GÉOMÉTRIE NON-COMMUTATIVE, FORMULE DES TRACES ET CONDUCTEUR DE BLOCH

BERTRAND TOËN* AND GABRIELE VEZZOSI

Résumé. Ce texte est basé sur l'exposé du premier auteur au premier congrès de la SMF (Tours, 2016). On y présente la formule du conducteur de Bloch, qui est une formule conjecturale décrivant le changement de topologie dans une famille de variétés algébriques lorsque le paramètre se spécialise en une valeur critique. L'objectif de ce texte est de présenter une approche générale à la résolution de cette conjecture basée sur des techniques de géométrie non-commutative et de géométrie dérivée.

Table des matières

Introduction

Ce texte est un survol qui présente un approche à la conjecture du conducteur de Bloch (voir conjecture 1.3) basée sur des méthodes et des idées de géométrie non-commutative et de géométrie dérivée. Cette conjecture, qui prédit la variation de la caractéristique d'Euler d'une famille de variétés algébriques lorsque le paramètre tend vers une valeur critique, est de nature géométrico-arithmétique, et les mathématiques de ce texte s'insèrent dans un programme plus vaste qui consiste à utiliser les méthodes de la géométrie non-commutative (voir notre § 2), mais aussi de la géométrie dérivée (voir par exemple [To2]), pour approcher des questions classiques de géométrie arithmétique. Ce texte de survol, ainsi que les textes plus détaillés [Bl-Ro-To-Ve, To-Ve2], en constituent le premier pas.

Dans [Bl], Bloch introduit une formule appelée aujourd'hui *formule du conducteur de Bloch*, et en donne une preuve en dimension relative 1 (pour une famille de courbes algébriques). Le contexte général est celui d'une famille de variétés algébriques projectives $\{X_t\}_t$, qui varient algébriquement en fonction du paramètre t, et que l'on étudie localement autour d'une valeur critique $t = o$. On suppose

Date: Septembre 2016.
$*$ Partially supported by ANR-11-LABX-0040-CIMI within the program ANR-11-IDEX-0002-02.

que les variétés X_t sont toutes non-singulières. Lorsque X_o est elle-même non-singulière on sait que les cohomologies de X_t et de X_o sont isomorphes et leurs caractéristiques d'Euler sont donc égales. Lorsque X_o est éventuellement singulière cette caractéristique d'Euler change et la formule du conducteur de Bloch est une formule qui exprime leur différence $\chi(X_o) - \chi(X_t)$ en termes géométrico-algébriques (voir conjecture 1.3). Il faut rajouter ici que l'on ne considère aucune restriction sur les corps de base des variétés algébriques, les variétés X_t et X_o peuvent par exemple toutes deux êtres des variétés algébriques complexes, toutes deux définies sur un corps k de caractéristique positive, mais on peut aussi avoir des situations où X_t est de caractéristique nulle alors que X_o est de caractéristique positive. La formule du conducteur de Bloch n'est ainsi pas seulement une formule d'origine géométrique mais rend compte aussi de phénomènes arithmétiques liés à la notion de ramification sauvage.

La formule du conducteur de Bloch est un théorème dans certains cas (rappelés dans notre § 1), mais reste ouverte en général. Récemment, dans [To-Ve2] nous avons proposé de rapprocher cette formule d'une formule des traces dans le cadre de la géométrie non-commutative. Le but de ce texte de survol est de présenter de manière plus abordable le contenu de [To-Ve2]. L'idée générale de cette approche est d'introduire un schéma non-commutatif associé à la famille $\{X_t\}_t$ dont la caractéristique d'Euler est exactement la différence que l'on cherche à quantifier $\chi(X_o) - \chi(X_t)$. Une fois cet objectif atteint, on invoque une formule du type Gauss-Bonnet pour ce schéma non-commutatif afin de calculer sa caractéristique d'Euler en termes géométrico-algébrique. C'est cette idée générale que nous allons tenter de décrire dans ce texte. Nous commencerons par rappeler la conjecture du conducteur de Bloch, sa signification dans certains cas particuliers et le cas connus. Dans la seconde section nous rappellerons une approche à la notion de schéma non-commutatif basée sur les dg-catégories. Nous tentons d'y donner les définitions nécessaires à la compréhension de la suite du texte mais évitons très largement les détails techniques d'algèbre homotopique et de théorie des ∞-catégories qui sont malheureusement indispensables. Dans le §3 nous introduisons la cohomologie des schémas non-commutatifs. Une première partie concerne la cohomologie de Hodge et est relativement classique et connue sous le nom d'homologie de Hochschild. Dans une seconde partie nous présentons la cohomologie ℓ-adique des schémas non-commutatifs, qui a été introduite récemment dans [Bl-Ro-To-Ve] et dont la construction est plus sophistiquée. La section § 4 concerne la formule des traces (de type Lefschetz) pour les schémas non-commutatifs, qui permet de calculer la trace d'un endomorphisme sur la cohomologie à l'aide d'un nombre d'intersection qui se décrit comme une dimension d'homologie de Hochschild. Enfin, dans la dernière section nous présentons l'application de la formule des traces à la conjecture du conducteur de Bloch. Nous expliquons en particulier comment elle permet d'affirmer que la conjecture est vraie lorsque la monodromie est unipotente. Nous donnons aussi quelques éléments pour convaincre que le cas général doit pouvoir s'en déduire (mais les détails restent sous investigation actuellement).

Le contenu de ce texte est essentiellement celui de l'exposé du premier auteur au *Premier congrès de la Société Mathématiques de France*, qui s'est tenu à Tours en Juin 2016. Nous remercions vivement le SMF pour l'organisation de cet événement.

1. La formule du conducteur de Bloch

La formule du conducteur de Bloch est une formule numérique qui exprime les changements topologiques intervenant dans une dégénérescence de variétés algébriques. Elle a été introduite dans [Bl] pour une famille de courbes algébriques, et étendue dans le cas de la dimension quelconque. Sous certaines conditions la formule est connue (voir par exemple [Ka-Sa]), mais elle reste aujourd'hui à l'état de conjecture dans sa forme la plus générale. Il se trouve que la formule du conducteur de Bloch est un excellent exemple d'une question ouverte sur laquelle des progrès peuvent être obtenus à l'aide des techniques de *géométrie non-commutative* que nous présenterons par la suite. Nous pensons en réalité que cette approche non-commutative fournira, à terme, une démonstration de la formule du conducteur de Bloch en toute généralité (voir les commentaires en fin de §5).

Le but de cette section est de présenter cette formule, mais aussi de rappeler ses interactions avec des formules bien connues dans le cadre de la géométrie algébrique (formule de type Gauss-Bonnet, de Lefschetz ou encore nombre de Milnor).

Une des questions typique en géométrie algébrique est l'étude de la topologie des variétés algébriques. On se donne par exemple une variété algébrique X projective sur $\mathbb{C}$, donnée par le lieu d'annulation d'une famille de polynômes homogènes $f_1, \dots f_p \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ dans un espace projectif

$$X = \{x \equiv [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x) = 0 \; \forall j = 1, \dots, p\}.$$

Pour simplifier on supposera que X est lisse, ou en d'autre termes que le critère Jacobien pour $f_1, \dots, f_p$ est satisfait en tous ses points. Dans ce cas, on peut considérer l'espace topologique X^{top} sous-jacent à X, dont la topologie est induite par la topologie transcendante sur $\mathbb{C}$, qui est alors une variété topologique compacte et orientée de dimension $n-p$. Cette variété possède une caractéristique d'Euler bien définie

$$\chi(X) := \chi(X^{top}) = \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{Q}} H^i(X^{top}, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}.$$

Une question typique est alors de donner une formule pour calculer $\chi(X)$ en termes purement algébrique (i.e. en ne faisant intervenir que les polynômes f_i et sans faire intervenir la topologie transcendante sur $\mathbb{C}$). Typiquement, si $n = 2$ et $p = 1$, on a affaire à une courbe algébrique plane, et on sait que l'on a $\chi(X) = 3d - d^2$ où d est le degré de f_1.

La question possède une réponse en toute généralité de la manière suivante. Il existe sur X une notion de q-formes différentielles algébriques qui forment un faisceau Ω^q_X (il s'agit de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X). Ces faisceaux possèdent des groupes de cohomologie $H^i(X, \Omega^q_X)$ (toujours pour la topologie de Zariski), et l'on a le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Avec les notations ci-dessus on a*

$$\chi(X) = \sum_{i,q} (-1)^{i+q} dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \Omega^q_X).$$

Ce résultat peut se voir comme une conséquence directe de la théorie de Hodge, qui affirme en particulier l'existence de décompositions $H^k(X^{top}, \mathbb{C}) \simeq \oplus_{i+q=k} H^i(X, \Omega^q_X)$. Une autre manière de comprendre cette formule est d'identifier le membre de droite au degré de la classe de Chern maximale $C_{top}(X)$ du fibré tangent à X, et d'invoquer la formule de Gauss-Bonnet $\chi(X^{top}) = \int_X C_{top}(X)$.

Il se trouve que la formule du Théorème 1.1 reste valable sur un corps algébriquement clos k quelconque (éventuellement de caractéristique positive), à condition d'interpréter le membre de gauche en termes de cohomologie ℓ-adique. Dans ce cas, l'espace topologique X^{top} ne fait plus sens car k ne porte aucune topologie naturelle intéressante, mais on peut tout de même définir ses groupes de cohomologie ℓ-adique $H^*(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$, où ℓ est un nombre premier différent de la caractéristique de k. On définit naturellement sa caractéristique d'Euler par

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Théorème 1.2. *Soit X une variété algébrique projective et lisse sur un corps algébriquement clos k. Alors on a*

$$\chi(X) = \sum_{i,q} (-1)^{i+q} dim_k H^i(X, \Omega_X^q).$$

Cette formule est encore une formule du type Gauss-Bonnet car le membre de droite reste encore égal au degré de la classe de Chern maximale $C_{top}(X) \in CH_0(X)$, considéré comme une classe de 0-cycles sur X (ceci est une conséquence de la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch [Fu, 15.2.1] et de [Fu, Ex. 3.2.5]). Il s'agit d'une formule typique et centrale en géométrie algébrique, qui relie un invariant de nature topologique, $\chi(X)$, à des invariants de nature géométrico-algébrique, à savoir les formes différentielles algébriques.

