ogni orbita tende a $(0,0)$ a causa dell'esponenziale negativo. Inoltre, se $c_2 \neq 0$, il termine $c_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$ è piccolo rispetto a $c_2 k t \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, quando t è molto grande. Quindi al limite le orbite tendono ad essere tangenti alle direzioni $\pm \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ a seconda del segno di c_2 .



CASO 3.2

4. $\lambda_1 = \lambda_2$ **reali, positivi**.

Questo caso è analogo al precedente, con la

differenza che si deve invertire le direzioni temporali nei diagrammi corrispondenti ai casi 3.1 e 3.2.

5. λ_1 e λ_2 **reali, discordi**. Per fissare le idee supponiamo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ e siano (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) gli autovettori corrispondenti. Dividiamo il piano tramite due rette per l'origine parallele alle direzioni degli autovettori. Le semirette dall'origine sono le orbite delle soluzioni

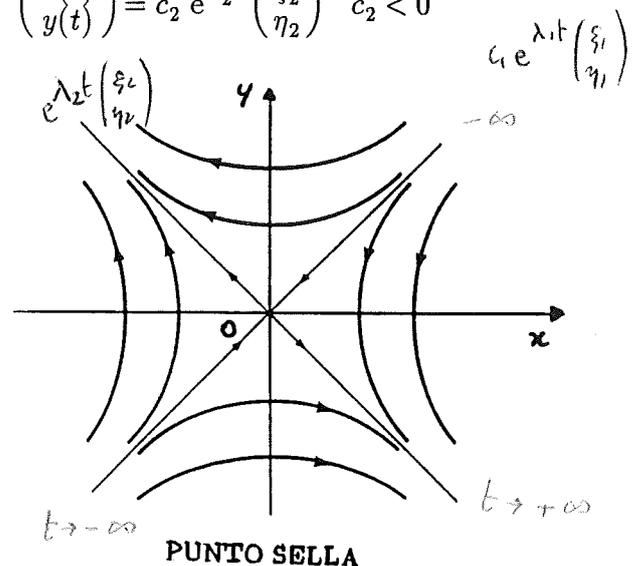
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \quad c_1 > 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \quad c_1 < 0$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad c_2 > 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad c_2 < 0$$

con i versi di percorrenza come indicati in figura. Vediamo ora la soluzione generale

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

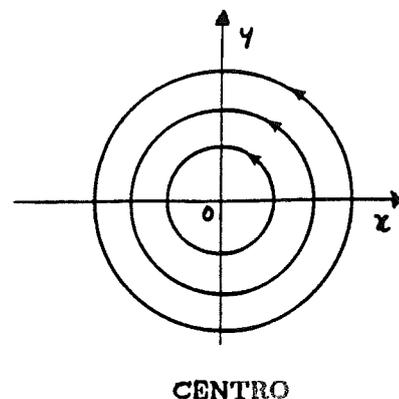
il segno dell'autovalore positivo fa sì che per, $c_2 \neq 0$, predomina l'esponenziale $e^{\lambda_2 t}$ e l'orbita diventa non limitata per $t \rightarrow +\infty$, mentre per, $c_1 \neq 0$, predomina l'esponenziale negativo $e^{\lambda_1 t}$ e l'orbita diventa non limitata per $t \rightarrow -\infty$. Il punto d'equilibrio è detto **punto sella**.



6. λ_1 e λ_2 **complessi coniugati**. Per fissare le idee $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, e sia $z = u + iv$ un autovettore corrispondente. Allora tenendo conto che $e^{\lambda_1 t} [u + iv]$ è una soluzione complessa della nostra equazione lineare, la soluzione generale può essere scritta nella forma

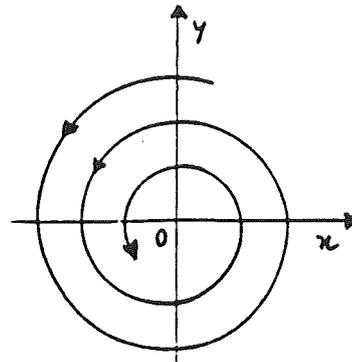
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\beta t + \gamma_1) \\ C_2 \cos(\beta t + \gamma_2) \end{pmatrix}.$$

6.1 $\alpha = 0$. La soluzione non contiene più l'esponenziale, quindi le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni periodiche di periodo $2\pi/\beta$ e le orbite sono curve chiuse che circondano l'origine $(0,0)$ e sono percorse in senso orario o antiorario, a seconda dell'equazione



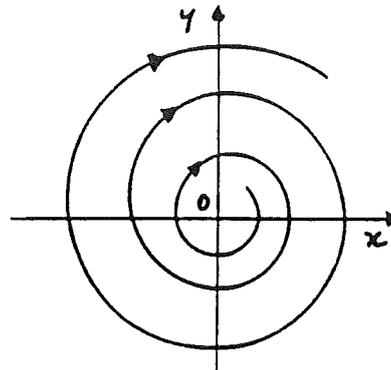
differenziale (6.2). Il punto di equilibrio (0,0) è detto **centro**.

6.2 $\alpha < 0$. L'esponenziale negativo di fronte alla soluzione trasforma le curve chiuse in spirali che focalizzano verso l'origine (0,0). Per questa ragione, l'origine è chiamato fuoco. Inoltre in questo caso, i punti dell'orbita si avvicinano all'origine col crescere di t e quindi, l'origine è punto di equilibrio stabile, detto **fuoco stabile**.



FUOCO STABILE

6.3 $\alpha > 0$. L'esponenziale positivo questa volta trasforma le curve chiuse in spirali che si allontanano dall'origine (0,0). L'origine è punto di equilibrio instabile, detto **fuoco instabile**.



FUOCO INSTABILE

L'analisi per sistemi lineari del primo ordine di n equazioni è più complessa ma si basa su considerazioni simili a quelle fatte sopra per un sistema di due equazioni.

7. CENNO SULLA STABILITÀ DI SISTEMI NON LINEARI

Si consideri ora un sistema non lineare del primo d'ordine in \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

di cui si conosce il punto d'equilibrio \mathbf{X}_e , molto spesso, ma sia chiaro fin da ora non sempre, le proprietà di stabilità di \mathbf{X}_e sono simili a quelle del sistema linearizzato

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

che si ottiene scrivendo \mathbf{F} come

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbb{A} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_e) + \mathbf{B}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_e) \quad (7.1)$$

dove \mathbb{A} è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ è piccolo, in un senso opportuno, rispetto ad $\mathbf{U} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_e$. Senza precisare il senso esatto in cui deve valere la (7.1), per la quale si rimanda ai testi specialistici [Braun, ecc.], qui riportiamo solo il seguente teorema che

$\mathbb{A} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_e)$ è un prodotto righe x colonne

mette in relazione il comportamento nell'intorno di un punto di equilibrio, per i sistemi (1.3) e (6.1).

$$X = X_e$$

Teorema. Supponiamo che $U = 0$ sia un nodo, un punto sella o un fuoco per l'equazione lineare (6.1). Allora il comportamento del diagramma delle fasi per l'equazione nonlineare (1.3) nell'intorno di $X = X_e$ è simile a quello di un nodo, di un punto sella e di un fuoco rispettivamente a seconda che $U = 0$ sia un nodo, un punto sella o un fuoco.

NODO
PUNTO SELLA
FUOCO

(Non si applica al centro, come in Lezioni-Volterra)

APPLICAZIONI

Dagli *Appunti di Fisica Matematica* di G.Borgioli (Univ. di FIRENZE)

. OSCILLATORE ARMONICO

Consideriamo il modello matematico più semplice che sia utilizzabile per descrivere fenomeni di tipo periodico; si tratta di un sistema unidimensionale, lineare e conservativo. Questo sistema idealizzato può essere rappresentato da un sistema meccanico costituito da una massa m che si muove orizzontalmente su una guida liscia sotto l'azione di una molla di costante elastica k (Fig.1). Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio la molla approssima una forza elastica di richiamo, cioè una forza proporzionale allo spostamento. Se trascuriamo la resistenza dell'aria e l'attrito interno della molla l'equazione di moto della massa è:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

dove x rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio l_0 .

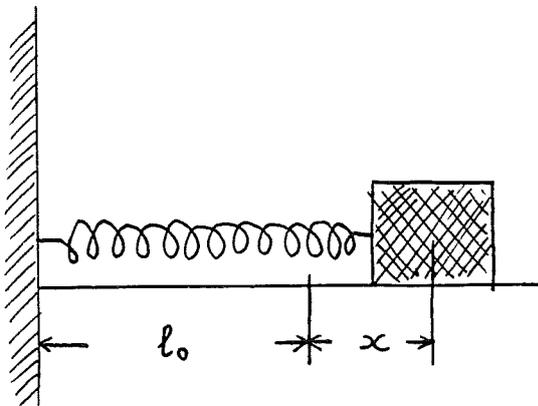


Fig.1

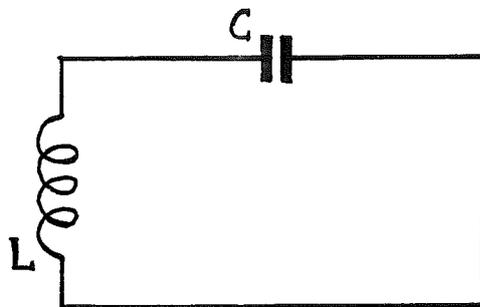


Fig.2

Ponendo $\frac{k}{m} = \omega^2$ si ottiene l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ; \quad (8.1)$$

L'equazione costituisce un caso particolarmente semplice di equazione lineare del II ordine, a coefficienti costanti (e quindi si tratta di un'equazione autonoma), omogenea.

Il corrispondente modello elettrico è costituito da un semplice circuito di capacità C ed induttanza L , in cui viene trascurata l'energia dissipata, la non linearità degli elementi ed il fatto che induttanza e capacità siano caratteristiche distribuite (Fig.2).

In questo caso l'equazione di "evoluzione" per la carica q presente sul condensatore è :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 ,$$

e, con $\frac{1}{LC} = \omega^2$, $q = x$, si ottiene ancora la (8.1).

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \omega^2 &= 0 \\ \gamma &= \pm i\omega \end{aligned}$$

Soluzione esatta. La forma generale della soluzione può essere scritta nei seguenti modi:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t} \\ \dot{x}(t) &= -c_1 i\omega e^{-i\omega t} + c_2 i\omega e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t ; \quad (8.2)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \gamma_1) ; \quad (8.3)$$

$$x(t) = A_2 \sin(\omega t + \gamma_2) , \quad (8.4)$$

dove:

$$A_1 \cos \gamma_1 = A_2 \sin \gamma_2 = A ,$$

$$-A_1 \sin \gamma_1 = A_2 \cos \gamma_2 = B .$$

$|A_1| = |A_2| = \sqrt{A^2 + B^2}$ è detta ampiezza dell'oscillazione, γ_1 è la fase iniziale ($\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{\pi}{2}$). ω è la pulsazione e costituisce la caratteristica fondamentale del sistema oscillante, non dipendendo dalle condizioni iniziali. Il periodo T è legato alla pulsazione dalla relazione $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza.

La soluzione generale di (8.1) può essere scritta anche per mezzo delle funzioni esponenziali complesse, in accordo con il metodo generale per ottenere l'espressione analitica delle soluzioni di equazioni ordinarie, lineari, omogenee, a coefficienti costanti:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} , \quad (8.5)$$

dove il legame fra le costanti A , B e C_1 , C_2 è dato da

$$C_1 = \frac{A - iB}{2} , \quad C_2 = \frac{A + iB}{2} .$$

L'introduzione delle condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 , \quad \dot{x}(0) = v_0 , \quad (8.6)$$

permette di formulare il problema di Cauchy (8.1)+(8.6) che ammette come unica soluzione:

$$(8.7) \quad x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Indicheremo qui, e nel seguito, il problema di Cauchy ai valori iniziali con la sigla PVI.

