Geometria Superiore 2016-17
Foglio III di esercizi:
Algebra omologica

Ottobre-Novembre 2016

Gli esercizi più complicati o lunghi sono contrassegnati con un certo numero di $(\star)$.

Esercizio 1. Sia A un gruppo abeliano e p un primo. Calcolare $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, A)$ e $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_*(\mathbb{Z}/p, A)$.

Esercizio 2. Sia X il complesso di gruppi abeliani $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ ed Y il complesso di gruppi abeliani $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{proj}} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0$. Esibire un morfismo $f : X \to Y$ di complessi di gruppi abeliani, tale che

- $H^i(f) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$,
- f non è omotopo al morfismo nullo.

Esercizio 3. Sia X il complesso di gruppi abeliani $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ ed $Y := X[1]$ il complesso X shiftato a sinistra di un grado, cioè $X[1]_i := X_{i+1}$. Esibire un morfismo $f : X \to Y$ di complessi di gruppi abeliani, tale che

- $H^i(f) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$,
- f non è omotopo al morfismo nullo.

Esercizio 4. Sia R un dominio d'integrità e M, N R-moduli. Dire se, per ogni $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}^R_n(M, N)$ è un R-modulo di torsione (cioè, per ogni elemento $x \in \mathrm{Tor}^R_n(M, N)$, esiste $r \in R\setminus\{0\}$ tale che $r \cdot m = 0$).

[Suggerimento: Sia $K := \mathrm{Frac}(R)$ il campo delle frazioni di R. Si usi K per dare un criterio affinché un R-modulo sia di torsione. Si noti, poi, che il morfismo $R \to K$ è piatto e si usi questo fatto per stabilire una relazione tra $\mathrm{Tor}^R_n(M, N) \otimes_R K$ e $\mathrm{Tor}^K_n(M \otimes_R K, N \otimes_R K)$.]

Esercizio 5. Sia A un gruppo abeliano di torsione (cioè ogni suo elemento ha ordine finito). Dimostrare che $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

[Suggerimento: Usare la solita risoluzione iniettiva $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow ??$ di $\mathbb{Z}$ in $\mathbf{Ab}$.]

Esercizio 6. ($\star$) Sia $\mathrm{Tors} : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ il funtore che associa ad un gruppo abeliano A il suo sottogruppo di torsione. Si dimostri che il funtore Tors è esatto a sinistra e si calcolino i suoi funtori derivati destri $R^i\mathrm{Tors}$, per $i \geq 0$.

[Suggerimento: Si mostri che esiste sempre, per ogni gruppo abeliano A, una risoluzione iniettiva $0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$ in $\mathbf{Ab}$ (con I_0 ed I_1 divisibili). Si concluda che $R^i\mathrm{Tors} \simeq 0$ per ogni $i \geq 2$. Si osservi che se B è un gruppo abeliano divisibile, allora $B \to B \otimes \mathbb{Q}$ è epi. Si provi che $\mathrm{Tors}(A) \simeq \ker(A \to A \otimes \mathbb{Q})$, e si usi, infine, la corrispondente successione esatta per calcolare (Snake's Lemma) $R^1\mathrm{Tors}(A)$, per $A \in \mathbf{Ab}$.]

Esercizio 7. Sia R un anello commutativo. Mostrare che nella categoria omotopica $K(\mathbf{proj}_R)$ si ha un isomorfismo di R-moduli $Hom_{R-\mathbf{mod})}(R[n], X) \simeq H^{-n}(X)$, per ogni $X \in K^(R - \mathbf{mod})$.

Esercizio 8 ($\star$) Sia $\mathcal{A} := \mathbf{Ab}$. Si calcoli $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$. Sia $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ un elemento non nullo, lo si rappresenti come un morfismo ϵ di complessi dal complesso $C := 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ al complesso $C[1]$. Si consideri la classe di omotopia $[\epsilon] \in Hom_{K^-(\mathbf{proj}_{\mathcal{A}})}(C, C[1])$ e si dimostri che $[\epsilon]$ non ha un nucleo. Si concluda che $K^-(\mathbf{proj}_{\mathcal{A}})$ non è abeliana.