Le formule du conducteur de Bloch est une formule qui s'intéresse au comportement de la formule du Théorème 1.2 lorsque X varie dans une famille de variétés algébriques. Pour cela, on se fixe un corps k, que l'on supposera parfait, et un anneau de valuation discrète A, d'uniformisante $\pi \in A$ et muni d'un isomorphisme $A/(\pi) \simeq k$. On supposera de plus que A est un anneau hensélien (par exemple qu'il est complet pour la topologie π-adique). Les cas typiques à garder en tête sont $A = k[[t]]$ avec $\pi = t$, l'anneau des séries formelles en t sur k, ou encore $k = \mathbb{F}_p$ et $A = \mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Le schéma $S := Spec\, A$ est alors l'analogue algébrique d'un petit disque holomorphe centré au-dessus de son unique point fermé $\{x\} = Spec\, k \subset S$. Une famille de variétés projectives au-dessus de S est par définition un schéma X muni d'un morphisme projectif $X \longrightarrow S$. Concrètement, un tel schéma est toujours donné par une famille de polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in A[X_0, \dots, X_n]$, qui définissent un sous-schéma fermé $X \subset \mathbb{P}^n_S \longrightarrow S$ de l'espace projectif au-dessus de S.

A une telle famille de variétés algébriques sur S on fait correspondre deux variétés algébriques X_o et X_t définies de la manière suivante. On considère la réduction des polynômes F_i modulo π, ce qui donne des polynômes $f_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ et donc une variété algébrique $X_o \subset \mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ définie sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de k. De manière équivalente, on peut plonger l'anneau A dans son corps des fractions $K = Frac(A)$, puis dans une de ses clôtures algébriques $\bar{K}$. L'image des polynômes F_i définissent ainsi des $G_i \in \bar{K}[X_0, \dots, X_p]$ et donc une variété algébrique X_t définie sur $\bar{K}$.

Il faut rappeler ici que la situation que l'on décrit est extrêmement classique en géométrie algébrique. Par exemple, lors de la construction des compactifications d'espaces de modules de variétés (typiquement l'espace de modules des courbes algébriques), on rajoute des variétés singulières comme point à l'infini, et transversalement autour de ce point on a exactement une famille de variétés algébriques comme-ci dessus, avec X_t lisse et X_o singulière. Un second exemple de première importance est lorsque l'on s'intéresse aux aspects arithmétiques, par exemple avec des variétés algébriques définies au-dessus de $\mathbb{Q}$, ou encore d'un corps de nombre. De telles variétés possèdent des *modèles*, c'est à dire proviennent de schéma X propre et plat sur $\mathbb{Z}$ (ou sur un anneau d'entiers algébriques). Pour la plupart des nombre premier p, la réduction de X modulo p reste lisse, mais il existe en général un nombre de fini de premiers pour les quels la réduction devient singulière. Localement autour de ce nombre premier on dispose encore d'une famille de variétés algébriques comme ci-dessus.

Un des théorèmes fondamentaux en cohomologie étale affirme que lorsque X_o et X_t sont toutes deux lisses, alors on a une égalité $\chi(X_o) = \chi(X_t)$. La formule du conducteur de Bloch se place précisément dans le cas où X_t est une variété lisse sur $\bar{K}$ mais ou X_o n'est plus nécessairement lisse sur $\bar{k}$. On s'intéresse alors à décrire la différence $\chi(X_o) - \chi(X_t)$, à l'aide de termes algébriques sur le schéma X. Pour cela, Bloch introduit un nombre d'intersection $deg([\Delta_X.\Delta_X]_o)$ pour le quel nous renvoyons à [Bl, Ka-Sa] pour une définition (qui n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite de texte). Ce nombre mesure les singularités du morphisme $X \longrightarrow S$, et est nul quand X_o est une variété non-singulière. Par ailleurs, on dispose du conducteur de Swan $Sw(X_t)$, qui est un invariant de nature arithmétique de la variété X_t, et qui mesure les phénomènes de ramifications sauvages (ce nombre est toujours nul en caractéristique nulle). Nous renvoyons aussi à [Bl, Ka-Sa] pour une définition précise, sachant que dans ce texte nous nous placerons essentiellement dans le *cas modéré où* $Sw(X_t) = 0$. Le conjecture précise s'énonce alors comme suit.

Conjecture 1.3 (Bloch, '85)**.** *Avec les notations précédentes on a*

$$\chi(X_o) - \chi(X_t) = deg([\Delta_X.\Delta_X]_o) + Sw(X_t).$$

Plutôt que de tenter de détailler la nature des termes $deg([\Delta_X.\Delta_X]_o)$ et $Sw(X_t)$ dans la formule ci-dessus, nous allons rappeler plusieurs instances de cas connus.

(1) Supposons que X soit une variété projective et lisse sur k (algébriquement clos pour simplifier). On voit X comme un schéma sur S par l'application quotient $A \to k$

$$X \longrightarrow Spec\, k \longrightarrow S = Spec\, A.$$

Dans ce cas, le nombre d'intersection $deg([\Delta_X.\Delta_X]_o)$ n'est rien d'autre que l'auto-intersection de la diagonale de la variété X, qui s'écrit aussi $\sum_{i,q}(-1)^{i+q} dim_k H^i(X, \Omega^q_X)$. La fibre générique X_t étant vide la formule de Bloch se réduit à la formule de Gauss-Bonnet discutée précédement

$$\chi(X) = \sum_{i,q}(-1)^{i+q} dim_k H^i(X, \Omega^q_X).$$

(2) Soit Z une variété algébrique complexe lisse, et $f : Z \longrightarrow \mathbb{A}^1$ une fonction algébrique sur Z propre. On note A l'hensélisé de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}$ et $S = Spec\, A \longrightarrow \mathbb{A}^1$ le morphisme canonique. On note $X := Z \times_{\mathbb{A}^1} S$ le changement de base de Z sur S.

Supposons pour commencer que f ne possède qu'une singularité isolée, ou en d'autres termes que X_o ne possède qu'un unique point singulier $x \in X_o$. On peut alors définir l'anneau Jacobien $J(f)$ de la fonction f en x, comme étant le quotient $\mathcal{O}_{Z,x}/(\partial f)$, quotient de l'anneau local de Z en x par l'idéal engendré par les dérivées partielles de f. En termes plus intrinsèque, $J(f)$ est le faisceau cohérent supporté en x défini comme étant le conoyau du morphisme induit par la contraction avec la différentielle df

$$T_X \xrightarrow{\lrcorner df} \mathcal{O}_X \longrightarrow J(f).$$

La formule du conducteur de Bloch est alors bien connue sous le nom de formule du nombre de Milnor et affirme que la dimension des cycles évanescents de la singularité x est égal à la dimension de l'espace $J(f)$. Considérons la fibre de Milnor F_x de f en x. Cette fibre de Milnor se rétracte par déformation sur un bouquet de sphère $\wedge_r S^{n-1}$, où n est la dimension complexe de X (voir [Mi]). La formule du conducteur de Bloch s'écrit alors

$$dim_{\mathbb{C}} J(f) = r.$$

Dans le cas où les singularités de X_o ne sont plus isolées, la formule reste vraie, et se lit de la manière suivante :

$$\chi(X_o) - \chi(X_t) := \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{C}} H^i_{DR}(X, f)$$

où $H^i_{DR}(X, f)$ sont les groupes de cohomologie de de Rham de X tordus par la fonction f (cela est une conséquence de la suite spectrale construite dans [?], voir aussi [Sab-Sai] pour un énoncé plus précis).

(3) La formule précédente à été généralisée par Deligne dans [SGA7-I, Exp. XVI], connue aujourd'hui sous le nom de formule de Deligne-Milnor. Deligne démontre cette formule dans le cas d'égale caractéristique, ce qui est équivalent à la formule du conducteur de Bloch lorsque l'on suppose de plus que X_o ne possède que des singularités isolées.

(4) Enfin, la formule du conducteur de Bloch est connue lorsque l'on suppose que l'inclusion $X_o \hookrightarrow X$ définit le sous-schéma réduit $(X_o)_{red}$ comme une diviseur à croisements normaux et simples dans X (voir [Ka-Sa]).

La conjecture de Bloch est aujourd'hui ouverte, y compris le cas minimaliste où X_o est a singularités isolées en caractéristique mixte (qui est d'une certaine façon orthogonal au cas traité dans [Ka-Sa]). Dans ce qui suit nous allons présenter une approche générale qui, nous le pensons, permettra d'aboutir à une preuve complète de la Conjecture 1.3. Cette approche est basée sur des idées et techniques provenant de l'univers de la géométrie non-commutative, et nous pensons qu'il s'agit d'un exemple pertinent d'interaction de la géométrie non-commutative avec des questions plus traditionnelles de géométrie algébrique et de géométrie arithmétique.

Avant d'entrer dans plus de détails nous souhaitons ici esquisser une brève idée générale de la manière dont la géométrie non-commutative est liée à la Conjecture 1.3. Il faut commencer par prendre l'exemple (1) ci-dessus au sérieux. Cet exemple est de fait relativement dégénéré, puisqu'il s'agit d'une famille de variétés algébriques dont la fibre générique est vide et la fibre spéciale X tout entier. C'est un cas pour lequel la formule se réduit à la formule de Gauss-Bonnet pour X. Le fil directeur est ici de considérer ce cas comme un cas limite (une "limite semi-classique") d'une situation non-commutative. En clair, nous prétendons qu'à $X \longrightarrow S$ comme dans 1.3 nous pouvons associer un *schéma non-commutatif* $MF(X/S)$ qui rend compte de la théorie des singularités de X au-dessus de S. Un point clé est que ce schéma non-commutatif possède une cohomologie et une caractéristique d'Euler bien définie, et surtout, égale à $\chi(X_o) - \chi(X_t)$. Avec ce point de vue la formule du conducteur de Bloch s'interprète essentiellement comme une formule de Gauss-Bonnet pour le schéma non-commutatif $MF(X/S)$, qui elle même est un cas particulier d'une formule des traces de type Lefschetz.

Cette idée très générale peut se réaliser mathématiquement, en donnant un sens précis à ce qu'est un schéma non-commutatif et à sa cohomologie. C'est ce que nous allons tenter de raconter dans la suite de ce texte.

2. Éléments de (non-)géométrie algébrique non-commutative

Un bref rappel historique. Il est traditionnel de considérer le théorème de Gelfand, sur la reconstruction d'un espace topologique de Hausdorff et compact, comme le point de départ de la géométrie non-commutative. Pour un tel espace X, on note $\mathcal{C}(X)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions continues sur X à valeurs complexes. On considère alors $Spm\,\mathcal{C}(X)$, l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X)$. Tout élément $f \in \mathcal{C}(X)$ définit une application $\phi_f : Spm\,\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, qui associe à un idéal $m \subset \mathcal{C}(X)$ la classe $\overline{f} \in \mathcal{C}(X)/m \simeq \mathbb{C}$. On munit alors l'ensemble $Spm\,\mathcal{C}(X)$ de la topologie la moins fine telle que les applications ϕ_f soient continues. Le théorème de reconstruction de Gelfand s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.1 (Gelfand)**.** *Avec les notations précédents, l'application qui à un point $x \in X$ associe l'idéal $m_x \in Spm\,\mathbb{C}(X)$ des fonctions qui s'annulent en x, définit un homéomorphisme d'espaces topologiques*
$$X \simeq Spm\,\mathcal{C}(X).$$

Ce résultat peut se préciser : la construction $X \mapsto \mathcal{C}(X)$ définit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des espaces separés et compacts vers celle des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach. Le point de départ de la géométrie non-commutative est alors de définir un espace non-commutatif comme étant une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach, non-nécessairement commutative, qui ressemble à l'algèbre des fonctions sur un espace compact. Nous en renvoyons à [Co] pour plus sur ce sujet.