Analisi qualitativa dell' oscillatore armonico.

Consideriamo adesso la rappresentazione delle orbite nel piano delle fasi (x, \dot{x}) . La forma delle orbite può essere ottenuta, in questo caso, sia eliminando il tempo fra le funzioni che descrivono le soluzioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega t + \gamma_1), \\ \dot{x}(t) &= -A_1 \omega \sin(\omega t + \gamma_1), \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la (8.3), oppure direttamente integrando per quadrature l'equazione (8.1):

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 \dot{x}x = 0,$$

ed integrando:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \mathcal{C}, \quad (8.8)$$

dove $\mathcal{C} = \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2$ è una costante proporzionale all'energia totale del sistema. Variando le condizioni iniziali in modo da variare \mathcal{C} , si ottiene una famiglia di ellissi omotetiche (Fig.3), che riempiono tutto il piano.

Scrivendo in forma canonica la (8.8):

$$\frac{\dot{x}^2}{\mathcal{C}} + \frac{x^2}{\mathcal{C}/\omega^2} = 1,$$

si ottengono le lunghezze dei semiassi sugli assi x e \dot{x} (rispettivamente $\sqrt{\mathcal{C}/\omega^2}$ e $\sqrt{\mathcal{C}}$) e si può notare come la forma delle ellissi sia unicamente determinata dal parametro ω .

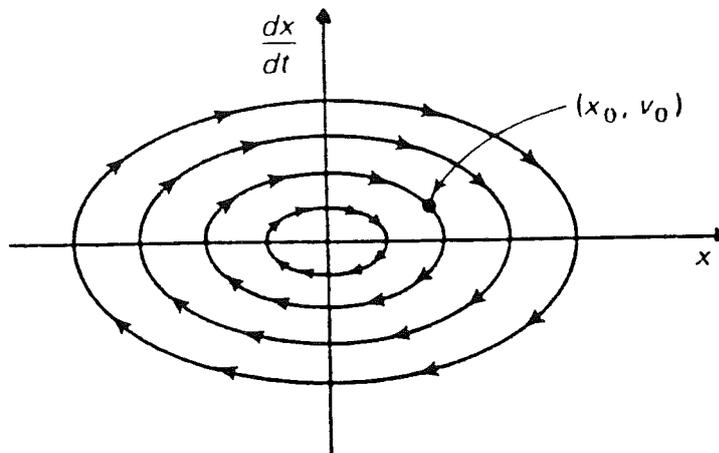


Fig.3

Le orbite in figura sono percorse secondo il verso imposto dalla freccia temporale: x è crescente nel semipiano $\dot{x} > 0$, decrescente nel semipiano $\dot{x} < 0$.

L'origine $(0,0)$ nel piano delle fasi è l'unica soluzione stazionaria per l'equazione (8.1) ed ha, chiaramente, la proprietà di essere stabile. Il punto $(0,0)$ prende il nome di CENTRO.

9. L'EQUAZIONE $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$

Un modello meccanico

Consideriamo un pendolo matematico vincolato mediante un'asta rigida di massa trascurabile (Fig.1). Per determinare la configurazione del sistema, scegliamo come coordinata l'angolo φ formato dall'asta con la verticale ascendente.

Introducendo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$ e l'energia potenziale $V = mgl\cos\varphi$, con le ipotesi di vincoli lisci e di resistenza del mezzo trascurabili, si può ricorrere al teorema di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi = E,$$

$$z = l\cos\varphi$$

$$V = -mgz = -mgl\cos\varphi$$

e, per derivazione, ottenere l'equazione di moto:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \quad (9.1)$$

Poichè $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio, può essere interessante procedere in modo analogo al caso delle "piccole oscillazioni", linearizzando la (9.1):

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = 0, \quad (9.2)$$

e sostituendola con la (9.2) per valori di φ "piccoli".

Soluzione esatta. Cerchiamo la soluzione generale per l'equazione:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0, \quad (9.3)$$

che, per $x = \varphi$ e $\omega^2 = \frac{g}{l}$ coincide con la (9.2). Consideriamo il polinomio associato alla (9.3):

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0,$$

che ammette le soluzioni reali $\lambda_{1,2} = \pm \omega$.

La soluzione di (9.3) è quindi della forma (cfr. il metodo generale per la soluzione delle equazioni differenziali ordinarie, lineari e a coefficienti costanti):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \omega^2 x \end{aligned} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 = 0$$

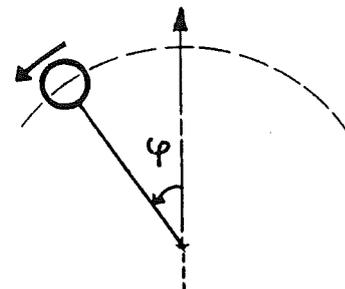


Fig.1

ATTENZIONE
è l'unica
eqn. di
stabile

anche se non è
una pr. di equ. stabile

$$\lambda_1 = \omega \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \eta = \omega \xi \\ \xi \omega^2 = \omega \eta \end{matrix} \quad \eta = \omega \xi \quad \xi = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\ \dot{x}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t} \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = -\omega \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \eta = -\omega \xi \\ \xi \omega^2 = -\omega \eta \end{matrix} \quad x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = Ae^{\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} + Be^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

Assegnate delle generiche condizioni iniziali:

$$\eta = -\omega \xi \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

si determinano i valori delle costanti arbitrarie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\omega} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega} \right),$$

risolvendo così il PVI:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega} \right) e^{\omega t} + \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} \right]. \quad (9.4)$$

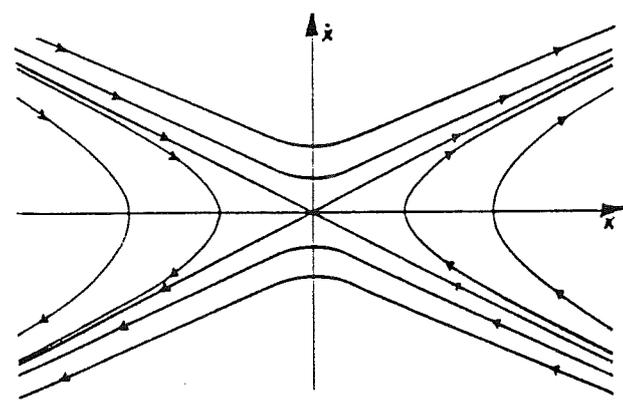
La soluzione (9.4) può essere riscritta nella forma seguente, spesso utile, che sottolinea l'analogia puramente "formale" con il PVI per l'oscillatore armonico:

$$x(t) = x_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t).$$

Analisi qualitativa di $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. Se integriamo la (9.3) per quadratura, otteniamo immediatamente l'espressione dell'integrale primo che deve essere soddisfatto durante il moto:

$$\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 = C, \quad (9.5)$$

dove C è una costante proporzionale all'energia totale del sistema, determinabile dalle condizioni iniziali. Al variare di C , ovvero al variare delle condizioni iniziali, la (9.5) descrive una famiglia di iperboli equilateri nel piano (x, \dot{x}) , (Fig.2):



$$\sinh \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

$$\cosh \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

Fig.2

Fissare le condizioni iniziali significa determinare il ramo di iperbole che descrive il moto e l'evoluzione del sistema avverrà dalla parte indicata dalla freccia del tempo. Per $C = 0$, e quindi per particolari condizioni iniziali, la (9.5) è equivalente alle equazioni delle rette:

$$\dot{x} = \omega x \quad , \quad \dot{x} = -\omega x \quad ,$$

che costituiscono gli asintoti della famiglia di iperboli (9.5) e che rappresentano quindi delle orbite particolari per il sistema. Tutte le orbite sono curve aperte, sulle quali non si mantengono limitati né x né \dot{x} per $t \rightarrow +\infty$.

Anche i rami degli asintoti che il sistema descrive in verso “centripeto”, tendendo cioè alla posizione di equilibrio (0,0), non sono mai completamente percorsi in tempi finiti: questo significa che la tendenza all’equilibrio è asintotica.

Nota: l’equazione (9.3) è autonoma, quindi le orbite nel piano delle fasi (x,\dot{x}) non possono intersecarsi, secondo quanto prescrive il teorema di unicità, e possono incontrarsi solo in un punto di equilibrio (orbita degenere), dove l’orbita (ed il moto corrispondente) ha termine. Tuttavia, contrariamente al caso dell’oscillatore armonico, poichè le soluzioni $(x(t),\dot{x}(t))$ e le orbite corrispondenti non si mantengono limitate, il piano (x,\dot{x}) non è completamente rappresentativo del comportamento del sistema. In particolare può sembrare che le orbite provenienti da certe regioni tendano asintoticamente ad avvicinarsi per $t \rightarrow +\infty$. Questa impressione è contraddetta dall’instabilità della soluzione di equilibrio (0,0) e quindi, per la linearità della (9.3), dall’instabilità rispetto alle condizioni iniziali di ogni soluzione dell’equazione. Questa apparente contraddizione sta nel fatto che il comportamento globale delle soluzioni può essere completamente osservato solo se si aggiunge l’asse del tempo ortogonalmente al piano (x,\dot{x}) , ovvero se si studiano le traiettorie corrispondenti alle soluzioni dell’equazione nello spazio delle fasi esteso (x,\dot{x},t) . In questo caso, più difficile da visualizzare, si potrebbe vedere che le traiettorie, corrispondenti ad orbite che nel piano delle fasi (x,\dot{x}) si avvicinano asintoticamente (e che costituiscono la loro proiezione sul piano), in realtà divergono esponenzialmente lungo la direzione parallela all’asse del tempo.

Il punto (0,0) prende il nome di PUNTO SELLA.

3. OSCILLATORE ARMONICO CON SMORZAMENTO LINEARE

Il modello matematico che viene qui presentato rappresenta una semplice “perturbazione” del modello conservativo dell’oscillatore armonico (§ 1), in cui si tiene conto della presenza di un effetto dissipativo, durante l’evoluzione del sistema, dovuto ad un termine di tipo lineare. L’esempio meccanico più semplice è quello di una massa m in moto traslatorio, sottoposta ad un campo di forze elastiche e ad una forza di resistenza viscosa dovuta al mezzo attraversato (ad es. l’aria). In questo caso l’equazione di moto assume la forma:

$$m\vec{a} = -k\vec{r} - b\vec{v} \quad ;$$

dove \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} sono, rispettivamente, i vettori posizione, velocità ed accelerazione e k , b , rispettivamente, la costante elastica ed il coefficiente di viscosità.

Scomponendo l'equazione vettoriale in un riferimento cartesiano ortogonale si ottengono tre equazioni scalari indipendenti del tipo:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} . \quad (10.1)$$

La (10.1) rappresenta la componente lungo l'asse x dell'equazione vettoriale; le altre componenti possono essere ottenute semplicemente sostituendo alla x le coordinate y e z . Ponendo $2h = \frac{b}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$ si ottiene la forma:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0 , \quad (10.2)$$

di cui studieremo nel seguito le soluzioni e le loro proprietà.

Un esempio elettrico è invece fornito da un circuito di tipo RLC , a componenti lineari concentrate, (Fig.1) in cui l'equazione di evoluzione per la carica q è:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 ,$$

dove, con $q = x$, $\frac{R}{L} = 2h$, $\frac{1}{LC} = \omega^2$ si ottiene ancora la (10.2)

In ogni caso la (10.2) può rappresentare la prima approssimazione (approssimazione lineare) per un qualunque sistema vibrante in modo unidimensionale rispetto ad una "configurazione" di equilibrio stabile, in cui si debba tenere conto anche di effetti dissipativi (Fig.2).

