



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

---

## Registro dell'insegnamento

**Anno accademico** 2017/2018

**Prof.** GABRIELE VEZZOSI

**Settore inquadramento** MAT/03 - GEOMETRIA

**Scuola** Ingegneria

**Dipartimento** Matematica e Informatica 'Ulisse Dini'

**Insegnamento** GEOMETRIA

**Moduli** GEOMETRIA

**Settore insegnamento** MAT/03 - GEOMETRIA

**Corsi di studio** INGEGNERIA MECCANICA

N.B.- Ai sensi dell' art.2 della Legge 1-5-1941. n. 615, i direttori degli istituti e dei laboratori nei quali si eseguono esperimenti sugli animali dovranno allegare al presente registro delle lezioni anche il registro contenente i dati relativi agli esperimenti di cui sopra.

**n.: 1** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 20/09/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Informazioni generali sul Corso (testi suggeriti, ricevimento, compitini, compiti).

Preliminari: richiami su applicazioni tra insiemi, immagine, fibra in un elemento, suriettività, iniettività, obiettività, esistenza dell'applicazione inversa. Esempi ed esercizi.

Introduzione al corso: da un sistema lineare  $S$  di  $n$  equazioni in  $m$  incognite all'applicazione (lineare) associata  $f_S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Il sistema è risolubile sse il vettore dei termini noti sta nell'immagine di  $f_S$ .

---

**n.: 2** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 22/09/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Biezione tra soluzioni di un sistema  $S$  e soluzioni del sistema omogeneo associato  $S^{\text{om}}$  (una volta fissata una soluzione di  $S$ ). Soluzioni di  $S^{\text{om}}$  come nucleo dell'applicazione lineare associata al sistema. Il nucleo è chiuso rispetto alla somma di vettori in  $\mathbb{R}^n$ . Esempio delle equazioni differenziali lineari. Definizione di spazio vettoriale reale. Esempi:  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale reale.

Esercizi.

---

**n.: 3** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 27/09/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Spazio vettoriale delle funzioni reali su un insieme. Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi. Sottospazi di  $\mathbb{R}^n$  definiti da sistemi lineari omogeneo. Sottospazi delle funzioni derivabili con derivata continua. Matrici  $m \times n$  a coefficienti reali. Somma di matrici e moltiplicazione di un numero reale per una matrice. Spazio vettoriale delle matrici  $m \times n$ . Esempio di un sottospazio generato da due matrici (combinazioni lineari).

---

**n.: 4** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 29/09/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Moltiplicazione di matrici. Esempi. Scrittura matriciale di un sistema lineare. Vettori geometrici (liberi) nello spazio euclideo. Struttura di spazio vettoriale sull'insieme dei vettori geometrici.

Definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali. Esempi ed esercizi.

---

**n.: 5** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 04/10/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Un'applicazione lineare  $V \rightarrow W$  invia il vettore nullo di  $V$  nel vettore nullo di  $W$ . Un'applicazione lineare ed invertibile ha inversa lineare. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare  $V \rightarrow W$  come sottospazi vettoriali di  $V$  e  $W$ , rispettivamente. Introduzione al concetto di base di uno spazio vettoriale: esempio di  $B := \{(1,0), (0,1)\}$  in  $\mathbb{R}^2$  ( $B$  genera  $\mathbb{R}^2$  e  $B$  è libero).

---

**n.: 6** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 06/10/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Esercizi:  $f$  lineare è iniettiva sse  $\text{Ker}(f)$  contiene solo il vettore nullo. Definizione di Span (sottospazio generato) di un insieme finito di vettori in uno spazio vettoriale. Esempi. Span è un sottospazio. Definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale. Esempi ed esercizi. Definizione di base di uno spazio vettoriale: un insieme (finito) di vettori in  $V$  è una base se genera  $V$  ed è libero. Esempi. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.

---

**n.: 7** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 11/10/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Tre vettori geometrici (non nulli e) non complanari formano una base dello spazio vettoriale dei vettori geometrici nello spazio. Esercizio (base dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 3$ ). Spazi vettoriali finitamente generati (definizione). Proposizione (in due parti): 1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una sua base. Se  $w_1, w_2, \dots, w_r$  sono  $r$  vettori in  $V$ , si hanno le proprietà seguenti: se  $w_1, w_2, \dots, w_r$  generano  $V$ , allora  $r \geq n$ ; se  $w_1, w_2, \dots, w_r$  sono linearmente indipendenti, allora  $r \leq n$ . 2) Uno spazio vettoriale finitamente generato ammette una base (avente un numero finito di elementi).