L'approche précédente à la géométrie non-commutative n'est malheureusement plus pertinente lorsque l'on cherche à travailler dans le cadre de la géométrie algébrique. En effet, il n'existe que très peu de fonctions sur les variétés algébriques en général, trop peu pour espérer un énoncé analogue au Théorème 2.1 lorsque X est une variété algébrique. De manière plus précise, on voit ici deux nouveaux phénomènes concernant le comportement des fonctions algébriques, qui ne se présentent pas dans le cadre de la topologie ou de la géométrie différentielle.

(1) Lorsque X est une variété algébrique sur un corps algébriquement clos k, alors X ne porte que des fonctions algébriques constantes dès que X est propre (compacte) et connexe. En d'autres termes, si $\mathcal{O}(X)$ désigne la k-algèbre des fonctions (algébriques) sur X, alors on a $\mathcal{O}(X) \simeq k$.

(2) Les fonctions sur une variété algébrique X s'organisent en un faisceau d'algèbres $\mathcal{O}_X$ sur X (pour la topologie de Zariski). En général, ce faisceau possède des espaces de cohomologie $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ non-triviaux (e.g. lorsque E est une courbe elliptique on a $H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$), ce qui traduit des obstructions à l'extension de fonctions (manque de partition de l'unité par exemple).

Ces deux nouveaux aspects qui apparaissent dans le contexte algébrique obligent à adopter un point de vue différent sur la géométrie algébrique non-commutative et à revoir l'idée, trop naïve, qu'une variété algébrique non-commutative puisse simplement être définie comme étant une algèbre (non-nécessairement commutative).

Concernant le point (1) ci-dessus, il faut commencer par remarquer que bien qu'il n'existe que très peu de fonctions définies globalement, il existe en revanche de nombreuses sections de fibrés vectoriels algébriques. Cela suggère d'élargir l'algèbre des fonctions $\mathcal{O}(X)$ en considérant tous les fibrés vectoriels sur X ainsi que tous les morphismes entre de tels fibrés. Ces fibrés forment une catégorie

$Vect(X)$, qui est k-linéaire si de plus X est définie sur le corps k. Par ailleurs, $Vect(X)$ contient l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ comme endomorphisme du fibré trivial de rang 1 sur X. Les aspects cohomologiques du point (2) peuvent quand à eux être considérés et faisant de $Vect(X)$ une *dg-catégorie* k-linéaire. Il s'agit d'une structure de type catégorie où les morphismes entre deux objets forment des complexes de k-modules. Pour deux fibrés vectoriels E et F sur X il est possible de construire un complexe naturel $\mathbb{R}\underline{Hom}(E,F)$ dont la cohomologie calcule les Ext globaux entre E et F et qui organisent $Vect(X)$ en une dg-catégorie. En conclusion, ce que nous dicte cette discussion est qu'une variété algébrique non-commutative peut, et doit, être définie comme une dg-catégorie k-linéaire. C'est un point de vue largement adopté aujourd'hui, par exemple par des auteurs tels que Bondal, Kontsevich Kapranov, Orlov, Van den Bergh ...

La notion de schémas non-commutatifs. Entrons un peu plus dans les détails. On se fixe un anneau commutatif de base k (qui pourra par la suite être notre corps de base, mais il est important de s'autoriser ce degré de généralité pour la suite). Par définition, une dg-catégorie T sur k consiste en les données suivantes.

(1) Un ensemble $Ob(T)$, que l'on appelle l'ensemble des objets de T.
(2) Pour toute paire d'objets $(x,y) \in Ob(T) \times Ob(T)$ un complexe de k-modules $T(x,y)$, que l'on appelle le complexe des morphismes de x vers y.
(3) Pour tout triplet d'objets $(x,y,z) \in Ob(T) \times Ob(T) \times Ob(T)$, un morphisme de complexes
$$T(x,y) \otimes_k T(y,z) \longrightarrow T(x,z),$$
appelé composition.

On demande par ailleurs que les morphismes de compositions satisfassent à des conditions d'associativité et d'unité naturelles (voir [To1] pour les détails). En utilisant un langage différent, une dg-catégorie est une catégorie enrichie dans la catégorie monoidale $(C(k), \otimes_k)$ des complexes de k-modules.

Définition 2.2. *Une* schéma non-commutatif*, ou encore* nc-schéma*, (au dessus de k) est une dg-catégorie sur k.*

La définition ci-dessus peut sembler naïve à priori, et pour tout dire il tient du miracle qu'une notion aussi générale et simple se révèle à postériori pertinente. Le lecteur intéressé pourra consulter [To1] qui tente d'expliquer pourquoi les dg-catégories sont plus pertinentes que les simples catégories (triangulées par exemple).

Pour appréhender la notion de nc-schémas ci-dessus il faut commencer par expliquer comment elle est reliée à la notion de variété algébrique ou plus généralement de schéma. Soit donc une variété algébrique X sur un corps k, que l'on va supposer être affine pour commencer. Elle dispose d'une k-algèbre de fonctions $A := \mathcal{O}(X)$. On associe à cette algèbre A une dg-catégorie $\mathcal{D}(A)$ sur k de la manière suivante. Les objets de $\mathcal{D}(A)$ sont par définition les complexes bornés de A-modules projectifs de type fini. Pour deux tels complexes E et F, on dispose d'un complexe de morphismes A-linéaires $\underline{Hom}_A(E,F)$, qui est naturellement un complexe de k-module. Cela définit les complexes de morphismes dans $\mathcal{D}(A)$, qui munit de la composition usuelle des morphismes définit la dg-catégorie $\mathcal{D}(A)$.

Supposons maintenant que X ne soit plus nécessairement affine. Dans ce cas, on recouvre X par un nombre fini de sous-variétés ouvertes affines $U_i \subset X$ pour les quelles on sait définir $\mathcal{D}(U_i)$. On construit alors $\mathcal{D}(X)$ par un procédé de recollement à l'aide des $\mathcal{D}(U_i)$ (voir [Bl-Ro-To-Ve]). Il faut mettre en garde ici sur le fait que ce procédé de recollement est relativement subtil et fait intervenir des outils d'algèbre homotopique (voir par exemple [To1, 5.3.1]). La construction précédente n'utilise nullement le fait que X soit une variété algébrique et reste valable lorsque k est un anneau commutatif et X est un k-schéma. De manière plus concrète $\mathcal{D}(X)$ peut aussi se définir comme la dg-catégorie des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs, bornés à gauche, et localement quasi-isomorphes à des complexes bornés de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang fini (voir [To1, §5.3] où cette dg-catégorie est notée $L_{pe}(X)$). Mais plutôt que d'entrer dans les détails définitionnels de $\mathcal{D}(X)$ citons quelques unes de ses propriétés clés.

– Si V est un fibré vectoriel sur X, que l'on voit comme un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres, alors V définit un objet de $\mathcal{D}(X)$ en considérant V comme un complexe de manière triviale (valant V en degré nul, et 0 en tout autre degré). Plus généralement on peut décaler V pour le placer en un unique degré n pour obtenir un nouvel objet $V[-n] \in \mathcal{D}(X)$. La construction $V \mapsto V[0]$, induit un foncteur (pleinement fidèle en un certain sens) de la catégorie des fibrés vectoriels sur X vers $\mathcal{D}(X)$.
– Pour deux fibrés vectoriels V et W, et tout entier n on dispose d'isomorphismes naturels
$$H^i(\mathcal{D}(X)(V, W[n])) \simeq Ext^{i+n}_{\mathcal{O}_X}(V, W).$$
En particulier, on a $H^i(\mathcal{D}(X)(\mathcal{O}_X, W)) \simeq H^i(X, W)$.

Les deux propriétés ci-dessus peuvent être comprises comme caractérisant $\mathcal{D}(X)$ en un certain sens, et dans la pratique elles sont les deux outils essentiels pour appréhender $\mathcal{D}(X)$. On voit bien par ailleurs qu'elles répondent précisément aux problématiques que nous avions soulevées plus haut.

La construction $X \mapsto \mathcal{D}(X)$ est une première source d'exemples de nc-schémas. Il existe beaucoup d'autres, d'origines variées.

(1) Pour commencer, on trouve de nombreux exemples intéressants de nc-schémas comme "morceaux" de variétés algébriques. Pour une variété X, il arrive que sa catégorie dérivée $\mathcal{D}(X)$ se décompose comme une produit semi-direct de deux sous-catégories $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{D}(X)$ (appelé *décomposition semi-orthogonale*). Les morceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des nc-schémas qui ne sont généralement plus de la forme $\mathcal{D}(Y)$ pour une variété Y. L'étude des décompositions semi-orthogonales des variétés projectives lisses est par exemple intimement liée à des questions profondes de rationalité. Pour être plus précis, on peut montrer qu'une cubique X de dimension 4 possède un facteur $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(X)$ qui est une surface K3 non-commutative Par ailleurs, Kuznetsov conjecture que X est rationnelle si et seulement si $\mathcal{A}$ est une K3 commutative (i.e. de la forme $\mathcal{D}(S)$ pour une surface K3 S, voir [Ku2, Conj. 1.1]). L'étude des facteurs directs de $\mathcal{D}(X)$ du point de vue de la géométrie non-commutative est un sujet en soi et aujourd'hui très actif (voir [Ku1]).

(2) Si A est une k-algèbre, associative et unitaire mais non nécessairement commutative, on dispose aussi d'une dg-catégorie $\mathcal{D}(A)$ formée des complexes bornés de A-modules projectifs de type fini. Il faut penser à $\mathcal{D}(A)$ comme au schéma non-commutatif "*Spec A*". Un exemple important est lorsque $A = k[\Gamma]$ est la k-algèbre en groupes d'un groupe discret Γ.

(3) Si un groupe algébrique G opère sur une variété alégbrique X, on dispose d'un nc-schéma quotient de X par G que l'on note $\mathcal{D}^G(X)$. La dg-catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ est définie en considérant

les objets G-équivariants de $\mathcal{D}(X)$ et le nc-schéma correspondant doit être vu comme le quotient non-commutatif de X par l'action de G.