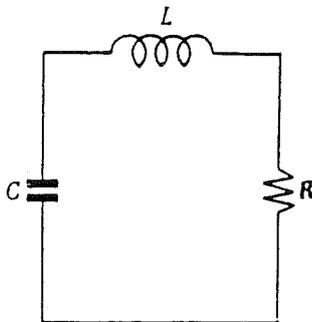


Fig.1

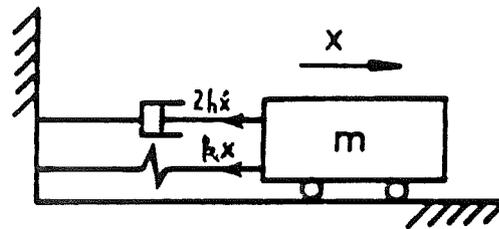


Fig.2

Soluzione esatta. Utilizzando il metodo generale per la ricerca delle soluzioni delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione per il polinomio caratteristico associato alla (10.2):

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0 ,$$

che ha soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2} .$$

Per $h \neq \omega$, la forma generale della soluzione della (10.2) è:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} , \quad (10.3)$$

dove A e B sono costanti reali o complesse coniugate arbitrarie e λ_1, λ_2 assumono valori reali o complessi coniugati a secondo che sia $h > \omega$ oppure $h < \omega$.

Se $h = \omega$, la forma generale della soluzione è:

$$x(t) = Ce^{-ht} + Dte^{-ht}, \quad (10.4)$$

dove C e D sono costanti reali arbitrarie.

Non discuteremo nel seguito il caso della (10.4) perché il comportamento qualitativo della soluzione non è significativamente diverso dalla situazione in cui $h > \omega$. Ci limiteremo perciò alle situazioni di smorzamento “debole” e “forte”.

Oscillatore armonico “debolmente” smorzato $h < \omega$

Questo è il caso in cui il termine “elastico” prevale sullo smorzamento, ovvero $h < \omega$. Se poniamo $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, otteniamo $\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega_1$ e, sostituendo nella (10.3):

$$x(t) = e^{-ht} (Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t});$$

ricorrendo alle formule di Eulero, si può scrivere la soluzione per mezzo di funzioni reali, ad esempio:

$$x(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (10.5)$$

dove A ed α , che rappresenta la fase iniziale, sono le due nuove costanti arbitrarie; quindi, per $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-ht} [h \cos(\omega_1 t + \alpha) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha)]. \quad (10.6)$$

La (10.5) è fattorizzata in due funzioni: una periodica e l'altra monotona decrescente; $x(t)$ ha quindi alcune caratteristiche periodiche, come il ripetersi dei massimi e minimi relativi (ogni $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$) e degli zeri (ogni $T/2$), ma i valori assunti non si ripetono e decadono esponenzialmente (Fig.3):

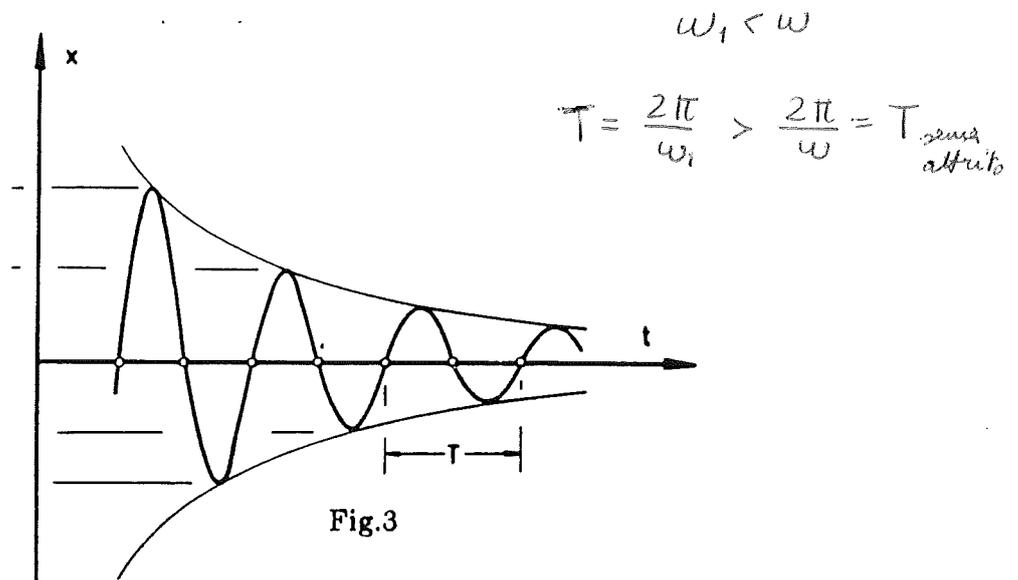


Fig.3

Una misura di questo decadimento è fornita dal decremento logaritmico d :

$$d := \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = hT ,$$

un numero puro e, quindi, un parametro indipendente dalla scelta dell'unità di misura per il tempo. La curva $z = Ae^{-hT}$ è l'involuppo della soluzione $x(t)$. Si noti che $\omega_1 < \omega$ e quindi che T risulta maggiore del corrispondente periodo dell'oscillatore armonico conservativo; T cresce al crescere di h e tende ad infinito per $h \rightarrow \omega$, quando viene perduta ogni caratteristica di periodicità.

La presenza del termine di smorzamento modifica anche la relazione di fase fra x ed \dot{x} , che può essere determinata riscrivendo opportunamente la (10.6):

$$\dot{x}(t) = -\mathcal{A}\omega e^{-ht} \left[\frac{h}{\omega} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\omega_1 t + \alpha) \right];$$

ricordando che $\omega^2 = h^2 + \omega_1^2$, si può porre:

$$\frac{h}{\omega} = \sin\beta \quad , \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \cos\beta \quad ,$$

ed ottenere per la (10.6) la forma:

$$\dot{x}(t) = -\mathcal{A}\omega e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \beta) ; \quad (10.7)$$

si può così osservare che le fasi dei fattori periodici in (10.5) e (10.7) non sono in quadratura come nel caso conservativo (§ 8), ma si manifesta la presenza di una fase aggiuntiva, β , dovuta allo smorzamento.

Analisi qualitativa: caso "debolmente smorzato"

Per analizzare le orbite descritte nel piano delle fasi dalle soluzioni (10.5) , (10.6) è comodo introdurre una nuova coppia di coordinate (u, v) , per mezzo della seguente trasformazione lineare, invertibile, [An-Kh] :

$$\begin{cases} u = \omega_1 x \\ v = hx + \dot{x} \end{cases} ; \quad (10.8)$$

nel nuovo piano delle fasi (u, v) le soluzioni assumono la forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{A}\omega_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha) , \\ v(t) &= -\mathcal{A}\omega_1 e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha) ; \end{aligned}$$

passando alle coordinate polari:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad , \quad \varphi = \omega_1 t \quad ,$$

si ottiene l'equazione per le orbite:

$$r = \mathcal{A}\omega_1 e^{-\frac{h}{\omega_1} \varphi} . \quad (10.9)$$

L'equazione (10.9) descrive, al variare di \mathcal{A} , una famiglia di spirali logaritmiche nel piano (u,v) . Tornando al piano delle fasi (x,\dot{x}) tramite l'inversa della trasformazione (10.8), la famiglia delle orbite viene "deformata", ma mantiene la caratteristica spiralfornne con la stessa origine (il punto $(0,0)$ è invariante secondo la (10.8)), (Fig.4). Le orbite hanno un'infinità numerabile di intersezioni con gli assi, che corrispondono ad "attraversamenti" dell'asse $x=0$, e ad annullamenti della velocità, o "arresti", $\dot{x}=0$; questo descrive bene l'andamento di oscillazione smorzata della soluzione, che converge asintoticamente all'origine (estinzione del moto). Si noti che, indicata con \vec{v} la velocità di fase, che è un vettore nel piano x,\dot{x} , si ha:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1+4h^2)\dot{x}^2 + 4h\omega^2 x\dot{x} + \omega^4 x^2},$$

che si annulla solo nell'origine, unica soluzione stazionaria del problema.

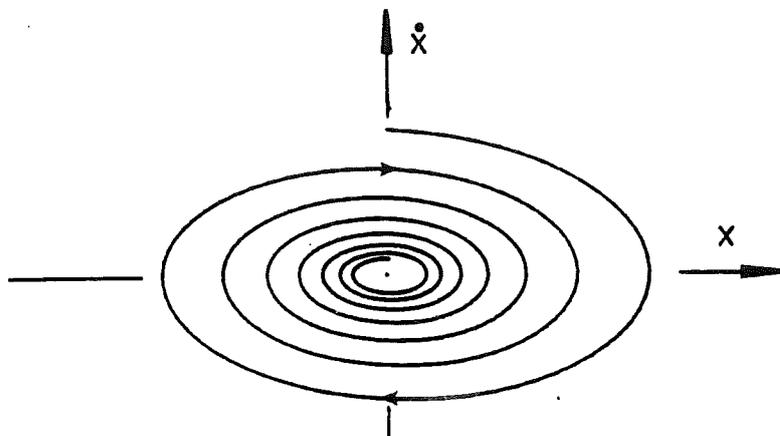


Fig.4

L'origine $(0,0)$ nel piano delle fasi x,\dot{x} (Fig.4) è l'unica soluzione stazionaria per l'equazione (10.2) ed è asintoticamente stabile. Il punto $(0,0)$ prende il nome di SPIRALE STABILE o FUOCO STABILE.

Oscillatore armonico "fortemente" smorzato

$$h > \omega$$

In questo caso il termine di smorzamento "prevala" su quello elastico, cioè $h > \omega$. Le radici dell'equazione algebrica associata all'equazione differenziale (10.2) sono entrambe reali e, se poniamo:

$$q_1 = -\lambda_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad q_2 = -\lambda_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

avremo $q_2 > q_1 > 0$ e la forma generale della soluzione avrà la forma:

$$x(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (10.10)$$

$$A = \frac{v_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} ; \quad -B = \frac{v_0 + q_1 x_0}{q_2 - q_1}$$

Cerchiamo di interpretare il comportamento della (10.10) in dipendenza dalla scelta dei dati iniziali, [An-Kh] :

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad , \quad (10.11)$$

risolvendo il PVI per (10.10)+(10.11):

$$x(t) = \frac{v_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} - \frac{v_0 + q_1 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t} \quad , \quad (10.12)$$

$$\dot{x}(t) = -q_1 \frac{v_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + q_2 \frac{v_0 + q_1 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t} \quad . \quad (10.13)$$

Vediamo se esiste un tempo $t_1 > 0$, finito, per cui il sistema attraversa l'asse $x = 0$ ed un tempo $t_2 > 0$, finito, in cui il sistema annulla la propria velocità ($\dot{x} = 0$). Tali tempi esistono se le seguenti equazioni ammettono soluzione:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{(q_2 - q_1) t_1} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{v_0 + q_2 x_0} \quad , \quad (10.14)$$

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{(q_2 - q_1) t_2} = 1 + \frac{v_0(q_2 - q_1)}{q_1(v_0 + q_2 x_0)} \quad ; \quad (10.15)$$

ricordando che $q_2 > q_1$, l'esponenziale in (10.14) e (10.15) è una funzione monotona crescente, sempre maggiore di 1 per tempi positivi. Quindi, la (10.14) ammette un'unica soluzione se e solo se:

$$\frac{x_0}{v_0 + q_2 x_0} < 0 \quad ,$$

e la (10.15), analogamente, se e solo se:

$$\frac{v_0}{v_0 + q_2 x_0} > 0 \quad .$$

Possiamo sintetizzare il diverso andamento delle soluzioni, al variare delle condizioni iniziali, suddividendo il piano (x_0, v_0) , rappresentativo di ogni possibile scelta delle condizioni stesse, in tre regioni (Fig.5):

- le soluzioni provenienti dalla regione I subiscono un "arresto" ($\dot{x} = 0$), ma non attraversano l'asse $x = 0$ (vedi Fig.6 per l'andamento temporale della $x(t)$ corrispondente);
- le soluzioni provenienti dalla regione II non subiscono "arresti" né attraversano l'asse $x = 0$, ma tendono direttamente a zero, (Fig.7);
- le soluzioni provenienti dalla regione III subiscono un "arresto" ed un "attraversamento" dell'asse $x = 0$, prima di annullarsi asintoticamente, (Fig.8).