---

**n.: 8** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 13/10/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Dimostrazione di 2) (esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato) a partire da 1) [dalla lezione precedente]. Due basi in uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi (detto dimensione dello spazio vettoriale). Costruzione: estrazione di una base da un insieme (finito) di generatori (metodo di Gauss). Esercizi.

---

**n.: 9** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 18/10/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Metodo di Gauss applicato alla soluzione dei sistemi lineari. Esercizi. Completamento di un insieme (finito) di vettori linearmente indipendenti ad una base.  $n$  vettori in uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  formano una base sse sono linearmente indipendenti sse generano  $V$ . Esercizi.

---

**n.: 10** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 20/10/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Esercizi (metodo di Gauss per sistemi lineari e completamento ad una base). Definizione di prodotto scalare standard in  $\mathbb{R}^n$ . Proprietà (simmetria, bilinearità, definita positività). Applicazione al completamento di un insieme di  $k$  vettori linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$  ( $k < n$ ) ad una base di  $\mathbb{R}^n$ . Esercizi.

---

**n.: 11** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 25/10/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Basi di nuclei e di immagini: osservazioni ed esercizi. I coefficienti della combinazione lineare dello sviluppo in una base sono unici. Un'applicazione lineare è unicamente determinata dai valori che assume su una base. Esercizi.

---

**n.: 12** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 27/10/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Teorema della dimensione: se  $f: V \rightarrow W$  lineare e  $\dim V$  finita, allora  $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{ker } f) = \dim V$ .  
Corollario: un'applicazione lineare fra spazi vettoriali della stessa dimensione è invertibile sse è iniettiva, sse è suriettiva. Procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Esercizi. Spazio ortogonale ad un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ . Teorema dell'ortogonale: se  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  e  $V'$  il suo ortogonale, allora  $\dim V + \dim V' = n$ . Corollario: il rango per righe di una matrice  $A$  coincide con il rango per colonne di  $A$ .

---

**n.: 13** **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 03/11/2017 **Totale ore:** 3

---

**Argomento:** L'ortogonale dell'ortogonale di  $V$  coincide con  $V$ . Il rango per righe di una matrice coincide con il suo rango per colonne. Teorema di Rouche'-Capelli: un sistema lineare in  $n$  incognite ha soluzioni sse il rango  $r$  della matrice completa coincide con il rango della matrice incompleta ed, in tal caso, il sistema ha " infinito<sup>{n-r}</sup> soluzioni ". Esercizi di preparazione al I parziale.

---

**n.:** 14 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 08/11/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Primo parziale.

---

**n.:** 15 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 10/11/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Determinante di una matrice quadrata: definizione induttiva come sviluppo per righe e per colonne. Esempi. Proprietà del determinate: una matrice  $n \times n$  ha  $\det$  non nullo sse le righe formano una base di  $\mathbb{R}^n$  sse le colonne formano una base di  $\mathbb{R}^n$  sse l'applicazione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \rightarrow Ax$  è invertibile sse la matrice  $A$  ammette inversa. Esempi ed esercizi. Geometria analitica lineare nello spazio  $E$ : introduzione. Sistema di Riferimento (ortonormale e positivo), biezione delle coordinate  $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ , nel SdR fissato.

Equazione parametrica di una retta passante per un punto assegnato e parallela ad un vettore geometrico assegnato, equazione parametrica di una retta passante per due punti. Esercizi.

---

**n.:** 16 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 17/11/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Equazione parametrica di un piano per un punto e parallelo a due vettori geometrici assegnati. Equazione di un piano per tre punti non allineati (con riduzione al caso precedente). Equazione cartesiana di un piano:  $Ax+By+Cz +D=0$  con  $A,B, C$  non tutti nulli è l'equazione di un piano ortogonale al vettore geometrico con componenti  $(A,B,C)$ ; viceversa, ogni piano a equazione di questo tipo. Esercizi. Equazioni cartesiane di una retta (come intersezione di piani). Passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche per una retta. Esercizi.