(4) Certains nc-schémas arrivent comme déformations de schémas. Un exemple typique provient de la quantification par déformation des variétés algébriques symplectiques (ou de Poisson). Pour une telle variété X la déformation par quantification s'incarne en une dg-catégorie $k[[t]]$-linéaire $\mathcal{D}^q(X)$, qui est une déformation formelle de $\mathcal{D}(X)$.

Pour clore cette discussion sur les nc-schémas nous signalons qu'il existe, en quelque sorte, un analogue au théorème de Gelfand. Pour une variété algébrique X sur k, ou plus généralement un k-schéma que l'on supposera quasi-compact et quasi-séparé, on peut montrer que la dg-catégorie $\mathcal{D}(X)$ est engendrée par un unique objet E (voir [Bo-VdB]). Un tel objet est appelé un générateur compact, et son existence, qui est un énoncé d'existence relativement profond, possède de nombreuses implications. Tout d'abord, on peut considérer les endomorphismes de l'objet E, qui munient de la composition des endomorphismes forment une dg-algèbre $B_X := \mathcal{D}(X)(E,E)$. Le fait que E soit un générateur compact de $\mathcal{D}(X)$ s'interpréte aussi par l'existence d'une équivalence de dg-catégories

$$\mathcal{D}(X) \simeq \mathcal{D}(B_X),$$

où $\mathcal{D}(B_X)$ est la dg-catégorie des B_X-dg-modules parfaits. La dg-algèbre B_X est en quelque sorte l'analogue de l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}(X)$ du théorème de Gelfand 2.1. Cependant, la situation est ici un peu différente.

(1) En général, la dg-algèbre B_X ne permet pas de reconstruire la variété (ou le schéma) X. En effet, il existe de nombreux exemples de variétés X et Y non isomorphes, mais telles ques $\mathcal{D}(X) \simeq \mathcal{D}(Y)$. Dit autrement, deux variétés algébriques non isomorphes peuvent être isomorphes en tant que schémas non-commutatifs ! Il y a des raisons de penser que la relation d'équivalence que cela introduit sur les variétés algébriques est une relation pertinente, par exemple pour les questions de géométrie birationnelle (voir [Ku2]).

(2) La dg-algèbre B_X n'est pas canonique et dépend du choix d'un générateur compact $E \in \mathcal{D}(X)$. En particulier, B_X n'est pas fonctoriel en X, seule la dg-catégories $\mathcal{D}(B_X)$ l'est. En d'autres termes, il faut considérer B_X uniquement à équivalence de Morita près (voir [To1, §4.4, Def. 8]).

La catégorie des nc-schémas. A ce stade il nous faut dire un mot ou deux sur la notion de morphismes entre nc-schémas sur la quelle nous sommes restés silencieux pour l'instant. Malheureusement c'est précisément le point où les choses se compliquent considérablement et pour le quel il est nécessaire d'utiliser le langage des infinies-catégories (voir [To2, §2.1]). Nous ne pouvons raisonnablement pas faire un détour vers les ∞-catégories dans ce texte, et nous nous contenterons donc de renvoyer vers d'autres références. Il est possible de remplacer formellement l'expression "∞-catégorie" par "catégorie" dans ce qui suit, cependant il faut garder en tête qu'alors plusieurs énoncés seront tout simplement incorrects.

Il existe tout d'abord une notion évidente de morphisme entre dg-catégories que nous appellerons morphisme strict. Un tel morphisme $f : T \longrightarrow T'$ entre deux dg-catégories T et T' est la donnée d'une application $Ob(T) \to Ob(T')$ entre les ensembles d'objets, et pour toute paire (x, y) d'objets de T d'un morphisme de complexes k-linéaires $f_{x,y} : T(x, y) \longrightarrow T'(f(x), f(y))$. On demande par ailleurs que les morphismes $f_{x,y}$ respectent les compositions et les unités de T et T'. Comme son nom l'indique, la notion de morphisme strict n'est malheureusement pas adaptée car trop rigide. On souhaite en effet identifier certaines dg-catégories qui ne sont pas strictement isomorphes. Pour cela il faut introduire la notion d'*équivalence Morita*. Il s'agit, en gros des morphismes stricts $f : T \longrightarrow T'$, qui vérifient les deux conditions suivantes.

– Tous les morphismes de complexes $f_{x,y} : T(x,y) \longrightarrow T'(f(x), f(y))$ sont des quasi-isomorphismes (i.e. induisent des isomorphismes sur les groupes de cohomologie correspondants).
– L'image de T par f *engendre* T' par les opérations qui consistent à prendre un facteur direct, le cône d'un morphisme ou le décalage.

La notion d'équivalence Morita entre dg-catégorie est la notion pertinente dans notre contexte, et il faut donc forcer le fait que ces équivalences sont des morphismes inversibles. Cela se fait par le procédé de localisation des catégories : on considère la catégorie des dg-catégories et morphismes stricts à laquelle on rajoute de manière formelle des inverses à toutes les équivalences Morita (voir [To1, §4.4]). Il se trouve que ce procédé de localisation est relativement profond, et le résultat n'est en général pas une catégorie mais une ∞-*catégorie*, comme cela est par exemple expliqué dans [To2, §2.1].

L'∞-catégorie ainsi obtenue, en localisant les dg-catégories le long des équivalence Morita, est, par définition, l'opposée de l'∞-catégorie des schémas non-commutatifs sur k. On notera

$$k - \mathbf{Sch}^{nc} := (dg - cat_k)[Morita^{-1}]^{op}.$$

Les objets de l'∞-catégorie $k - \mathbf{Sch}^{nc}$ sont simplement les dg-catégories sur k. En revanche les morphismes ne sont pas faciles à décrire. Un morphisme strict induit évidemment un morphisme dans $k - \mathbf{Sch}^{nc}$. Réciproquement on peut montrer que tout morphisme $T \longrightarrow T'$ dans $k - \mathbf{Sch}^{nc}$ peut se représenter par un diagramme de morphismes stricts $T \xleftarrow{v} T'' \xrightarrow{u} T'$, avec v une équivalence Morita. La combinatoire possible de ce type de diagrammes s'exprime précisément dans la structure ∞-catégorique portée par $k - \mathbf{Sch}^{nc}$.

Une géométrie des nc-schémas ? Nous venons de voir l'existence d'une ∞-catégorie des nc-schémas. Il est très certainement naturel de se poser la question de l'existence d'une *géométrie des nc-schémas*. Cette question est évidemment floue, mais est souvent interprétée comme la question de savoir étendre aux nc-schémas des notions standards de géométrie des variétés algébriques et des schémas. Nous souhaitons signaler ici qu'il n'existe pas, à proprement parler, de géométrie des nc-schémas. On peut s'en convaincre en considérant deux notions fondamentales en géométrie des schémas : la notion d'ouvert de Zariski et celle de points. Comme nous allons le voir, aucune de ces deux notions ne possède d'extension pertinente au cadre des nc-schémas.

– Les points non-commutatifs. Pour une variété algébrique X sur un corps k (ou plus généralement pour un k-schéma), les points (rationnels sur k) de X sont exactement les morphismes $Spec\, k \longrightarrow X$. Si l'on adopte cette définition pour les nc-schémas on trouve qu'un point d'un nc-schéma correspondant à une dg-catégorie T est un objet de T (on suppose ici que T est triangulée au sens de [To1, §4.4]). L'ensemble des objets d'une dg-catégorie T, même si l'on impose de fortes conditions de finitude sur T, tendent à former des espaces relativement pathologiques. Ces espaces sont en général très fortement non-séparés et présentent un nombre dénombrable de composantes irréductibles, y compris lorsque l'on suppose T de la forme $\mathcal{D}(X)$ pour X une variété propre et lisse (voir [To-Va]). Il parait délicat, voire impossible, de penser faire de la géométrie (au sens l'on en fait avec des variétés algébriques) avec cette notion de points.

– Les ouverts non-commutatifs. La situation avec les ouverts de Zariski est relativement similaire. Pour un schéma X, tout ouvert $U \subset X$ peut-être vu comme le complémentaire du support d'un complexe parfait sur X. Ce fait incite naturellement à définir les ouverts de nc-schémas comme étant les complémentaires d'objets. Plus précisément, si un nc-schéma est donnée par une dg-catégorie T, et si $K \in T$ est un de ses objets, on peut considérer le morphisme quotient $T \longrightarrow T/ < K >$, qui consiste à rendre nul l'objet K de manière universelle. Ce morphisme quotient définit un morphisme de nc-schémas $T/ < K > \longrightarrow T$ que l'on voit comme un ouvert de Zariski de T (complémentaire du support de K). Cependant, si l'on adopte cette définition, on voit que la droite projective $\mathbb{P}^1$ possède un ouvert isomorphe à un point $Spec\, k$ (e.g. comme complémentaire de l'objet $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$).

Les deux exemples précédents montrent que les extensions naturelles des notions de points et d'ouverts au cadre des nc-schémas ne sont pas pertinentes, tout au moins si l'on souhaite faire de la géométrie en un sens relativement standard. Il n'y a, à priori, pas de raisons formelles à ce que d'autres définitions, plus pertinentes, puissent exister. Cependant, nous sommes convaincus que chercher à faire de la géométrie avec des nc-schémas, tout en cherchant à rester proche de la géométrie des schémas et des variétés, est probablement voué à l'échec. De manière plus brutale et polémique, nous pensons que la géométrie des nc-schémas n'existe pas ! Ce point de vue est par ailleurs partagé, et a par exemple amené Kontsevich à introduire l'expression amusante de *non-commutative non-geometry.*

D'une certaine manière, c'est la nature de la théorie des nc-schémas de ne pas préserver les notions standards de la géométrie algébrique, tels que les ouverts, les points, ou encore des notions plus avancées comme la platitude. La philosophie sous-jacente est ici qu'il faut accepter de perdre sur certains aspects pour gagner sur d'autres. Ici, on gagne très certainement sur la souplesse et la simplicité de la définition de nc-schémas, qui permet de son côté de produire de très nombreux exemples. D'un autre côté, nous allons voir que les nc-schémas possèdent des théories cohomologiques forts pertinentes, y compris des notions sophistiquées telles la cohomologie ℓ-adique. Ce fait est des plus surprenant sachant que la notion de topologie (que se soit de Zariski ou étale) n'est plus disponible pour les nc-schémas. On touche là la force de la théorie des nc-schémas : la définition de nc-schéma est extrêmement générale (presque naïve à première vue), mais on sait tout de même définir la cohomologie de tels objets, et donc certains invariants numériques de type caractéristique d'Euler.