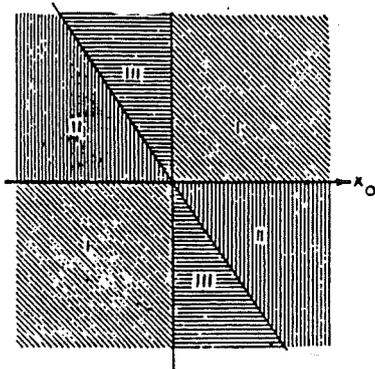


Fig.5



Fig.6

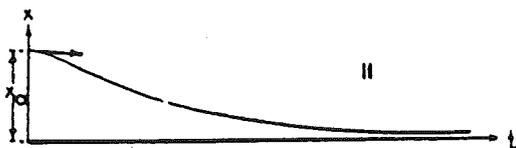


Fig.7

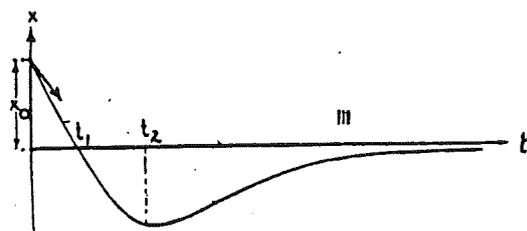


Fig.8

Analisi qualitativa: caso “fortemente smorzato”

Cerchiamo adesso di rappresentare le orbite generate dalle soluzioni (10.12) e (10.13) nel piano delle fasi (x, \dot{x}) , riprendendo, per semplicità, l'espressione (10.10) per x e la sua derivata per \dot{x} :

$$x = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t} \quad , \quad (10.16)$$

$$\dot{x} = -q_1 Ae^{-q_1 t} - q_2 Be^{-q_2 t} \quad ; \quad (10.17)$$

per eliminare il tempo consideriamo le combinazioni lineari:

$$\dot{x} + q_1 x \quad , \quad \dot{x} + q_2 x \quad ;$$

avremo:

$$\dot{x} + q_1 x = -B(q_2 - q_1)e^{-q_2 t} > 0 \quad ,$$

$$\dot{x} + q_2 x = A(q_2 - q_1)e^{-q_1 t} > 0 \quad ;$$

sostituendo ad A e B i valori calcolati per il PVI:

$$\left(\frac{\dot{x} + q_1 x}{v_0 + q_1 x_0} \right)^{q_1} = e^{-q_1 q_2 t} \quad ,$$

$$\left(\frac{\dot{x} + q_2 x}{v_0 + q_2 x_0} \right)^{q_2} = e^{-q_1 q_2 t} \quad ;$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{q_1} &= e^{-q_1 q_2 t} \\ \left(\frac{u}{u_0} \right)^{q_2} &= e^{-q_1 q_2 t} \end{aligned} \quad (10.18)$$

introducendo, tramite una trasformazione lineare, il seguente cambiamento di coordinate nel piano delle fasi:

$$\dot{x} + q_1 x = y \quad , \quad \dot{x} + q_2 x = u \quad ,$$

le (10.18) possono essere sintetizzate nella seguente:

$$y = y_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{q_2}{q_1} > 1 \quad ,$$

dove y_0 e u_0 sono i valori iniziali delle nuove coordinate y, u .

$$\left(\frac{y}{y_0} \right)^{q_1} = \left(\frac{u}{u_0} \right)^{q_2}$$

$$y = y_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^{\frac{q_2}{q_1}}$$

Ponendo $\frac{u}{u_0} = z$, la famiglia di orbite nel piano y, z è una famiglia ad un parametro (y_0) di curve di tipo “parabolico”, (Fig.9):

$$y = y_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^\alpha$$

$$y = y_0 z^\alpha$$

Tornando al piano delle fasi x, \dot{x} le "parabole" risultano deformate, ma mantengono alcune delle caratteristiche individuate nel piano y, z , (Fig.10), giustificando così l'uso di questi formali cambiamenti di coordinate:

i) tutte le orbite, tranne quella corrispondente a $y_0 = \infty$, sono tangenti nell'origine all'asse delle z ($y = 0$). Infatti:

$$\frac{dy}{dz} = y_0 \alpha z^{(\alpha-1)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=0} = 0 ;$$

nel piano x, \dot{x} tali orbite risultano tangenti alla retta $\dot{x} + q_1 x = 0$.

ii) Le orbite degenerano in linee rette per $y_0 = 0$ e $y_0 = \infty$:

$$y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ (asse delle } z \text{ / retta } \dot{x} + q_1 x = 0, \text{ nel piano } x, \dot{x})$$

$$y_0 = \infty \quad \Rightarrow \quad z = 0 \text{ (asse delle } y \text{ / retta } \dot{x} + q_2 x = 0, \text{ nel piano } x, \dot{x}).$$

iii) Le orbite volgono la loro convessità verso l'asse delle z (la retta $\dot{x} + q_1 x = 0$ nel piano x, \dot{x}), poiché y cresce più velocemente di z .

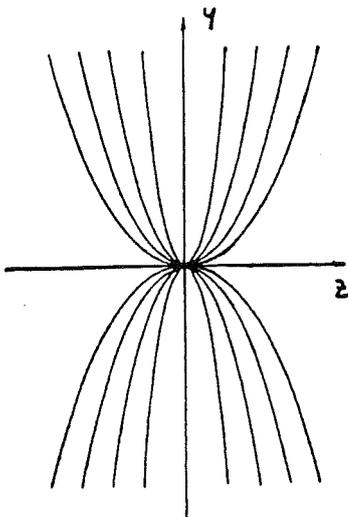


Fig.9

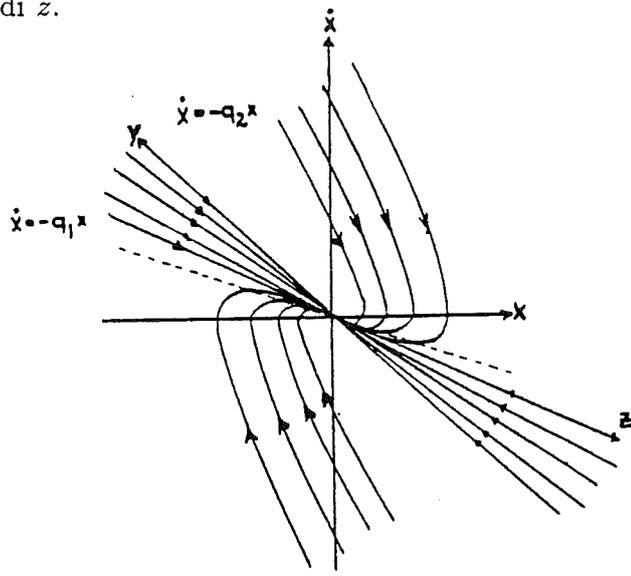


Fig.10

L'origine $(0,0)$ nel piano delle fasi x, \dot{x} (Fig.10) è l'unica soluzione stazionaria del problema. Il punto $(0,0)$ nel piano x, \dot{x} (Fig.10) prende il nome di **NODO STABILE**.

11. OSCILLATORE ARMONICO CON "ATTRITO NEGATIVO"

In questo paragrafo ci limiteremo a studiare due modelli meccanici ed un circuito elettrico che giustificano, da un punto di vista applicativo, lo studio di un'equazione del tipo:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (11.1)$$

dove $h < 0$, contrariamente all'ipotesi fatta nel §10. Considerando il comportamento dell'energia, se si pone:

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}, \quad \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \dot{x}(\dot{x}'' + \omega^2 x) = \\ &= \dot{x}(-2h\dot{x}) = -2h\dot{x}^2 > 0 \end{aligned}$$

si ottiene facilmente:

$$\frac{dE}{dt} = -2h\dot{x}^2 > 0, \text{ se } h < 0;$$

questo significa che nel sistema in esame viene "immessa" energia dall'esterno.

Esempi meccanici. Gli esempi che trattiamo qui, come il successivo circuito elettrico, sono tratti dal testo indicato come [An-Kh] in Bibliografia:

a) nel primo, (Fig.1), consideriamo una massa m agganciata a due pareti fisse per mezzo di due molle, che consideriamo, per semplicità, di caratteristiche uguali; la massa è appoggiata su un nastro trasportatore, che si muove con velocità uniforme v_0 . Se indichiamo con x lo spostamento della massa dalla sua posizione di equilibrio e teniamo conto delle dissipazioni dovute all'attrito interno delle molle ed alla resistenza dell'aria con un termine lineare, di tipo viscoso, possiamo concludere che sul "sistema" (che ha il comportamento di un oscillatore armonico smorzato) agisce dall'esterno una forza F dovuta alla presenza dell'attrito nel contatto con il nastro trasportatore. In generale, dovremo considerare la forza F (in modulo) come dipendente dalla velocità relativa fra massa e nastro: $F = F(v_0 - \dot{x})$. L'equazione di moto del sistema è quindi:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + 2kx = F(v_0 - \dot{x}), \quad (11.1)$$

dove b , k sono, rispettivamente, il coefficiente di viscosità e la costante elastica.

Per \dot{x} "piccole", cioè per $\dot{x} \ll v_0$, si può sviluppare F nelle potenze di \dot{x} :

$$F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) + o(\dot{x}),$$

e, introducendo la nuova variabile

$$x = x + \frac{F(v_0)}{2k}, \text{ ottenere l'equazione di moto:}$$

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + 2kx = 0. \quad (11.2)$$

Il segno del coefficiente $b + F'(v_0)$ dipende dall'andamento della funzione F al variare del suo argomento. Un comportamento tipico, per superfici asciutte, è quello descritto in Fig.2: la $F(u)$ è fortemente decrescente per u non troppo elevate.

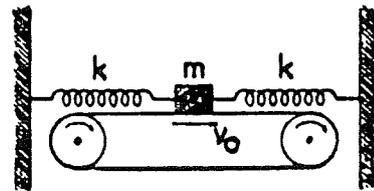


Fig.1

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + 2kx &= F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) \\ m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + 2kx - F(v_0) &= 0 \end{aligned}$$

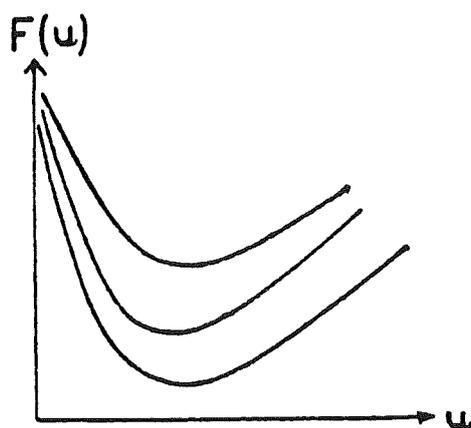


Fig.2

In tale situazione, quindi $F'(v_0) < 0$ ed anche $b + F'(v_0)$ può essere negativo.