[Suggerimento: si supponga che esista $\ker[\epsilon] \in K^-(\mathbf{proj}_{\mathcal{A}})$ e si dimostri, per esempio usando l' Esercizio 7, che la mappa canonica $\ker[\epsilon] \to C$ è un quasi-isomorfismo. Si ricordi (lezione) che un quasi-isomorfismo tra complessi limitati a sinistra di proiettivi in una categoria abeliana è necessariamente un'equivalenza omotopica. Si concluda.]

Esercizio 9 Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato, $\mathbf{Ab}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X, $\mathcal{O}_X - \mathbf{Mod}$ la categoria degli $\mathcal{O}_X$-Moduli, $U_X : \mathcal{O}_X - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}(X)$ il funtore dimenticante e $U : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$ il funtore dimenticante dai $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-moduli ai gruppi abeliani. Se $\Gamma(X, -) : \mathcal{O}_X - \mathbf{Mod} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - \mathbf{mod}$ e $\Gamma_{\mathrm{ab}}(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}$ sono i funtori delle sezioni globali, dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X - \mathbf{Mod} \arrow[r, "R^n\Gamma(X,-)"] \arrow[d, "U_X"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - \mathbf{mod} \arrow[d, "U"] \\ \mathbf{Ab}(X) \arrow[r, "R^n\Gamma_{\mathrm{ab}}(X,-)"'] & \mathbf{Ab}. \end{tikzcd}$$

Esercizio 10 ($\star\star$) Sia X uno spazio topologico Hausdorff e paracompatto. $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(X)$ si dice *soft* se, per ogni inclusione $i_Z : Z \hookrightarrow X$ di un chiuso, il morfismo canonico in $\mathbf{Ab}$, $\mathcal{F}(X) \to \mathrm{colim}_{Z \subset U} \mathcal{F}(U) =: \mathcal{F}(Z)$ è suriettivo.

1. Dimostrare che flabby implica soft. Dedurre che $\mathbf{Sh_{Ab}}(X)$ ha abbastanza fasci soft.

2. Dimostrare che, se $0 \to \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \to 0$ è esatta in $\mathbf{Sh_{Ab}}(X)$ e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono soft, allora $\mathcal{H}$ è soft e $0 \to \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X) \to 0$ è esatta in $\mathbf{Ab}$.

3. Mostrare che se $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ è soft allora $\mathcal{F}$ è soft.

4. Dedurre dai punti precedenti e dal criterio di aciclicità (visto a lezione) che ogni fascio soft è $\Gamma(X, -)$-aciclico.

5. Si dica se il fascio costante $\mathbb{Z}_X$ è soft, su ogni spazio topologico paracompatto ed Hausdorff X.

6. Si dica se il fascio delle funzioni continue $\mathcal{C}^0_X$ è soft, su ogni spazio topologico paracompatto ed Hausdorff X.

7. E' vero che su ogni varietà complessa X, il fascio $\mathcal{O}_X$ delle funzioni olomorfe su X è soft ?

8. E' vero che su ogni varietà differenziabile reale M, $\mathcal{C}^\infty_M$ delle funzioni C^∞ su M è soft ?

9. Si dimostri che se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato con X paracompatto ed Hausdorff ed $\mathcal{O}_X$ soft, allora ogni $\mathcal{O}_X$-Modulo è soft.

10. Si usino 9 e 10 per concludere che il fascio $\underline{\Omega}^i_M$ delle i-forme differenziali su una varietà differenziabile reale M è soft, per ogni $i \geq 0$.

11. Si usi il lemma di Poincaré per dedurre da 5 e 11 che $H^i(M, \mathbb{R}_M) \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(M) := \ker(d^i_{\mathrm{dR}} : \underline{\Omega}^i_M(M) \to \underline{\Omega}^{i+1}_M)(M)/\mathrm{im}(d^{i-1}_{\mathrm{dR}} : \underline{\Omega}^{i-1}_M(M) \to \underline{\Omega}^i_M(M))$, per M varietà differenziabile reale.

Esercizio 11 Ricordando la successione esponenziale $0 \to \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i(-))} \mathcal{O}^\times_X \to 0$, su X varietà complessa, ed il teorema $H^i_{\mathrm{sing}}(Y, \mathbb{Z}) \simeq H^i(Y, \mathbb{Z}_X)$, valido per Y spazio topologico localmente contraibile, si calcoli $H^1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}^\times_X)$.

[Foglio d'esercizi incompleto]