

### Esercizi 3

Geometria lineare nello spazio

Negli esercizi che seguono si suppone fissato un sistema di riferimento (SdR) nello spazio. Se la base (dello spazio vettoriale dei vettori liberi) di tale SdR è indicata con  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ , si intenderà che essa sia ortonormale e positiva.  $\mathcal{V}$  indica lo spazio vettoriale reale dei vettori liberi nello spazio.

**Esercizio.** Sia  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$  una terna positivamente orientata. Si dica se la terna  $(\underline{u}, \underline{u} + \underline{v}, \underline{w})$  è positivamente orientata.

**Esercizio.** Siano  $\underline{v}, \underline{w}$  due vettori liberi non proporzionali. Si risolva in  $\underline{x}$  il sistema

$$\begin{cases} \underline{x} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{v} = 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Siano  $\underline{v}, \underline{w}$  due vettori liberi non proporzionali. Si risolva in  $\underline{x}$  il sistema

$$\begin{cases} \underline{x} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{v} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{w} = 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Siano  $\underline{v}, \underline{w}$  due vettori liberi paralleli e non nulli. Si determini il nucleo dell'applicazione lineare

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} : \underline{x} \mapsto \underline{x} \wedge \underline{v} + \underline{x} \wedge \underline{w}.$$

**Esercizio.** Sia  $\underline{v}_0$  un vettore libero fissato. Si consideri l'applicazione

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} : \underline{u} \mapsto (\underline{u} \cdot \underline{v}_0)\underline{v}_0.$$

Si dica se  $T$  è lineare ed in tal caso si determinino nucleo ed immagine.

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale. Sia

$$3x - 2y + z - 2 = 0$$

l'equazione di un piano  $\pi$ . Si consideri la famiglia  $\pi_\lambda$  di equazione

$$(\lambda - 4)x + (\lambda + 1)y - \lambda z - 3 = 0.$$

Si trovino, se esistono, valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  per i quali  $\pi_\lambda$  rappresenta un piano parallelo a  $\pi$ .

**Esercizio.** Si dica se i punti  $(1, -2, 1), (3, 5, 7), (-3, 3, 2)$  sono allineati.

**Esercizio.** Si dica se i punti  $(1, -2, 1), (2, -3, 5), (3, 3, 2), (5, 3, -2)$  sono complanari.

**Esercizio.** Si trovi l'equazione del piano per la retta

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 3 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

e per il punto  $P_0$  di coordinate  $(3, 2, 1)$ .

**Esercizio.** Trovare, se esistono, i valori reali di  $\alpha$  tali che il piano  $\pi_\alpha : 2x + \alpha y + 2z = 0$  sia parallelo al piano  $\pi' : -x + 3y - z = 5$ .

**Esercizio.** Dire se i piani  $\pi : 2x + 5y - z = 1, \pi' : x - y - z = 0$  hanno come intersezione una retta.

**Esercizio.** Trovare le equazioni parametriche della retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Si dica se le rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x - 1 = t \\ y = 2t \\ z + 2 = -t, \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = -4s \\ z = 2s - 2 \end{cases}$$

(il parametro di  $r$  essendo  $t$  e quello di  $r'$  essendo  $s$ ) sono o no coincidenti.

**Esercizio.** Trovare le equazioni parametriche della retta  $r$  parallela alla retta

$$r' : \begin{cases} x - 3 = 3t \\ y = 2t \\ z = -5t + 2 \end{cases}$$

e passante per il punto  $P$  di coordinate  $(3, 2, -1)$ .

**Esercizio.** Sia  $3x - 2y + 4z - 15 = 0$  l'equazione cartesiana di un piano  $\pi$  nel nostro SdR. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

1. Il vettore di coordinate  $(-3, 2, -4)$  è ortogonale al piano  $\pi$  indipendentemente dal tipo di SdR che usiamo.
2. Il vettore di coordinate  $(-3, 2, -4)$  è ortogonale al piano  $\pi$  soltanto se il SdR è ortonormale.
3. Il vettore di coordinate  $(-3, 2, -4)$  è ortogonale al piano  $\pi$  se il SdR è ortonormale.
4. Il vettore di coordinate  $(-3, 2, -4)$  è ortogonale al piano  $\pi$  soltanto se il SdR è ortonormale e positivo.
5. Il vettore di coordinate  $(-3, 2, -4)$  non è ortogonale al piano  $\pi$  indipendentemente dal tipo di SdR che usiamo.

**Esercizio.** Determinare la posizione relativa delle rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x + 1 = t \\ y = t \\ z = 3t, \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} x = 5s \\ y = 3s + 1 \\ z = 2s \end{cases}$$

(il parametro di  $r$  essendo  $t$  e quello di  $r'$  essendo  $s$ ).

**Esercizio.** Si consideri la retta di equazione parametrica

$$r_{\alpha, \beta} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + \alpha \\ z = -t + \beta, \end{cases}$$

(il parametro essendo  $t$ ) al variare di  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Determinare, se esistono, i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per i quali la retta  $r_{\alpha, \beta}$  incontra l'asse  $x$  e l'asse  $z$ .

**Esercizio.** Si supponga il SdR ortonormale e positivo e sia

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

l'equazione cartesiana di una retta  $r$  in tale SdR. Si determini un'equazione parametrica per  $r$ .

**Esercizio.** Siano

$$\begin{cases} -3x + 5y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 17x + 8y + 3z = 0 \\ 19x - 2y + 7z - 3 = 0 \end{cases}$$

le equazioni cartesiane delle rette  $r$  e  $r'$ . Si dica se esse sono o no complanari.

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Siano

$$\pi : x + z - 2 = 0,$$

$$\pi' : 2x + y + 3z - 1 = 0,$$

$$\pi'' : 2y + 2z = 0$$

le equazioni cartesiane di tre piani in tale SdR. Si descriva la posizione reciproca dei tre piani; in particolare si disegni (approssimativamente) l'intersezione di  $\pi \cup \pi' \cup \pi''$  con il piano  $x + y - z = 1$ .

**Esercizio.** Siano

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 5x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

due rette in un SdR ortonormale e positivo. Si dica se le due rette sono parallele, incidenti o sghembe e se ne calcoli la distanza.

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Siano

$$\pi : 2x + y + 3z + 5 = 0,$$

$$\pi' : 2x + y + 3z - 1 = 0,$$

due piani. Si scriva l'equazione del luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti da  $\pi$  e  $\pi'$ .

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Trovare l'equazione del luogo dei punti dello spazio che distano 3 dal piano

$$\pi : 2x - y + 5z + 7 = 0.$$

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Trovare l'equazione del luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai piani  $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$  e  $\pi' : x + y + z = 0$ . Riuscite, a priori, a intuirne la forma?

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Trovare l'equazione del luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai punti  $P = (1, 2, 0)$  e  $Q = (-1, 2, 3)$ .

**Esercizio.** Lavoriamo in un SdR ortonormale e positivo. Dimostrare che le rette

$$r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

e

$$r' : \begin{cases} x = 3s - 1 \\ y = s \\ z = s + 1 \end{cases}$$

sono parallele e trovarne la distanza.