3. Cohomologie des nc-schémas

Nous venons de voir l'existence d'une ∞-catégorie de schémas non-commutatifs $k - \mathbf{Sch}^{nc}$, munie d'un foncteur $k - \mathbf{Sch} \longrightarrow k - \mathbf{Sch}^{nc}$ qui associe à tout k-schéma X le schéma non-commutatif correspondant $\mathcal{D}(X)$. Nous avons aussi vu que les notions usuelles de géométrie ne sont plus toujours pertinentes dans le monde non-commutatif. Cependant, certaines constructions et outils de la géométrie algébrique se généralisent au cadre non-commutatif, et c'est le cas en particulier des invariants de nature cohomologique. Étant donné le manque de notion de géométrie de base dans le cadre non-commutative (essentiellement absence de la notion de topologie) ceci peut paraitre surprenant (et ça l'est aux yeux des auteurs). Il faut cependant relativiser : tout se que l'on sait faire avec la cohomologie des schémas ne s'étend pas au cas des nc-schémas. L'essentiel pour nous est que la notion de caractéristique d'Euler garde un sens, ainsi que la formule de traces qui permet de la décrire en termes d'invariants algébriques. C'est ce que nous allons décrire maintenant.

Pour une variété algébrique propre et lisse X sur un corps k, on dispose des espaces de cohomologie ℓ-adique $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. Ce sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension fini sur le quel le groupe de Galois $Gal(k^{sp}/k)$ opère. Par ailleurs, on dispose aussi des faisceaux des formes différentielles Ω^q_X et de leur cohomologie $H^i(X, \Omega^q_X)$. Ces groupes de cohomologie ne se comportent pas vraiment de manière raisonnable et ne forment pas une bonne théorie cohomologique à proprement parler. Cependant, on dispose de la formule de Gauss-Bonnet (théorème 1.2) qui prédit que les deux caractéristiques d'Euler correspondantes sont égales. Il se trouve que cette situation persiste dans le contexte non-commutatif. Dans cette section nous présentons les versions non-commutatives de ces deux types de cohomologie.

Homologie de Hochschild comme formes différentielles non-commutatives. Commençons par le cas de la cohomologie de Hodge $H^i(X, \Omega^q_X)$. La version non-commutative de cette cohomologie est connue depuis des décennies et s'appelle l'homologie de Hochschild. Historiquement elle a d'abord été introduite par Hochschild dans le cadre des algèbres puis généralisée à des cadres plus généraux dont celui des dg-catégories (voir par exemple [Ke, §5.3]). Le point important pour nous est que l'homologie de Hochschild possède en réalité une interprétation en termes de traces dans une ∞-catégorie monoidales adéquate, ce que nous verrons plus tard dans la section suivante. Nous nous contentons ici de rappeler brièvement sa construction.

Soit donc un nc-schéma sur un anneau k, donné par une dg-catégorie T. On construit un complexe de Hochschild $C_*(T)$. Ce complexe est un modèle à ce que l'on est en droit de noter $T \otimes^{\mathbb{L}}_{T\otimes^{\mathbb{L}}_k T^o} T$. Les formules explicites décrivant le complexe $C_*(T)$ se trouvent par exemple dans [Ke, §5.3]. Le cohomologie du complexe $C_*(T)$ est par définition l'homologie de Hochschild de T, que l'on peut aussi appeler la cohomologie de Hodge du schéma non-commutatif correspondant. On note ces groupes par $HH_i(T) := H^{-i}(C_*(T))$, qui sont naturellement des k-modules. En général, sans hypothèses additionnelles sur T ces groupes sont des k-modules potentiellement arbitraires et ne satisfont aucune condition de finitude. Nous verrons à la section suivante qu'une condition simple sur T (propreté et lissité au sens non-commutatif) assure que $HH_i(T)$ sont de type fini, et plus généralement que la caractéristique d'Euler $\sum(-1)^i[HH_i(T)]$ est bien définie comme élément de $K_0(k)$. Pour l'instant nous nous contenterons des quelques propriétés importantes suivantes.

(1) Soit X une variété algébrique lisse sur un corps k, et considérons le nc-schéma correspondant $\mathcal{D}(X)$. On dispose alors d'isomorphismes naturels (appelé HKR pour Hochschild-Kostant-Rozenberg) de k-espaces vectoriels (pour $i \in \mathbb{Z}$)
$$HH_i(\mathcal{D}(X)) \simeq \bigoplus_{p-q=i} H^p(X, \Omega^q_X).$$

(2) Si A est une k-algèbre plate, et $\mathcal{D}(A)$ le nc-schéma correspondant, alors on a
$$HH_i(\mathcal{D}(A)) \simeq Tor_i^{A\otimes_k A^o}(A, A).$$

(3) La construction $T \mapsto C_*(T)$ envoie équivalences Morita de dg-catégories sur quasi-isomorphismes de complexes. Elle induit en particulier un ∞-foncteur $C_* : k-\mathbf{Sch}^{nc} \longrightarrow L(k)^{op}$, où $L(k)$ est l'∞-catégorie des complexes de k-modules (obtenue en localisant la catégorie des complexes le long des quasi-isomorphismes, voir [To1]).

Il existe aussi une version à coefficients. Pour T une dg-catégorie et $f : T \longrightarrow T$ un endomorphisme de T, on dispose d'un complexe $C_*(T, f)$, qui est cette fois un modèle à $T \otimes^{\mathbb{L}}_{T\otimes^{\mathbb{L}}_k T^o} \Gamma(f)$. Ici $\Gamma(f)$ est le graphe de f, c'est à dire le bimodule sur T qui envoie (x, y) sur $T(y, f(x))$. Lorsque $f = id$, on retrouve le complexe de Hochschild ci- dessus $C_*(T, id) = C_*(T)$. Il faut penser que $C_*(T, f)$ représente l'intersection entre la diagonale de T et le graphe de f, et est donc un avatar algébrique des points fixes de l'endomorphisme f. En particulier, lorsqu'elle est définie, la caractéristique d'Euler de $C_*(T, f)$ est en droit de s'appeler le *nombre de Lefschetz de* f, qui représente le nombre virtuel de points fixes.

Cohomologie ℓ-adiques des nc-schémas. Nous venons de voir que l'homologie de Hochschild des dg-catégories permettait de donner un sens à la cohomologie de Hodge des nc-schémas. Le cas de la cohomologie ℓ-adique est une autre histoire et sa définition dans le contexte non-commutatif est très récente. Elle est basée sur des résultats de Thomason qui affirment que la cohomologie ℓ-adique d'un schéma peut être reconstruite à partir de sa K-théorie algébrique. Cette idée à été reprise par Blanc dans [Bla] afin d'introduire la notion de cohomologie de Betti rationnelle de dg-catégories complexes. Dans [Bl-Ro-To-Ve], cette construction est reprise dans le contexte ℓ-adique. Les détails de la construction dépassent le cadre de ce texte de survol, nous allons nous contenter d'esquisser l'idée générale et de rappeler les principales propriétés.

Soit donc T une dg-catégorie sur k représentant un nc-schéma. Pour simplifier, mais ce n'est pas strictement nécessaire, nous supposerons que T ne possède qu'un unique objet, et est donc donnée par une dg-algèbre B. L'idée est alors d'approximer T par des k-schémas commutatifs affines lisses sur k de la manière suivante. Pour tout schéma affine lisse $Spec\, A$ sur k, on considère la dg-algèbre $A \otimes_k B$. On regarde $K(A \otimes_k B)$, l'espace de K-théorie algébrique de la dg-algèbre $A \otimes_k B$, L'association $A \mapsto K(A \otimes_k B)$ défini un foncteur des schémas affines lisses sur k vers celle des espaces. Ce foncteur sera noté K^T et définit une théorie cohomologique généralisée pour les k-schémas. En d'autres termes K^T définit un objet de $\mathcal{SH}_k$, la (∞-)catégorie homotopique stable des k-schémas au sens de Morel-Voevodsky (voir [Mo-Vo]). On observe que lorsque $T = k$ est la dg-catégorie unitaire (un seul objet et k comme endomorphisme), alors $K^k = B\mathbb{U}_k$ est le spectre de K-théorie motivique au-dessus de k (aussi noté KGL dans la littérature). Cela permet de voir que K^T est naturellement muni d'une structure de modules au-dessus de $B\mathbb{U}_k$. On utilise alors la construction de réalisation ℓ-adique de [Ay], qui est par définition un ∞-foncteur $r_\ell : \mathcal{SH}_k \longrightarrow \mathcal{D}(S, \mathbb{Q}_\ell)$, où $\mathcal{D}(S, \mathbb{Q}_\ell)$ est l'∞-catégorie des complexes $\mathbb{Q}_\ell$-adiques ind-constructibles sur $S := Spec\, k$. La réalisation de K^T est ainsi un objet de $\mathcal{D}(S, \mathbb{Q}_\ell)$, qui est par ailleurs un module sur $r_\ell(B\mathbb{U}_k)$. Il est facile de voir que l'on a

$$r_\ell(B\mathbb{U}_k) \simeq \mathbb{Q}_\ell(\beta) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell[2i](i).$$

Définition 3.1. *La* cohomologie ℓ-adique de T *est le* $\mathbb{Q}_\ell(\beta)$*-module* $r_\ell(K^T)$ *défini ci-dessus. Il sera noté*

$$\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell) := r_\ell(K^T) \in \mathbb{Q}_\ell(\beta) - Mod.$$

Notons que par définition $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ est un complexes de faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur S_{et}, le petit site étale de $S = Spec\, k$. Notons aussi que cet objet est un module sur $\mathbb{Q}_\ell(\beta)$, ou en d'autres termes il est 2-*périodique à twist de Tate près*

$$\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)[2](1) \simeq \mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell).$$

Donc, lorsque k contient les racines de l'unité, ceci se transforme en un 2-périodicité $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)[2] \simeq \mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$.

Les deux propriétés fondamentales de la construction $T \mapsto \mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ sont les suivantes.

(1) Supposons que $p : X \longrightarrow S = Spec\, k$ soit un k-schéma séparé et de type fini. On supposera de plus que soit le morphisme p est propre, soit k est un corps. Alors, on dispose d'isomorphismes naturels dans $\mathcal{D}(S, \mathbb{Q}_\ell)$

$$\mathbb{H}(\mathcal{D}(X), \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{R}p_*(\mathbb{Q}_\ell(\beta)) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}p_*(\mathbb{Q}_\ell)[2i](i).$$

En particulier, si k est un corps algébriquement clos on a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{D}(X), \mathbb{Q}_\ell) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{k+2i}_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

(2) Si $T_0 \subset T$ est une sous-dg-catégorie, et si T/T_0 est le quotient dans l'∞-catégorie des dg-catégories et morphismes Morita, alors on a un triangle distingué

$$\mathbb{H}(T_0, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}(T/T_0, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{+1}$$

En particulier, on dispose d'une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \longrightarrow \mathbb{H}^k(T_0, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}^k(T, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}^k(T/T_0, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}^{k+1}(T_0, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \dots$$

4. Une formule des traces

Nous venons de voir qu'il était possible de définir la cohomologie des schémas non-commutatifs, et de fait que du point de vu cohomologique les nc-schémas partageaient des similarités avec les schémas. Nous allons maintenant observer un phénomène purement non-commutatif, qui n'a pas d'analogue pour les schémas : la dualité. Appliquer à un nc-schéma de la forme $\mathcal{D}(X)$ pour X une variété propre et lisse, cette dualité est une incarnation de la dualité de Poincaré. Un point clé est qu'ici cette dualité existe déjà dans la catégorie des schémas non-commutatifs, avant d'en prendre la cohomologie.