Nota: la funzione F , che rappresenta la dipendenza della forza di attrito dalla velocità relativa fra le superfici a contatto, modifica in parte il modello per l'attrito generalmente considerato nei Corsi e nei testi di Fisica I (dove la forza è considerata costante rispetto alla velocità relativa, in condizioni dinamiche, ma discontinua nella diminuzione dal valore statico a quello dinamico), ma fornisce ugualmente una descrizione corretta della fenomenologia fisica.

b) Il secondo modello meccanico che consideriamo è il pendolo di Froude: si tratta di un pendolo fisico (Fig.3), incernierato, con attrito, ad un'asta che ruota con velocità angolare costante ω . Indicando con M il momento che l'asta applica al pendolo, e che sarà funzione della velocità angolare relativa, l'equazione di moto per "piccole" oscillazioni sarà:

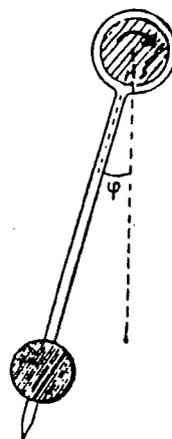


Fig.3

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\varphi = M(\omega - \dot{\varphi}),$$

con ovvio significato dei parametri introdotti. Introducendo lo sviluppo di M in potenze di $\dot{\varphi}$ ed il cambiamento di variabile:

$$\vartheta = \varphi - \frac{M(\omega)}{mgl},$$

otteniamo un'equazione di moto del tutto simile alla (11.2):

$$I\ddot{\vartheta} + [b + M'(\omega)]\dot{\vartheta} + mgl\vartheta = 0; \quad (11.3)$$

anche in questo caso ci sono intervalli del dominio di M in cui tale funzione è decrescente e, per valori di b sufficientemente piccoli è possibile che $b + M'(\omega)$ sia negativo.

Modello elettrico. Consideriamo, (Fig.4), un circuito composto da un triodo, un circuito oscillante RLC ed un "feedback" dovuto all'induzione della bobina L_1 nel circuito di placca. Trascurando la corrente di griglia, possiamo scrivere l'equazione per la differenza di potenziale V fra le armature del condensatore:

$$LC\ddot{V} + RC\dot{V} + V = \mathcal{M}\dot{I}_a, \quad (11.4)$$

dove la differenza di potenziale aggiuntiva, $\mathcal{M}\dot{I}_a$ (\mathcal{M} è il coefficiente di mutua induzione), è dovuta all'induzione sulla bobina L , prodotta dalla variazione della corrente di placca I_a nella bobina L_1 . Trascurando la resistenza in quella parte del circuito che contiene il condensatore, si può affermare che la differenza di potenziale sul condensatore, V , è la stessa che c'è fra griglia ed anodo. Considerando, per semplicità, I_a indipendente dal "voltage" di placca, possiamo ipotizzare che la corrente di placca dipenda solo da V : $I_a = f(V)$; quindi:

$$\dot{I}_a = g_m \dot{V}, \quad \text{dove } g_m = \frac{df}{dV}; \quad (11.5)$$

Utilizzando la (11.5) in (11.4) si ottiene:

$$LC\ddot{V} + (RC - \mathcal{M}g_m)\dot{V} + V = 0; \quad (11.6)$$

ci sono intervalli in cui g_m è costante e positivo, (Fig.5), e, per \mathcal{M} abbastanza grande, il coefficiente $RC - \mathcal{M}g_m$ può diventare negativo.

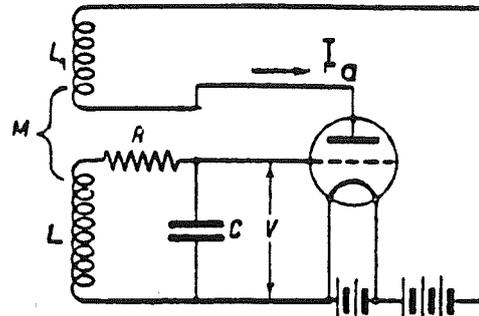


Fig.4

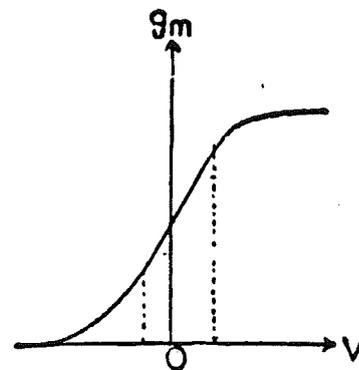


Fig.5

Analisi qualitativa: caso con "attrito negativo"

Come abbiamo visto, le equazioni (11.2), (11.3) e (11.6) sono riassumibili in un'equazione della forma:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad h < 0.$$

Le soluzioni $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ sono del tipo (10.5)+(10.6) nel caso $\omega > |h|$ e del tipo (10.16)+(10.17) nel caso $\omega < |h|$, ricordando naturalmente che $h < 0$ e manifestando, quindi, un comportamento "rovesciato" col passare del tempo. Nel primo caso ($\omega > |h|$),

Tornando alla (12.9), cerchiamo una soluzione particolare $z^*(t)$ per l'equazione completa (non omogenea); poiché la funzione $e^{i\omega_0 t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata alla (12.9), proviamo la forma:

$$z^*(t) = Cte^{i\omega_0 t}; \quad (12.11)$$

calcolata la derivata seconda:

$$\ddot{z}^*(t) = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 C t e^{i\omega_0 t},$$

si ottiene facilmente:

$$\ddot{z}^* + \omega_0^2 z^* = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t}. \quad (12.12)$$

Confrontando la (12.12) con la (12.9), si ottiene il valore di C da introdurre nella (12.11):

$$C = -\frac{iA_0}{2\omega_0}.$$

Possiamo quindi ottenere la soluzione particolare x^* della (12.8), prendendo la parte immaginaria della (12.11), ovvero:

$$x^*(t) = \text{Im}z^*(t) = -\frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (12.13)$$

La soluzione completa della (12.8) è quindi:

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t),$$

dove, contrariamente al caso con smorzamento, la $x_{om}(t)$ non è più un termine “transitorio”, ma rappresenta un'oscillazione armonica (limitata) permanente del sistema, cui si sovrappone il termine di oscillazione (in quadratura di fase con l’“ingresso”) di ampiezza linearmente crescente nel tempo, dovuto alla risonanza con il termine forzante. In conclusione, ricordando la (1.2), avremo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (12.14)$$

Analisi qualitativa dell' equazione (12.8)

Occorre fare, prima di tutto, alcune considerazioni sulle dimensioni dello spazio delle fasi per un'equazione del tipo della (12.4). La (12.4) è un'equazione non autonoma, ma il termine in cui compare la dipendenza dal tempo, $\sin(\omega_0 t)$, è una funzione analitica del tempo e quindi soddisfa ampiamente le ipotesi richieste dal Teorema di esistenza ed unicità (cfr. teoria delle equazioni differenziali ordinarie). La (12.4) può essere, quindi, ricondotta ad un sistema autonomo di tre equazioni differenziali del primo ordine, nelle incognite:

$$x=x_1 \quad , \quad \dot{x}=x_2 \quad , \quad t=x_3 \quad ,$$

che prende la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2hx_2 - \omega^2 x_1 + A_0 \sin(\omega_0 x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = 1 \end{cases} \quad (12.15)$$

Lo spazio delle fasi della (12.15) ha dimensione 3 (3D) e le proiezioni delle orbite sul piano (x, \dot{x}) , benché significative, non danno un'informazione completa sul comportamento delle soluzioni. In particolare, tali proiezioni possono intersecarsi, contrariamente ai casi autonomi a dimensione 2 (2D), fin qui studiati. Tali intersezioni non contraddicono il teorema di unicità, perché i comuni valori di x ed \dot{x} , sono assunti in tempi diversi da soluzioni provenienti da differenti condizioni iniziali, come si vedrebbe nella rappresentazione tridimensionale nello spazio (x, \dot{x}, t) .

Si osservi in Fig.5, al proposito, la proiezione sul piano x, \dot{x} di un oscillatore lineare forzato che mostra un transitorio ad alta frequenza, che conduce ad una soluzione asintotica periodica, rappresentata dalla circonferenza.

Mappa di Poincaré

Un metodo semplice e particolarmente interessante di studiare il comportamento delle soluzioni di oscillatori sottoposti ad un'azione forzante periodica di periodo T , è fornito dalla mappa di Poincaré, ([Th-St], pp.65-67).

Si tratta di considerare una famiglia di piani, nello spazio x, \dot{x}, t , ortogonali all'asse t e distanziati fra loro del periodo del forzante, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, (Fig.6).

Una soluzione del problema, periodica con lo stesso periodo T fin dall'istante iniziale $t=0$, intersecherebbe ogni piano nello "stesso"

punto di coordinate x, \dot{x} . Ogni soluzione del problema (12.4) (o, equivalentemente di (12.15)) interseca i piani in punti diversi, per la durata del transitorio, per assestarsi poi sulla soluzione asintotica di periodo T , che si comporta come sopra descritto. Se osserviamo la famiglia di piani "stroboscopicamente", cioè ortogonalmente rispetto al piano x, \dot{x} "dall'alto" dell'asse t , si può fotografare la situazione, scremando l'immagine dalle "macchioline" corrispondenti al transitorio. Si rileverebbe così un'unico punto, che rap-

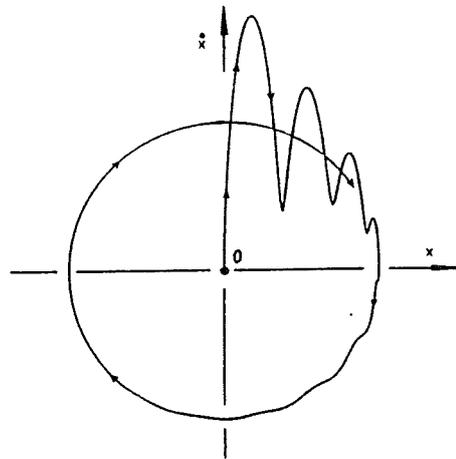


Fig.5

il sistema manifesta delle oscillazioni di ampiezza crescente al variare del tempo (Fig.6), che, nel piano delle fasi x, \dot{x} (Fig.7) sono rappresentate da famiglie di spirali con centro nell'origine e percorse nel verso centrifugo.

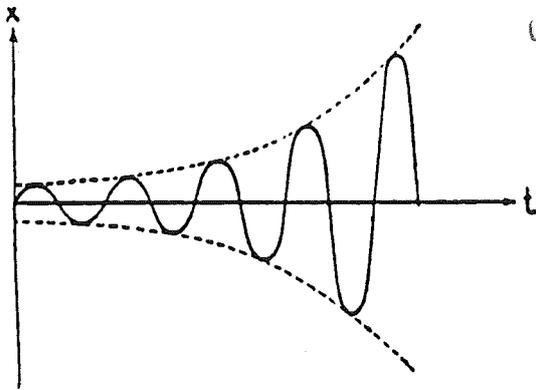


Fig.6

$$\omega > |h|$$

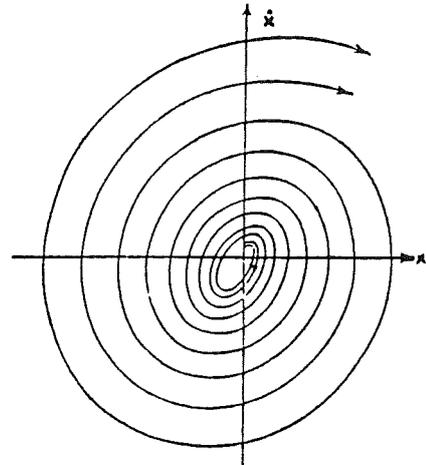


Fig.7

Nel secondo caso ($\omega < |h|$), le soluzioni si allontanano dall'origine senza oscillare e sono rappresentate nel piano delle fasi x, \dot{x} da una famiglia di curve di tipo "parabolico", analoghe a quelle di Fig.10 di §10, ma percorse nel verso uscente dall'origine.