---

**n.:** 17 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 22/11/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Compitino (gruppo intermedio)

---

**n.:** 18 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 24/11/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Equazione cartesiana del piano per 3 punti non allineati. Esercizi. Posizioni relative piano/piano, retta/piano, retta/retta (in particolare, rette sghembe). Esercizi.

---

**n.:** 19 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 29/11/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Equazioni di una famiglia propria e di una famiglia impropria di piani. Distanze. Definizione di distanza fra luoghi arbitrari di punti nello spazio. Distanza punto-punto. Distanza punto-piano. Distanza punto-retta. Distanza piano-piano. Distanza retta-retta. Esercizi. Fine della parte di geometria analitica.

---

**n.:** 20 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 01/12/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Esercizi (rette sghembe e distanze). Autovettori ed autovalori di un endomorfismo  $f: V \rightarrow V$ .

Definizione di endomorfismo diagonalizzabile. Esempi ed esercizi. Matrice di un endomorfismo  $f: V \rightarrow V$ , associata ad una coppia ordinata  $(B, B')$  di basi di  $V$ . Esempi ed esercizi.

---

**n.:** 21 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 13/12/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Esercizi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. La molteplicità algebrica è sempre maggiore o eguale alla molteplicità geometrica (dimostrazione). Criterio generale di diagonalizzabilità:  $f: V \rightarrow V$  è diagonalizzabile sse il suo polinomio si spezza su  $\mathbb{R}$  nel prodotto di fattori lineari e ogni molteplicità algebrica è uguale alla corrispondente molteplicità geometrica. Osservazione generale sulla decomposizione di un polinomio arbitrario reale in prodotto di fattori irriducibili; criterio degli zeri razionali di Gauss-Ruffini. Esercizi.

---

**n.:** 22 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 15/12/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Prodotto hermitiano standard in  $\mathbb{C}^n$  e sue proprietà. Formula di aggiunzione per matrici quadrate complesse  $\langle Ax|y \rangle = \langle x|A^*y \rangle$  ( $x, y$  in  $\mathbb{C}^n$  e  $A^*$  = trasposta coniugata di  $A$ ). Formula

---

di aggiunzione per matrici quadrate reali. Autovettori (reali) di matrici simmetriche reali con autovalori diversi sono fra loro ortogonali. Teorema spettrale reale: se  $A$  è una matrice  $n \times n$  reale e simmetrica, esiste una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  fatta di autovettori di  $A$  (con dimostrazione). Esercizi.

---

**n.:** 23 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 20/12/2017 **Totale ore:** 2

**Argomento:** Esercizi di preparazione al secondo compito.

---

**n.:** 24 **Didattica erogativa**  lezione  esercitazione  laboratorio  seminario

**Data:** 22/12/2017 **Totale ore:** 3

**Argomento:** Secondo compito.

---

## RIEPILOGO

<b><i>Didattica erogativa</i></b>	61	
<b><i>lezione</i></b> .....	n. ore	54
<b><i>esercitazione</i></b> .....	n. ore	7
<b><i>laboratorio</i></b> .....	n. ore	0
<b><i>seminario</i></b> .....	n. ore	0
<b><i>Didattica interattiva</i></b>	0	
<b><i>interventi didattica interattiva</i></b> .....	n. ore	0
<b>TOTALE</b>		<b>61</b>

*Il/la sottoscritto/a è consapevole che:*

- è soggetto alle sanzioni previste dal codice penale e dalle leggi speciali in materia qualora rilasci dichiarazioni mendaci, formi o faccia uso di atti falsi od esibisca atti contenenti dati non più rispondenti a verità (art. 76 del D.P.R. 28.12.2000, n. 445);
- decade dai benefici eventualmente conseguenti al provvedimento emanato sulla base della dichiarazione non veritiera qualora dal controllo effettuato dall'Amministrazione emerga la non veridicità del contenuto della dichiarazione (artt. 71 e 75 del D.P.R. 28.12.2000, n. 445).

*Registro chiuso il 29/12/2017 00:29:46*

Il Presidente della Scuola *(non ancora validato)*

Il Direttore del Dipartimento *(non ancora validato)*