On commence par observer que l'∞-catégorie $k-\mathbf{Sch}^{nc}$ des nc-schémas est munie d'une structure monoïdale symétrique $\otimes_k$, qui est la version non-commutative du produit de deux schémas. Pour deux nc-schémas T et T', leur produit tensoriel $T \otimes_k T'$ est simplement la dg-catégorie produit tensoriel de T avec T' au-dessus de k. L'ensemble des objets de $T \otimes_k T'$ est l'ensemble produit $Ob(T) \times Ob(T')$, et pour deux couples (x, x') et (y, y') le complexe des morphismes est le produit tensoriel des complexes de morphismes $T(x, y) \otimes_k T'(x', y')$. Cette opération munit $k-\mathbf{Sch}^{nc}$ d'une structure monoïdale symétrique $\otimes_k$, qui se trouve être compatible avec la structure produit sur la catégorie des k-schémas : l'∞-foncteur $X \mapsto \mathcal{D}(X)$ se promeut en un ∞-foncteur monoïdal symétrique (c'est une conséquence des résultats de [To3]) $\mathcal{D} : k-\mathbf{Sch} \longrightarrow k-\mathbf{Sch}^{nc}$.

Rappelons que pour une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes)$, on dispose d'une notion d'objet *dualisable*, qui formalise la notion de dualité parfaite entre espaces vectoriels de dimension finie par exemple. Un objet $x \in C$ est dit dualisable s'il existe un objet $x^\vee \in C$ et deux morphismes (appelés coévaluation et évaluation)

$$\mathbf{1} \xrightarrow{coev} x \otimes x^\vee \xrightarrow{ev} \mathbf{1},$$

qui vérifient les identités triangulaires naturelles. On montre que lorsque un dual $x^\vee$ existe il est automatiquement unique à isomorphisme unique près. Être dualisable est ainsi une propriété et les données $(x^\vee, ev, coev)$ sont entièrement déterminées par l'objet x lorsqu'elles existent. Par exemple, lorsque $(C,\otimes)$ est la catégorie des modules sur une anneau commutatif k, on montre facilement que les objets dualisables sont exactement les k-modules projectifs et de type fini. Pour un tel module M son dual $M^{\vee}$ est canoniquement isomorphe au module $\underline{Hom}(M,k)$ et l'application ev est l'application d'évaluation naturelle qui envoi $m\otimes u$ sur $u(m)$.

Ce que nous venons de résumer pour les catégories garde un sens pour les ∞-catégories (voir par exemple [To-Ve1]), et nous posons alors la définition suivante.

Définition 4.1. *Un nc-schéma $T \in k-\mathbf{Sch}^{nc}$ est* saturé *s'il est dualisable dans l'∞-catégorie monoïdale symétrique $(k-\mathbf{Sch}^{nc},\otimes_k)$.*

Il se trouve que l'on peut décrire explicitement ce que sont les nc-schémas saturés. On montre en effet (voir [To4, Prop. 2.5]) qu'il s'agit exactement des dg-algèbres *propres et lisses*. Rappelons qu'une dg-algèbre B sur k est propre si le complexe sous-jacent à B est parfait (i.e. quasi-isomorphe à un complexe borné de k-modules projectifs de type fini). Elle est dite lisse si l'objet B possède une résolution finie en tant que $B\otimes_k B^o$-dg-module (de manière plus précise si c'est un objet compact de la catégorie dérivée des bimodules $D(B\otimes_k B^o)$). Il n'est pas difficile de voir que pour un schéma X de type fini et séparé sur k, le nc-schéma $\mathcal{D}(X)$ est propre si et seulement si X est propre sur k, et de même X est lisse sur k si et seulement si le nc-schéma $\mathcal{D}(X)$ est lisse. Ces notions de propreté et lissité sont donc compatibles avec les notions usuelles pour les schémas.

Homologie de Hochschild des nc-schémas saturés. Une des propriétés fondamentales des objets dualisables est qu'ils sont conservés par n'importe quel foncteur monoïdal symétrique. Par exemple, le foncteur d'homologie de Hochschild

$$C_* : k-\mathbf{Sch}^{nc} \longrightarrow L(k)^{op}$$

se promeut en un ∞-foncteur monoïdal symétrique. En particulier, si T est un nc-schéma saturé alors $C_*(T)$ est objet dualisable de $L(k)$, ou de manière équivalente c'est un complexe parfait. En particulier, la classe $\sum_i(-1)^i[HH_i(T)]$ est bien définie dans $K_0(k)$. Il en est de même pour les versions à coefficients : si T est saturé et $f : T \longrightarrow T$ est un endomorphisme de T, alors $C_*(T,f)$ est un complexe parfait. On dispose ainsi d'une classe de K-théorie $\sum_i(-1)^i[HH_i(T,f)]$. En particulier, lorsque $S = Spec\, k$ est connexe, on dispose d'une fonction rang $rang : K_0(k) \longrightarrow \mathbb{Z}$, et l'on peut alors définir la caractéristique d'Euler

$$\chi(HH_*(T,f)) := rang(\sum_i(-1)^i[HH_i(T,f)]) \in \mathbb{Z}.$$

Il est intéressant de noter que le complexe $C_*(T,f)$ peut aussi s'interpréter comme la *trace de* f dans l'∞-catégorie monoïdale symétrique $k-\mathbf{Sch}^{nc}$. De manière générale, si x est un objet dualisable dans une catégorie monoïdale symétrique $(C,\otimes)$, et si f est un endomorphisme de x, on peut définir une trace de f comme un élément du monoïde $End(\mathbf{1})$ des endomorphismes de l'unité. Par dualité, l'endomorphisme f définit un morphisme $\Gamma(f) : \mathbf{1} \longrightarrow x\otimes x^{\vee}$, appelé le graphe de f, que l'on compose avec le morphisme évaluation $ev : x\otimes x^{\vee} \longrightarrow \mathbf{1}$ pour obtenir le trace de f

$$Tr(f) := ev\circ\Gamma(f) : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Dans le cas où $C = k-\mathbf{Sch}^{nc}$, l'unité est la dg-catégorie k (un seul objet et k comme endomorphisme), et l'on peut voir que $End(k)$ s'identifie à l'espace des complexes parfaits de k-modules. Ainsi, la trace d'un endomorphisme f d'un nc-schéma saturé T est un complexe de k-module, et l'on vérifie que l'on a $C_*(T,f) = Tr(f)$ en tant qu'endomorphisme de l'unité k.

Signalons enfin ce qu'il se passe dans le cas particulier d'une variété propre et lisse X sur un corps k et d'un endomorphisme f de X. Tout d'abord, on peut voir que $\mathcal{D}(X)$ est autodual, par l'équivalence $\mathcal{D}(X) \simeq \mathcal{D}(X)^o$ qui envoie un complexe parfait E sur X sur le complexe dual $\mathbb{R}\underline{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$. Avec cette identification, le morphisme d'évaluation $\mathcal{D}(X) \otimes_k \mathcal{D}(X) \longrightarrow k$, correspond au dg-foncteur $k \longrightarrow \mathcal{D}(X) \otimes_k \mathcal{D}(X) \simeq \mathcal{D}(X \times_k X)$ qui pointe le faisceau structural de la diagonale Δ_X. Le morphisme de coévaluation quand à lui correspond au dg-foncteur $\mathcal{D}(X \times_k X) \longrightarrow \mathcal{D}(k)$ qui envoie un complexe $E \in \mathcal{D}(X \times X)$ sur $\mathbb{H}(X \times_k X, \Delta_X \otimes^{\mathbb{L}} E)$. Le fait que ces morphismes fasse de $\mathcal{D}(X)$ un objet dual de lui-même, implique qu'il induit un accouplement non-dégénéré en homologie de Hochschild

$$< -, - >: HH_*(\mathcal{D}(X)) \otimes_k HH_*(\mathcal{D}(X)) \longrightarrow k.$$

A l'aide de l'identification HKR $HH_*(\mathcal{D}(X)) \simeq H^*(X, \Omega^*_X)$, l'accouplement ci- dessus n'est autre que le produit d'intersection en cohomologie de Hodge. Le fait que ce produit d'intersection soit non-dégénéré est bien la dualité de Poincaré en cohomologie de Hodge.

Cohomologie ℓ-adique des nc-schémas saturés. On s'attend à ce que la cohomologie ℓ-adique des nc-schémas saturés se comportent de manière similaire à celle des variétés propres et lisses. Cependant, ce fait se résume aujourd'hui en un ensemble de questions ouvertes, que nous n'appellerons pas conjectures par prudence, et il manque encore des énoncés généraux. Plutôt que d'en faire une liste exhaustive, citons ci-dessous la propriété clé pour la formule des traces.

Pour cela, rappelons qu'un un nc-schéma T nous associons une théorie cohomologique généralisée K^T. Les produits externes en K-théorie induisent des produits

$$K^T \wedge_{B\mathbb{U}_k} K^{T'} \longrightarrow K^{T \otimes_k T'}.$$

Après réalisation ℓ-adique on obtient des morphismes de Kunneth

$$\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell(\beta)} \mathbb{H}(T', \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}(T \otimes_k T', \mathbb{Q}_\ell).$$

Définition 4.2. *Soit T un schéma non-commutatif sur k. Nous dirons que T est* $\otimes$-admissible *si le morphisme du Kunneth*

$$\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell(\beta)} \mathbb{H}(T^o, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}(T \otimes_k T^o, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un quasi-isomorphisme dans $\mathcal{D}(S, \mathbb{Q}_\ell)$.

Nous nous attendons en réalité à ce que tout nc-schéma saturé T soit $\otimes$-admissible au sens ci-dessous. Nous pensons plus généralement qu'une large classe de nc-schémas soient $\otimes$-admissibles, comme par exemple les nc-schémas de *type fini* au sens de [To-Va]. Cependant, de tels énoncés nous paraissent inaccessibles pour l'instant. Noter que si T est saturé et $\otimes$-admissible, alors il s'en suit formellement que $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $\mathbb{Q}_\ell(\beta)$-module localement constant et de rang fini. Lorsque k est un corps algébriquement clos cela est équivalent au fait que chaque $\mathbb{H}^i(T, \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension fini. Il faut donc comprendre la notion de $\otimes$-admissibilité comme une notion de finitude plutôt qu'une notion formelle liée aux structures monoïdales, elle est essentiellement équivalent à la finitude de la cohomologie ℓ-adique.