L'origine (0,0) nel piano delle fasi x, \dot{x} (Fig.7 e Fig.8) è l'unica soluzione stazionaria in ciascuno dei due problemi.

Il punto (0,0) nel piano x, \dot{x} (caso $\omega > |h|$) (Fig.7) prende il nome di SPIRALE o FUOCO INSTABILE.

Il punto (0,0) nel piano x, \dot{x} (caso $\omega < |h|$) (Fig.8) prende il nome di NODO INSTABILE.

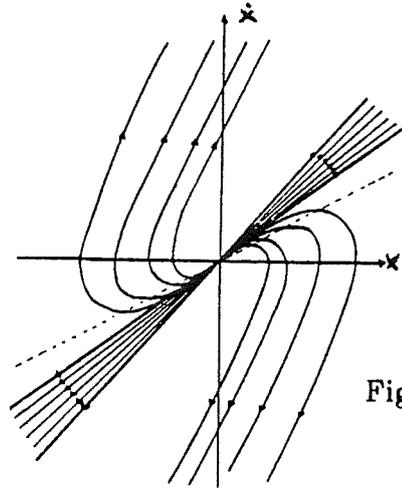


Fig.8

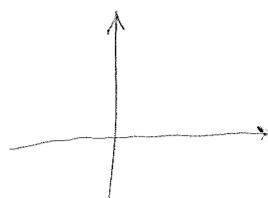
$$\omega < |h|$$

12. OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA LINEARE

Consideriamo adesso un sistema che sia caratterizzabile come un oscillatore armonico smorzato, la cui evoluzione sia quindi guidata da un'equazione del tipo della (3.2). Supponiamo che sul sistema sia applicata un'azione esterna, indipendente dallo stato del sistema stesso, rappresentabile attraverso una funzione nota del tempo $f(t)$.

Fare il campo delle direzioni

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ \dot{y} = \frac{h}{k} y \end{cases} \quad k > h > 0$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{k} \frac{y}{x}$$

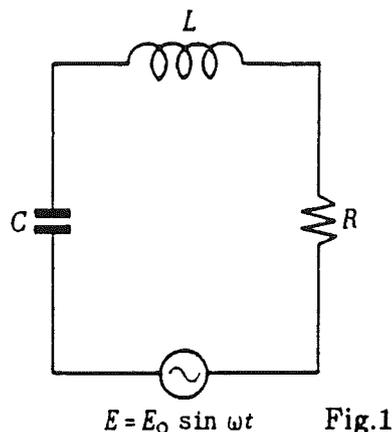
{ tangente all'autospazio
corrispondente all'autovettore
massimo

L'equazione di evoluzione assume la forma:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t) . \quad (12.1)$$

Se il problema è di carattere meccanico, si può pensare all'azione di una forza esterna su un sistema con caratteristiche elastiche, in cui si tenga conto anche di dissipazioni per viscosità del mezzo circostante. Per problemi nell'ambito di circuiti *RLC*, si può pensare di aver applicato a due estremi del circuito un generatore di forza elettromotrice, in generale variabile in modo noto al variare del tempo, (Fig.1).

Nota: nella terminologia della teoria dei sistemi $f(t)$ viene definita come ingresso o "input" e la soluzione $x(t)$ prende il nome di risposta del sistema o uscita, oppure "output".



Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari non omogenee, [Braun], è noto che la soluzione generale della (12.1) è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata $x_{om}(t)$ (data dalla (10.3), se $h \neq \omega$) più una soluzione particolare della equazione non omogenea (12.1), $x^*(t)$:

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t) . \quad (12.2)$$

e, quindi:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{om}(t) + \dot{x}^*(t) . \quad (12.3)$$

Dal comportamento asintotico della soluzione dell'equazione omogenea:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{om}(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}_{om}(t) = 0 ,$$

si deduce che x_{om} influenza x solo per un periodo "transitorio" e che il comportamento asintotico di x (e di \dot{x}) coincide con quello di x^* .

Ci limiteremo, qui, a studiare il comportamento di $x^*(t)$ nel caso particolarmente interessante in cui $f(t)$ sia una funzione armonica del tempo, caso in cui può aver luogo, per particolari valori dei parametri presenti nell' equazione, il cosiddetto fenomeno della risonanza.

Per un'analisi più ampia del fenomeno fisico ed una dettagliata rassegna dei più noti episodi di carattere "catastrofico", rimandiamo al già citato [Braun] (pp.167-170).

Ricordiamo, comunque, gli episodi dei crolli del ponte di Tacoma (Washington, USA, 1/7/1940), che fu anche documentato cinematograficamente, e del ponte di Broughton (Manchester, Inghilterra, 1831); per il versante "positivo" ricordiamo la possi-

$$\dot{x}^* = C\omega_0 \cos(\omega_0 t - \gamma)$$

$$\ddot{x}^* = -C\omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma)$$

$$-C\omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) + 2hC\omega_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) + \omega^2 C \sin(\omega_0 t - \gamma) = A_0 \sin(\omega_0 t)$$

bilità di amplificare un segnale in arrivo, variando opportunamente la frequenza propria di oscillazione del circuito *RLC* ricevente (ad esempio variandone la capacità, come nei comuni apparecchi radio).

$$\begin{aligned} C(\omega^2 - \omega_0^2) \sin(\omega_0 t - \gamma) &= A_0 \sin(\omega_0 t - \gamma) \cos \gamma \\ 2hC\omega_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) &= A_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) \sin \gamma \end{aligned}$$

Risonanza. Studiamo l'equazione:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t), \quad (12.4)$$

cercando una soluzione particolare x^* , del tipo:

$$x^*(t) = C \sin(\omega_0 t - \gamma), \quad C > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (12.5)$$

Nota: lo studio dell'equazione (12.4), con il termine forzante di tipo armonico, ha interesse generale, in quanto ci si può ricondurre ad equazioni di questo tipo se si sviluppa in serie di Fourier la $f(t)$ nella (12.1).

Sostituendo in (12.4) ed avendo l'accortezza di utilizzare l'identità:

$$A_0 \sin(\omega_0 t) = A_0 \sin[(\omega_0 t - \gamma) + \gamma] = A_0 \sin(\omega_0 t - \gamma) \cos \gamma + A_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) \sin \gamma,$$

si ottengono le seguenti equazioni, che devono essere soddisfatte dai parametri C e γ :

$$\begin{cases} 2C\omega_0 h = A_0 \sin \gamma \\ C(\omega^2 - \omega_0^2) = A_0 \cos \gamma \end{cases};$$

la soluzione x^* ha quindi ampiezza:

$$C = \frac{|A_0|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}}, \quad (12.6)$$

e fase γ , tale che:

$$\tan \gamma = \frac{2\omega_0 h}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (12.7)$$

Per valori di ω_0 lontani da ω , la soluzione del problema esibisce un comportamento piuttosto complesso nel transitorio, per tendere poi, per tempi grandi, alla soluzione asintotica sinusoidale di periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$, (Fig.2).

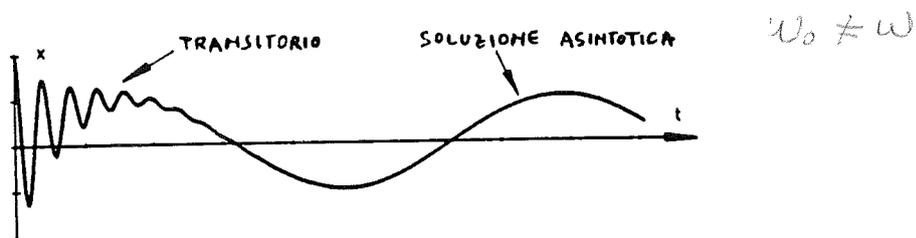


Fig.2

Valori della frequenza di oscillazione del termine forzante molto vicini alla frequenza di

oscillazione propria del sistema ($\omega_0 \simeq \omega$) producono una soluzione asintotica in quadratura di fase con l'ingresso stesso ($\tan \gamma \rightarrow \infty$), (Fig.3).

L'ampiezza C è massima per $\omega_0 = \omega$ ed il suo valore cresce al diminuire del coefficiente di smorzamento h , (Fig.4), raggiungendo anche valori di "rottura" per il sistema.

La situazione limite in cui $\omega_0 = \omega$ prende il nome di RISONANZA ed in questo caso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C = +\infty .$$

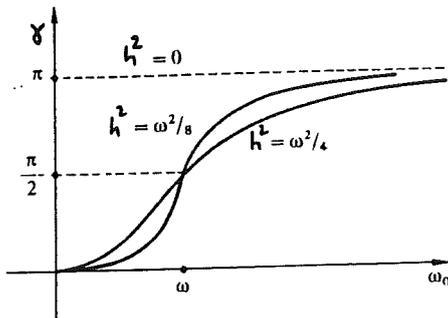


Fig.3

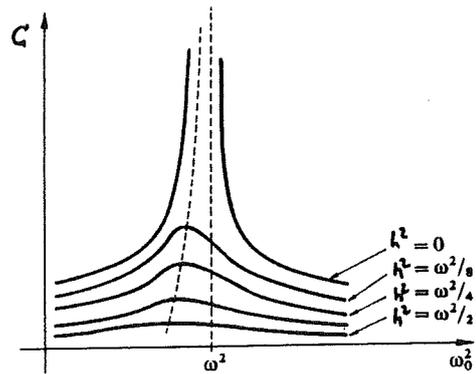


Fig.4

Risonanza in assenza di smorzamento

Valutiamo adesso la dipendenza dal tempo dell'ampiezza C nel caso in cui $h=0$. Consideriamo, cioè, un'equazione del tipo:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t) , \quad (12.8)$$

in cui il coefficiente dell'oscillatore $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è uguale alla pulsazione del termine forzante sinusoidale. Per calcolare la soluzione della (12.8) ricorreremo all'equazione complessa:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A_0 e^{i\omega_0 t} , \quad z = y + ix , \quad (12.9)$$

di cui la (12.8) costituisce la parte immaginaria. Per la linearità delle equazioni otterremo quindi la soluzione $x(t)$ come:

$$x(t) = \text{Im}z(t) . \quad (12.10)$$

Nota: Lo stesso risultato è facilmente ottenibile anche lavorando direttamente sulla sola equazione reale (12.8), ma si preferisce usare qui, come esercizio, la tecnica delle equazioni complesse, molto utilizzata nell'analisi dei circuiti oscillanti per la loro maggiore semplicità formale. In particolare, qui, il termine forzante della (12.9) è più semplice da derivare della corrispondente funzione armonica in (12.8).

presenta la soluzione con lo stesso periodo T del termine forzante, cui corrisponde, come proiezione sul piano x, \dot{x} , una curva chiusa semplice, (Fig.7).

Il metodo qui esposto rappresenta un caposaldo dell'analisi qualitativa, in particolare per problemi riguardanti oscillatori nonlineari, sottoposti ad un'azione forzante periodica, per i quali non è possibile in generale esprimere la soluzione per mezzo di funzioni "elementari" note.

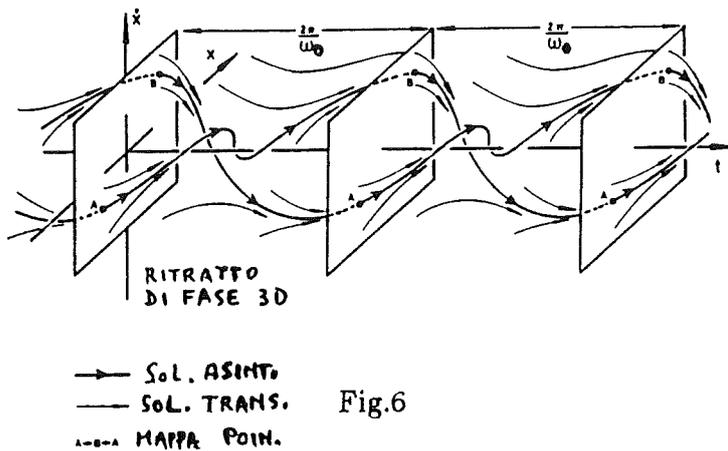


Fig.6

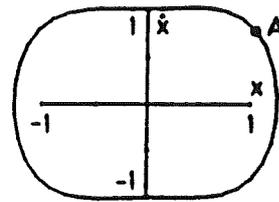


Fig.7

Nei casi nonlineari è frequente il caso di soluzioni asintotiche periodiche di periodo multiplo di T , che sono dette soluzioni subarmoniche: le subarmoniche di periodo $2T$ manifestano una mappa di Poincaré (sempre "scremate" del transitorio) in cui si osservano due punti A, B, cui corrisponde nella proiezione sul piano x, \dot{x} una curva chiusa dotata di un cappio, (Fig.8).

Per subarmoniche di ordine 3 la mappa di Poincaré presenta tre punti e la proiezione sul piano x, \dot{x} è una curva chiusa, dotata di due cappi, etc..Il metodo è quindi molto efficace nell'aiutare ad identificare le risposte periodiche ed il loro tipo di periodicità in situazioni del tutto generali.

Ulteriori potenzialità di questo metodo saranno brevemente affrontate nel capitolo dedicato agli oscillatori nonlineari.

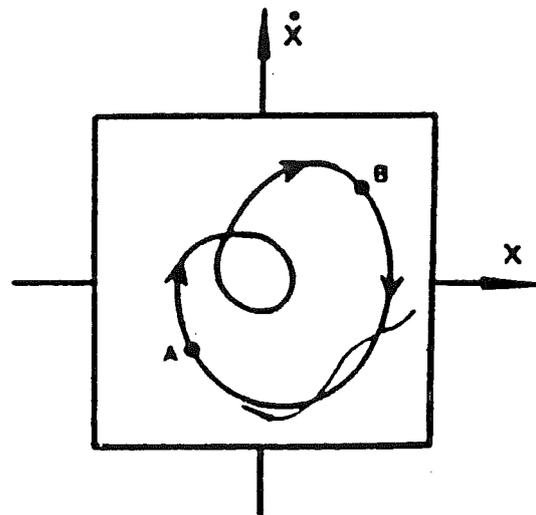


Fig.8

13. PENDOLO NONLINEARE

Consideriamo, come primo esempio di tipo nonlineare, il problema del moto di

$$m\ddot{s} = -mg \sin\varphi$$

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi$$

un pendolo rigido, (Fig.1). Indicato con θ l'angolo che l'asta forma con la verticale, l'equazione di moto assume la forma ben nota:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0, \quad (13.1)$$

dove $\omega^2 = \frac{g}{l}$, g è l'accelerazione di gravità ed l la lunghezza dell'asta. La trattazione del problema (13.1), che viene di solito svolta nei corsi di Fisica I, non va molto oltre il caso approssimato delle "piccole oscillazioni" attorno alla configurazione di equilibrio stabile $\theta = 0$, riconducendo la (13.1) al caso dell'oscillatore armonico.

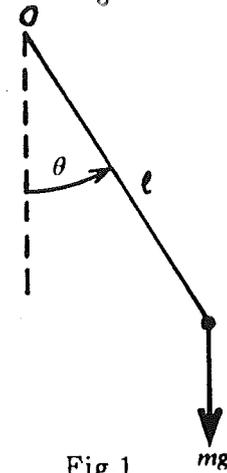


Fig.1

La ricerca di una soluzione esatta del problema non può essere svolta con i semplici metodi dei casi lineari, perché non esiste una formula generale per le soluzioni di equazioni nonlineari e, nel caso della (13.1), tale soluzione non può essere espressa per mezzo di funzioni elementari.

Un metodo generale per tutti i problemi conservativi unidimensionali (applicabile quindi alla (13.1)) consiste nell'integrare per quadrature la (13.1), ottenendo l'espressione della conservazione dell'energia meccanica totale del sistema, E :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos\theta = E; \quad (13.2)$$

ponendo $-\omega^2 \cos\theta = U(\theta)$, energia potenziale del sistema, si ottiene l'espressione:

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega^2 \cos\theta = 2E \quad \dot{\theta} = \sqrt{2(E - U(\theta))}, = \sqrt{2E + 2\omega^2 \cos\theta} \quad (13.3)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2(E - U(\theta))}$$

dove si è considerata una restrizione del moto ad un "tratto" progressivo ($\dot{\theta} > 0$); per studiare "tratti" regressivi ($\dot{\theta} < 0$) occorre ovviamente scegliere per la (13.3) la radice col segno - (meno). La (13.3) può essere integrata per separazioni di variabili; ponendo $t = 0$ come istante iniziale e $\theta(0) = \theta_0$, si ottiene:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E - U(\vartheta))}} \quad \frac{d\theta}{\sqrt{\quad}} = dt \quad (13.4)$$

La soluzione $\theta(t)$ della (13.1) può essere così ottenuta invertendo la (13.4), dopo aver calcolato per serie l'integrale che vi compare ed essersi arrestati all'ordine di approssimazione desiderato. Tale soluzione prevede il moto del pendolo a partire da condizioni iniziali che assicurino $\dot{\theta} > 0$; al primo istante t_1 in cui $\theta(t_1) = 0$ la soluzione prodotta dalla (13.4) cessa di essere valida per prevedere il moto ed occorre "ripartire" con la seguente:

origine nel punto stesso ed assi $\dot{\varphi} = 0$ (coincidente con l'asse $\dot{\theta} = 0$) e $\varphi = 0$ (coincidente con la retta $\theta = \pi$), una famiglia di iperboli equilatera con asintoti di equazione:

$$\dot{\varphi} = \pm \omega \varphi .$$

Questa situazione corrisponde alla (2.8), che avevamo effettivamente ottenuto dall'approssimazione dell'equazione del pendolo (e non, come qui, approssimando la famiglia di integrali primi (13.2)) nelle vicinanze della posizione di equilibrio instabile.

Il punto $(\pi, 0)$ è quindi un punto sella e, per la periodicità, lo sono tutti i punti del tipo $((2k+1)\pi, 0)$ (Fig.2, §9).

Ritratto di fase globale. Per un'analisi del comportamento globale delle orbite prodotte dalla (13.1) nel piano delle fasi $\theta, \dot{\theta}$ riscriviamo la (13.2) nella forma seguente:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 \left(\frac{E}{\omega^2} + \cos\theta \right) . \quad (13.10)$$

Si può osservare che le curve definite dalla (13.10) sono simmetriche rispetto all'asse $\dot{\theta} = 0$; basterà quindi studiare la famiglia di orbite per $\dot{\theta} > 0$ ed ottenere tutte le altre per ribaltamento:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\omega^2 \left(\frac{E}{\omega^2} + \cos\theta \right)} ; \quad (13.11)$$

la (13.11) ammette soluzioni reali solo per $\frac{E}{\omega^2} \geq -1$; l'assunzione di tali valori dipende dalle condizioni iniziali, una volta che siano fissati i parametri g ed l caratterizzanti il problema $\left(\frac{g}{l} = \omega^2\right)$. Consideriamo separatamente i vari casi che si determinano:

i) $\frac{E}{\omega^2} = -1$: a questo valore della costante E corrispondono come soluzione della (13.11) le orbite degeneri:

$$\theta = 2k\pi \quad , \quad \dot{\theta} = 0 \quad ,$$

che descrivono le soluzioni stazionarie stabili (centri) del problema (Fig.2).

ii) $-1 < \frac{E}{\omega^2} < 1$: poniamo $\cos\theta_{max} = -\frac{E}{\omega^2}$; possiamo riscrivere la (13.11) nella forma:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_{max})} ; \quad (13.12)$$

consideriamo, per semplicità, l'intervallo $(-\pi, \pi)$ ed osserviamo che la (13.12) ammette soluzioni reali (e corrispondentemente orbite nel piano delle fasi) solo per:

$$-\theta_{max} < \theta < \theta_{max} \quad , \quad -\pi < \theta_{max} < \pi .$$

Ciò significa che, in questo intervallo di valori assunti da E , le orbite sono curve limitate nella striscia $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$. La variazione corrispondente di $\dot{\theta}$ avviene nella striscia $\left[-\sqrt{2\omega^2(1 - \cos\theta_{max})}, \sqrt{2\omega^2(1 - \cos\theta_{max})}\right]$, che ci assicura che le orbite si mantengono in una regione limitata (in un rettangolo) del piano delle fasi.

$$t = - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E - U(\vartheta))}} , \quad (13.5)$$

per il moto con $\dot{\theta} < 0$.

Si utilizzano, ovviamente, per il calcolo della soluzione di (13.1), molti metodi approssimati, messi a punto per lo studio delle equazioni nonlineari, quali, fra gli altri, il metodo delle approssimazioni successive ed il metodo delle perturbazioni. Su questi argomenti, sui quali non entreremo nel merito, può essere interessante consultare [Li-Se] (pp.48-55 e 321-344).

Analisi qualitativa del pendolo nonlineare

Cerchiamo di ottenere una rappresentazione delle orbite della (13.1) nel piano delle fasi $\theta, \dot{\theta}$, scegliendo una rappresentazione di tipo cartesiano. Iniziamo osservando che vi sono infinite soluzioni stazionarie $(\theta^{(e)}, \dot{\theta}^{(e)})$ per l'equazione (13.1), tutte del tipo:

$$\begin{cases} \theta^{(e)} = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ \dot{\theta}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (13.6)$$

Centri. L'equazione (13.2) fornisce una rappresentazione esatta e globale delle orbite nel piano delle fasi. Ne cerchiamo un'approssimazione nell'intorno delle soluzioni stazionarie per individuare le loro proprietà di stabilità e per ottenere una forma semplice "locale" della famiglia di curve descritta dalla (13.2).

Nell'intorno dell'origine (0,0), possiamo approssimare la (13.2) ponendo:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad (13.7)$$

ed ottenendo:

$$\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = 2(E + \omega^2) = C_1, \quad (13.8)$$

che rappresenta una famiglia di ellissi omotetiche, come nella (8.8) per il caso dell'oscillatore armonico. L'origine del piano delle fasi è quindi un centro (Fig.3, §8) e la soluzione stazionaria ad esso corrispondente è stabile. Tale situazione si manifesta in ogni punto di coordinate $(2k\pi, 0)$, per la periodicità (con $T = 2\pi$) di $\cos\theta$.

multiplo pari di π

Punti sella. Consideriamo adesso il punto $(\pi, 0)$, che corrisponde alla soluzione di equilibrio con quota più elevata. Operando il cambiamento di variabile:

$$\theta = \pi + \varphi \Rightarrow \cos\theta = -\cos\varphi,$$

ed approssimando $\cos\varphi$, per φ "vicini" a zero, allo stesso ordine scelto in (13.7), si ottiene per la (13.2):

$$\dot{\varphi}^2 - \omega^2\varphi^2 = 2(E - \omega^2) = C_2, \quad (13.9)$$

che rappresenta in un intorno del punto $(\pi, 0)$, e relativamente ad un riferimento con



$\rightarrow \pi$ spostiamo di π

che il loro andamento in prossimità dei punti di minimo (vicino alle orbite degeneri instabili) è approssimato dalle iperboli equilatera descritte dalla (13.9), (Fig.2).