Pour terminer, sans avoir accès à des énoncés généraux assurant la $\otimes$-admissibilité, il nous faudra vérifier au cas pas cas que les nc-schémas aux quels l'on souhaite appliquer la formule des traces, sont

$\otimes$-admissibles.

Une formule des traces non-commutative I. Nous arrivons enfin à l'énoncé de la formule des traces dans le cadre non-commutatif. Pour cela, soit T un nc-schéma saturé et que nous supposerons $\otimes$-admissible au sens de la définition 4.2. Soit $f : T \longrightarrow T$ un endomorphisme de T. Nous supposons aussi que $S = Spec\, k$ est connexe, de sorte à ce que l'entier $\chi(HH_*(T, f))$ soit bien défini. Par ailleurs, la $\otimes$-admissibilité de T assure que $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $\mathbb{Q}_\ell(\beta)$-module dualisable. Ainsi, l'endomorphisme f induit sur $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ possède une trace bien définie qui est un élément de $H^0_{et}(S, \mathbb{Q}_\ell(\beta))$. Si l'on suppose de plus que S est strictement hensélien, on dispose d'un isomorphisme canonique $H^0_{et}(S, \mathbb{Q}_\ell(\beta)) \simeq \mathbb{Q}_\ell$. La trace de f est ainsi un élément bien défini $Tr(f_{|\mathbb{H}(T,\mathbb{Q}_\ell)}) \in \mathbb{Q}_\ell$.

Théorème 4.3 ([To-Ve2])**.** *Avec les hypothèses et notation ci-dessus, on a*

$$\chi(HH_*(T, f)) = Tr(f_{|\mathbb{H}(T,\mathbb{Q}_\ell)}).$$

Étonnamment le théorème 4.3 n'est pas difficile à démontrer et se déduit formellement des aspects monoïdaux et de dualité. Le point clé est l'existence d'une version non-commutative du caractère de Chen $Ch : K_0(T) \longrightarrow \mathbb{H}^0(T, \mathbb{Q}_\ell)$, et de ses propriété multiplicative et fonctorielle. L'existence de ce caractère de Chern est quand à lui une conséquences des travaux de fondements de Tabuada et Robalo sur les motifs non-commutatifs (voir [Ro, Ta]). Bien entendu, lorsque $T = \mathcal{D}(X)$ pour X une variété propre et lisse sur un corps k, et f est induite par un endomorphisme de X, la formule du théorème 4.3 retrouve la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz-Verdier ([SGA5, Exp. III]). Nous renvoyons à [To-Ve2] pour les détails sur la preuve de cette formule des traces.

Une formule des traces non-commutative II. La formule des traces ci-dessus n'est malheureusement pas suffisante pour nous. Il arrive en effet parfois que certains nc-schémas T ne soient pas saturés en tant que nc-schéma au-dessus de k, mais uniquement au-dessus de certaines bases convenables. C'est une situation similaire à un k-schéma X qui ne serait pas propre et lisse au-dessus de $S = Spec\, k$, mais propre et lisse au-dessus de Y un second k-schéma. Un exemple typique est celui d'une dg-catégorie 2-périodique T, dont nous allons voir un exemple d'origine géométrique important à la section suivante. Une telle dg-catégorie, considérée comme une nc-schéma sur k n'est jamais propre (à moins qu'elle soit nulle) car ses complexes de morphismes étant 2-périodiques ne sont jamais parfaits sur k.

Nous sommes ainsi amenés à considérer la situation plus générale suivante. On se fixe un nc-schéma B *en comonoïdes*, c'est à dire que l'on suppose que B vient avec un morphisme diagonal $\Delta : B \longrightarrow B \otimes_k B$ dans $k - \mathbf{Sch}^{nc}$. En termes de dg-catégories, cela signifie que B est munie d'une structure monoïdale (non-nécessairement symétrique) $\otimes : B \otimes_k B \longrightarrow B$. On peut alors définir les *nc-schémas au-dessus de* B comme étant des nc-schémas sur k munis d'une coaction de B. En termes de dg-catégories il s'agit de dg-catégories T munie d'un produit tensoriel externe $B \otimes_k T \longrightarrow T$, faisant de T un objet en B-modules (on parle aussi de dg-catégories B-linéaires). On dispose ainsi qu'une ∞-catégorie $B - \mathbf{Sch}^{nc}$ des nc-schémas au-dessus de B. Lorsque $B = k'$ est une k-algèbre commutative, on retrouve bien entendu les nc-schémas au-dessus de k', mais l'intérêt de cette notion est précisément de s'autoriser des bases B plus exotiques. Un exemple fondamental est le cas où $B = k[u, u^{-1}]$, avec u une variable libre en degré 2. Dans ce cas les nc-schémas au-dessus de B ne sont autre que les nc-schémas 2-périodiques. Un autre exemple est donné par le cas où B est la catégorie des représentations

k-linéaires d'un groupe fini G, auquel cas les nc-schémas au-dessus de B peuvent être vus comme des nc-schémas G-équivariants.

On dispose donc d'une ∞-catégorie $B - \mathbf{Sch}^{nc}$ des nc-schémas au-dessus de B. Il nous faut maintenant introduire une notion de saturation pour de tels objets et une nouvelle complication entre en jeu. En effet, à moins que B soit un comonoïde cocommutatif (c'est à dire que la dg-catégorie monoïdale sous-jacente soit monoïdale symétrique), il n'existe pas de structure monoïdale naturelle sur $B - \mathbf{Sch}^{nc}$ (cela est à rapprocher de la situation des modules sur un anneau non-commutatifs). En revanche, pour un nc-schéma T au-dessus de B, on peut donner un sens à $T \otimes_B T^o$, comme nc-schéma au-dessus de k. Cela permet de parler de morphismes évaluation et coévaluation pour $T \in B - \mathbf{Sch}^{nc}$, et ainsi de définir la notion de *nc-schémas saturés au-dessus de* B. Nous renvoyons à [To-Ve2] pour les détails formels.

Soit donc T un nc-schéma saturé sur B. Les morphismes évaluation et coévaluation définissent des morphismes de nc-schémas sur k

$$B \xrightarrow{coev} T \otimes_B T^o \xrightarrow{ev} k,$$

dont le composé correspond à un objet de B. Cet objet est, par définition, $C_*(T/B)$, le complexe d'homologie de Hochchild de T relatif à B. On dispose ainsi d'une classe bien définie

$$[C_*(T/B)] \in K_0(B),$$

à la quelle il faut penser comme étant $\sum_i (-1)^i [HH_i(T/B)]$, bien que cette somme formelle n'ait plus vraiment de sens ici (car $HH_i(T/B)$ ne sont plus des objets de B en général). De la même manière, si T est un muni d'un endomorphisme f, on dispose d'un version à coefficients $C_*(T/B, f)$ et de sa classe $[C_*(T/B, f)] \in K_0(B)$. On peut alors considérer le caractère de Chern de cette classe pour obtenir

$$Ch([C_*(T/B, f)]) \in \mathbb{H}^0(B, \mathbb{Q}_\ell).$$

Par ailleurs, on dispose d'une version relative à B de la $\otimes$-admissibilité au sens de la définition 4.2. Un nc-schéma T sur B est dit $\otimes$-admissible si le morphisme de Kunneth

$$\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{H}(B,\mathbb{Q}_\ell)} \mathbb{H}(T^o, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{H}(T \otimes_B T^o, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un quasi-isomorphisme. Pour un tel nc-schéma, $\mathbb{H}(T, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $\mathbb{H}(B, \mathbb{Q}_\ell)$-module dualisable. La trace de l'endomorphisme induit par f possède donc un sens (voir [To-Ve2])

$$Tr(f_{|\mathbb{H}(T,\mathbb{Q}_\ell)}) \in \mathbb{H}^0(B, \mathbb{Q}_\ell).$$

La formule des traces au-dessus de B se lit alors comme suit.

Théorème 4.4 ([To-Ve2])**.** *Avec les hypothèses et notation ci-dessus, on a*

$$Ch([C_*(T/B, f)]) = Tr(f_{|\mathbb{H}(T,\mathbb{Q}_\ell)}).$$

Pour terminer, il existe aussi une extension de la formule ci-dessus lorsque maintenant l'endomorphisme f de T n'est pas plus B-linéaire mais recouvre un endomorphisme g de B qui préserve la structure de comonoïde. Dans ce cas la formule garde un sens mais est une égalité dans $\mathbb{H}^0(C_*(B, g), \mathbb{Q}_\ell)$, où $C_*(B, g)$ est le complexe de Hochschild de B à coefficients dans g (qui est lui-même une dg-algèbre). Nous verrons que disposer d'une formule pour un cadre à ce point général est utile.

5. Application à la formule du conducteur

Nous arrivons enfin à la dernière partie de ce texte dans la quelle nous allons appliquer la formule des traces du Théorème 4.4 à la formule du conducteur de Bloch. Nous allons expliquer comme cette formule des traces implique la Conjecture 1.3 sous l'hypothèse additionnelle que la monodromie est unipotente. Nous indiquerons aussi comment nous pensons que le cas général en découle.

Nous revenons au contexte de la Conjecture 1.3. Soit A un anneau de valuation hensélien, et $X \longrightarrow S = Spec\, A$ un morphisme propre de schémas. On suppose que X est un schéma régulier et que la fibre générique géométrique X_t est lisse sur K^{sp}. On choisit π une uniformisante de A et on note $k = A/(\pi)$ le corps résiduel qui est supposé parfait. La Conjecture 1.3 se ramène aisément au cas où k est algébrique clos, et nous supposerons donc que $k = k^{sp}$.

Nous allons introduire un nc-schéma $MF(X, \pi)$, qui représente d'une certaine façon la "différence" $X_o - X_t$, entre la fibre spéciale et la fibre générique, au quel nous appliquerons la formule des traces 4.3 pour $f = id$. Pour commencer, pour un schéma Y et une fonction $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ sur Y, on définit un nc-schéma $MF(Y, f)$ de la manière suivante. On commence par supposer que $Y = Spec\, B$ est un schéma affine, et ainsi la fonction f peut être vue comme un élément de B. On définit une dg-catégorie $MF(B, f)$ dont les objets sont des quadruplets $E := (E_0, E_1, u, v)$, où

– E_0 et E_0 sont des B-modules projectifs de type fini
– $u : E_0 \longrightarrow E_1$ et $v : E_1 \longrightarrow E_0$ sont des morphismes de B-modules
– on a $uv = vu = \times f$.