Le corrispondenti orbite per il moto "regressivo" ($\dot{\theta} < 0$) si ottengono, ovviamente, per ribaltamento rispetto all'asse $\dot{\theta} = 0$.

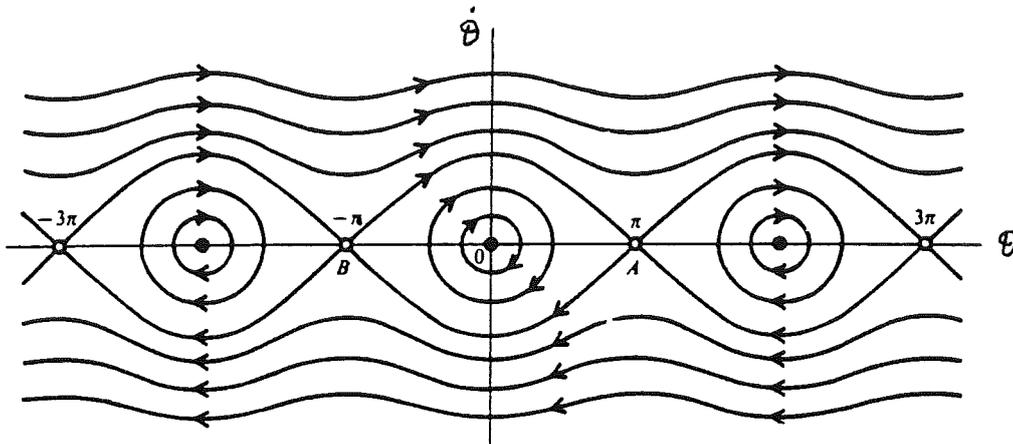


Fig. 2

Nota: una rappresentazione diversa dello spazio delle fasi per l'equazione di moto del pendolo rigido nonlineare può essere ottenuta attraverso un superficie cilindrica (Fig.3), in cui il valore $\theta = 0$ coincide con $\theta = 2\pi$ ed i valori di $\dot{\theta}$ sono riportati sull'asse del cilindro.

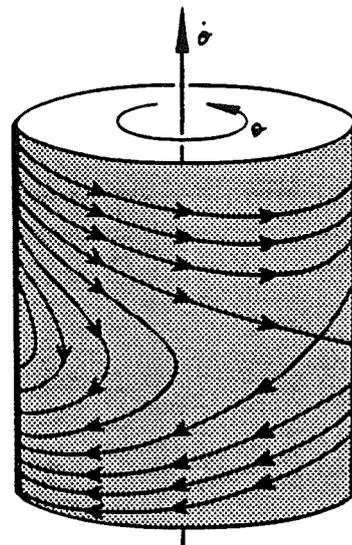


Fig. 3

Caso dissipativo. Riportiamo in Fig.4 il ritratto di fase per l'equazione di moto del pendolo nonlineare, nel caso in cui si introduca un termine di resistenza viscosa, con coefficiente di viscosità h , "abbastanza piccolo". L'equazione di moto (13.1) diviene:

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 ; \quad (13.13)$$

La presenza del termine $h\dot{\theta}$ distrugge la struttura delle curve chiuse nelle regioni interne alle orbite separatrici, producendo una famiglia di orbite spiraliiformi corrispondenti a moti oscillatori smorzati tendenti asintoticamente ai centri (soluzioni stazionarie stabili). Le orbite aperte del caso conservativo, corrispondenti ai moti rivolutivi con energia elevata ($E > \omega^2$), si evolvono secondo un andamento decrescente per $|\dot{\theta}|$, per poi essere "catturate" in una regione vicina ad un centro ed inserirsi nella famiglia di spirali sopra descritta. Si ha qui un primo esempio di **bacini di attrazione**.

Osservando, infine, che nella (13.12) $\dot{\theta} = 0$ solo per $\theta = -\theta_{max}$ e $\theta = \theta_{max}$ e ricordando la simmetria delle orbite rispetto all'asse $\dot{\theta} = 0$, si conclude che si tratta di curve chiuse, che descrivono quindi moti periodici.

Per la periodicità ($T = 2\pi$) della (13.12), lo stesso comportamento delle orbite si ha in ogni intervallo:

$$(2k - 1)\pi < \theta_{max} < (2k + 1)\pi ,$$

a partire dal suo centro, di coordinate $(2k\pi, 0)$, (Fig.2).

Le curve chiuse più "vicine" ai centri, cioè quelle di ampiezza piccola, sono approssimativamente di forma ellittica; al crescere dell'ampiezza si deformano ed in vicinanza dei punti $((2k - 1)\pi, 0)$ e $((2k + 1)\pi, 0)$ sono approssimate dalle iperboli equilatera individuate dalla (13.9).

iii) $\frac{E}{\omega^2} = 1$: questo è il caso limite, che separa i valori di E per cui si hanno orbite chiuse (moti oscillatori periodici), da quelli per cui si hanno orbite aperte (moti rivolativi "progressivi" o "regressivi", periodici solo per quanto riguarda i valori assunti da $\dot{\theta}$). Dalla ii) segue che $\theta_{max} = \pi$ e che $\dot{\theta} = 0$ solo per $\theta = \pi$ e $\theta = -\pi$. Il moto descritto parte quindi con condizioni iniziali (e quindi con il valore di E) che consentono di raggiungere, in un tempo infinito, la soluzione stazionaria instabile $(\pi, 0)$, nel caso di moto "progressivo" ($\dot{\theta} > 0$), oppure la soluzione stazionaria instabile $(-\pi, 0)$, nel caso "regressivo" ($\dot{\theta} < 0$). La curva completa corrispondente a questa situazione, disegnata in Fig.2 non rappresenta quindi un'unica orbita chiusa, come quelle descritte in ii), ma due diverse orbite che si incontrano in due punti, detti **orbite degeneri**, che rappresentano soluzioni stazionarie (o di equilibrio) instabili.

Le orbite descritte, che si presentano in ogni striscia $[(2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi]$, prendono il nome di **separatrici** e sono approssimate dagli asintoti della famiglia di iperboli equilatera (13.9) in vicinanza dei punti $((2k - 1)\pi, 0)$ e $((2k + 1)\pi, 0)$.

iv) $\frac{E}{\omega^2} > 1$: per questi valori di E (e quindi delle condizioni iniziali) non ci sono più limitazioni sui valori assumibili da $\cos\theta$ nella (13.11). θ può assumere quindi ogni valore reale. Le orbite corrispondenti sono curve aperte, percorse in senso "progressivo" o "regressivo", a seconda del segno iniziale di $\dot{\theta}$. Nel semipiano $\dot{\theta} > 0$ tutte le curve presentano un massimo per $\theta = 2k\pi$ ed un minimo per $\theta = (2k + 1)\pi$; i massimi ed i minimi sono più accentuati per E poco maggiore di ω^2 e tendono a "scompare" per $E \gg \omega^2$. Per $E \rightarrow +\infty$, $\dot{\theta} \simeq \sqrt{2E}$, ovvero le orbite hanno un'andamento rettilineo, parallelo a $\dot{\theta} = 0$. Questo corrisponde a moti rivolativi con una grandissima energia cinetica, in cui l'influenza dell'energia potenziale della forza di gravità diventa trascurabile; tali moti avvengono quindi con una velocità angolare pressoché costante.

Tornando al caso di orbite aperte vicine alle curve separatrici, si può infine osservare

Una simulazione su Personal Computer per le equazioni (13.1) e (13.13) può essere effettuata con il programma Phaser, [Ko] ; si possono così ottenere, fra l'altro, le rappresentazioni del piano delle fasi in Fig.2 e Fig.4.

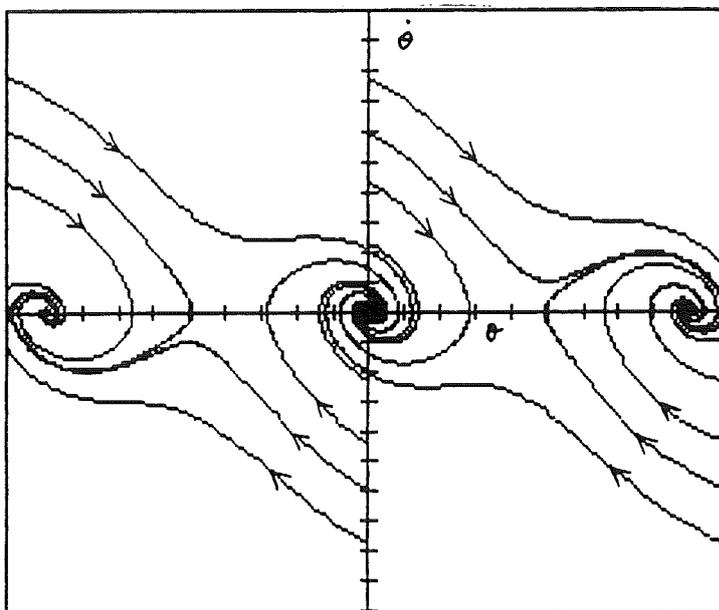


Fig.4

BIBLIOGRAFIA

- [An-Kh] : A.A.Andronov, A.A.Vitt and S.E.Khaikin, *Theory of Oscillators*, Dover Pub., New York, 1986.
- [Braun] : M.Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Hi-Sm] : M.W.Hirsch and S.Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [Jo-Sm] : D.W.Jordan and P.Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [Ko] : H.Koçak, *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Li-Se] : C.C. Lin and L.A. Segel, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [Th-St] : J.M.T.Thompson and H.B.Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$\det A \neq 0$$

$x=0, y=0$ è l'unica soluzione di equilibrio

A: autovalori reali segno opposto (INSTABILE) PUNTO SELLA
 autovalori con parte reale negativa (ASINT. STABILE) POZZO
 autovalore con parte reale positiva (INSTABILE) SORGENTE
 autovalori immaginari puri CENTRO

AUTOVALORI

AUTOVETTORI

reali	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$	NODO STABILE C POZZO
reali	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$	NODO INSTABILE C SORGENTE
reali	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$	POZZO
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	\underline{v}	POZZO
reali	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$	SORGENTE
	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	\underline{v}	SORGENTE
reali	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$	PUNTO SELLA
complessi	$\alpha \pm i\beta$	$\alpha = 0$	CENTRO
		$\alpha < 0$	FUOCO STABILE
		$\alpha > 0$	FUOCO INSTABILE

$$\det A \neq 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha due soluzioni: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Il sistema ha due soluzioni: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.
 In entrambi i casi, il sistema è instabile. Infatti, per $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, il sistema ha un punto fisso che è un punto sella. Per $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, il sistema ha un punto fisso che è un punto sella.

Autovettori:

Autovettori:

Nodo stabile e punto

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$

Nodo instabile e punto

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0$$

Punto

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

Punto

$$\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

Sorgente

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

Sorgente

$$\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

Punto sella

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Centro

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Punto stabile

$$\lambda_1 < 0$$

Punto instabile

$$\lambda_1 > 0$$