Pour deux tels objets E et E', on dispose d'un complexe de morphismes naturel $Hom(E, E')$ qui définissent de manière évidente une dg-catégorie $MF(B, f)$. Lorsque Y n'est plus nécessairement affine on définit $MF(Y, f)$ par recollement (voir [Bl-Ro-To-Ve]).

Dans notre situation, d'une famille de variétés algébriques $X \longrightarrow S$, l'uniformisante π définit une fonction sur S, et par précomposition une fonction sur X que nous notons encore π. Cela permet de donner un sens à la dg-catégorie $MF(X, \pi)$ et au nc-schéma correspondant. A priori le nc-schéma est au-dessus de A. Cependant, il est par définition 2-périodique et donc ne peut être propre sur A. Il est certainement propre sur $A[u, u^{-1}]$ mais en revanche n'est pas lisse sur $A[u, u^{-1}]$ car il est concentré sur le point fermé $Spec\, k \hookrightarrow S$. Pour faire de $MF(X, \pi)$ un nc-schéma saturé il nous faut introduire une base relativement exotique que nous noterons B, construite de la manière suivante.

Le point fermé $x := Spec\, k \longrightarrow S$ permet de définir un groupoïde $G := x \times_S x$ au-dessus de x. Il faut comprendre ici le produit fibré $x \times_S x$ au sens de la géométrie dérivée de [To2] pour obtenir un groupoïde G non-trivial sur x. L'objet G est donc un groupoïde dans les schémas dérivés qui opère sur le schéma x. Cette opération est non-triviale et d'une certaine façon le quotient de x par l'action de G s'identifie au complété formel $\hat{S}_x$ de S le long de x (voir [To2, Thm. 4.1] pour des résultats plus précis allant dans ce sens). Le schéma dérivé G est facile à décrire, on a $G \simeq Spec\, k \oplus k[1]$, où $k \oplus k[1]$ est la k-algèbre simpliciale commutative qui est l'extension de carré nul triviale de k par $k[1]$, la suspension de k. En revanche, la structure de groupoïde au-dessus de x est subtile, particulièrement lorsque A est d'inégale caractéristique. En égale caractéristique G est un groupe abélien dérivé qui opère trivialement sur x. En revanche, lorsque la caractéristique est mixte G n'est plus équivalent à un groupe, et l'on remarque déjà que les morphismes source et but $G \rightrightarrows x$ ne sont pas égaux.

L'unité de G produit un point fermé $x \hookrightarrow G$, et ainsi un faisceau gratte-ciel $k(x)$ sur G. On pose

$$B^+ := \mathbb{R}\underline{Hom}(k(x), k(x)),$$

la dg-algèbre des endomorphismes (dérivés) du faisceau cohérent $k(x)$. Il est facile de voir que B^+ s'identifie à $k[u]$ avec u en degré 2. Cependant, B^+, en tant que nc-schéma, est aussi muni d'une structure de comonoïde non-triviale. Cette structure est en réalité induite par une structure E_2 sur B^+, elle-même produite par le produit de convolution des cohérents sur G (voir [Bl-Ro-To-Ve] pour plus de détails). On pose alors

$$B := B^+[u^{-1}].$$

Le nc-schéma B est naturellement un objet en comonoïde, et l'on montre le fait suivant.

Proposition 5.1. *Le nc-schéma $MF(X,\pi)$ vit naturellement au-dessus de B. De plus, il est saturé en tant qu'objet de $B - \mathbf{Sch}^{nc}$.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant, qui est un cas particulier nouveau de la Conjecture 1.3.

Théorème 5.2. *Le Conjecture 1.3 est vrai si on suppose de plus que la monodromie opère de manière unipotente sur $H^*(X_t, \mathbb{Q}_\ell)$.*

Signalons les grandes étapes de la preuve du théorème 5.2. On commence par observer que $K_0(B) \simeq \mathbb{Z}$. Ainsi, la classe $Ch([C_*(MF(X,\pi)/B)]) \in K_0(B)$ peut s'identifier à un entier que nous noterons $\chi(HH_*(MF(X,\pi)/B))$.

(1) Avec les notations précédentes, et sans supposer que la monodromie est unipotente, on a
$$\chi(HH_*(MF(X,\pi)/B)) = deg([\Delta_X.\Delta_X]_o).$$
(2) Si l'action de la monodromie sur $H^*(X_t, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente, alors $MF(X,\pi)$ est $\otimes$-admissible au-dessus de B au sens de la définition 4.2.
(3) Si l'action de la monodromie sur $H^*(X_t, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente, alors on a
$$\chi(\mathbb{H}^*(MF(X,\pi), \mathbb{Q}_\ell)) = \chi(X_o) - \chi(X_t).$$

La formule des traces, associée aux trois faits précédents, implique alors que l'on a

$$deg([\Delta_X.\Delta_X]_o) = \chi(X_o) - \chi(X_t).$$

Cette dernière formule est bien la Conjecture 1.3 car l'hypothèse d'unipotence assure que le conducteur de Swan est nul.

Il faut signaler qu'aucun des trois faits précédents n'est évident et chacun demande une preuve à part entière. Par exemple, le lecteur pourra déduire le point (3) du résultat principal de [Bl-Ro-To-Ve].

Vers le cas général. Pour terminer, signalons que nous pensons que la preuve que nous donnons du théorème 4.3 peut en réalité se généraliser pour donner une preuve de la Conjecture 1.3. En effet, dans le cas général où la monodromie n'est plus unipotente, on sait qu'il existe un revêtement fini $S' \longrightarrow S$, ramifié au point fermé x, tel que la famille $X' := X \times_S S' \longrightarrow S'$ soit à monodromie unipotente. Notons G le groupe de Galois du revêtement $S' \to S$. Le groupe G opère sur X' et nous pouvons pour tout $g \in G$ appliquer la formule des traces 4.4 (ou plutôt sa version généralisée où l'endomorphisme opère aussi non-trivialement sur la base S'). Il se trouve que X' n'est en général plus régulier, et le nc-schéma $MF(X', \pi')$ au quel on applique la formule des traces demande alors à être défini par sa version cohérente (voir [Ef-Po]). Dans ce cas, la formule des traces ne calcule pas exactement ce que l'on voudrait, à savoir le caractère de l'action de G sur la représentation virtuelle $H^*(X_0, \mathbb{Q}_\ell) - H^*(X_t, \mathbb{Q}_\ell)$, mais plutôt une version homologique de cette représentation. C'est précisément dans la différence entre ces deux représentations que la caractère de Swan apparait. Cette approche est cependant actuellement en cours d'investigation.

Références

[Ay] J. Ayoub, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **47**(1) 1-145, 2014.

[Bla] A. Blanc, *Topological K-theory of complex noncommutative spaces.* Compos. Math. **152** (2016), no. 3, 489-555.

[Bl-Ro-To-Ve] A. Blanc, M. Robalo, B. Toën, G. Vezzosi, *Motivic Realizations of Matrix Factorizations and Vanishing Cycles.* Prépublication arXiv :1607.03012.

[Bl] S. Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Alg. Geometry, Bowdoin, 1985, 421-450, Proc. Symp. Pure Math. **46**, Part 2, A.M.S., Providence, RI (1987).

[Bo-VdB] A. Bondal, M. Van den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry.* Mosc. Math. J. **3** (2003), no. 1, 1-36, 258.

[Co] A. Connes, *Géométrie non commutative.* InterEditions, Paris, 1990. 240 pp.

[Ef-Po] A. Efimov, L. Positselski, *Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories.* Algebra Number Theory **9** (2015), no. 5, 1159-1292.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory.* A Series of Modern Surveys in Mathematics **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+470 pp.

On DG-modules over the de Rham complex and the vanishing cycles functor. Algebraic geometry (Chicago, IL, 1989), 57-86, Lecture Notes in Math., **1479**, Springer, Berlin, 1991.

[Ka-Sa] K. Kato and T. Saito, *On the conductor formula of Bloch*, Publ. Math. IHES **100** (2005), 5-151.

[Ke] B. Keller, *On differential graded categories.* International Congress of Mathematicians. Vol. II, 151–190, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[Ku1] A. Kuznetsov, *Semi-orthogonal decomposition in algebraic geometry.* ICM lecture, arXiv :1404.3143.

[Ku2] A. Kuznetsov, *Derived categories of Fano threefolds.* In Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), no. 1, 110-122

[Mi] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Ann. of Math. Stud. **61**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo 1968 iii+122 pp.

[Mo-Vo] F. Morel, V. Voevodsky, *A1-homotopy theory of schemes.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **90** 45-143 (2001), 1999.

[Ro] M. Robalo, *K-theory and the bridge from motives to noncommutative motives.* Adv. Math. **269** (2015), 399-550.

[Sab-Sai] C. Sabbah, M. Saito, *Kontsevich's conjecture on an algebraic formula for vanishing cycles of local systems.* Algebr. Geom. 1 (2014), no. **1**, 107–130.

[SGA5] A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1965-66 - Cohomologie l-adique et Fonctions L* - (SGA 5). Lecture notes in mathematics, **589**, Berlin ; New York : Springer-Verlag. xii+484 (1977).

[SGA7-I] A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1967-69 - Groupes de monodromie en géométrie algébrique* - (SGA 7) - vol. 1. Lecture notes in mathematics **288**. Berlin ; New York : Springer-Verlag. viii+523 (1972).

[Ta] G. Tabuada, *Noncommutative motives.* With a preface by Yuri I. Manin. University Lecture Series, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. x+114 pp.

[To1] B. Toën, *Lectures on dg-categories.* Topics in algebraic and topological K-theory, 243-302, Lecture Notes in Math., **2008**, Springer, Berlin, 2011.

[To2] B. Toën, *Derived algebraic geometry.* EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153-240.

[To3] B. Toën, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory.* Invent. Math. **167** (2007), no. 3, 615-667.

[To4] B. Toën, *Derived Azumaya algebras and generators for twisted derived categories.* Invent. Math. **189** (2012), no. 3, 581-652.

[To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40** (2007), no. 3, 387-444.

[To-Ve1] B. Toën, G. Vezzosi, *Caractères de Chern, traces équivariantes et géométrie algébrique dérivée.* Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 2, 449-554.

[To-Ve2] B. Toën, G. Vezzosi, *The ℓ-adic trace formula for dg-categories and Bloch's conductor conjecture.* Prépublication arXiv :1605.08941.

IMT UMR 5219, CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse - France
E-mail address: bertrand.toen@math.univ-toulouse.fr

Dipartimento di Matematica ed Informatica "Ulisse Dini", Università di Firenze, Firenze - Italia
E-mail address: gabriele.vezzosi@unifi.it