Geometria Superiore 2017-18
Foglio II di esercizi:
Prefasci e fasci su uno spazio topologico

Ottobre-Novembre 2016

Gli esercizi più complicati o lunghi sono contrassegnati con un certo numero di $(\star)$.

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e

$$\mathsf{C}^b : \mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{R} - \mathbf{Vect} \,:\, U \longmapsto \mathsf{C}^b(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è continua e limitata}\}.$$

- Completare C^b ad un prefascio su X (cioè definire C^b sui morfismi di $\mathbf{Opens}(X^{\mathrm{op}})$ e mostrare che quello ottenuto è, in effetti, un funtore).
- Mostrare che C^b non è, in generale, un fascio.
- Identificare il fascio associato a C^b.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico, $\mathbf{C}$ una categoria e $\mathcal{F}$ un prefascio su X a valori in $\mathbf{C}$ (cioè un funtore $\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$). Diciamo che $\mathcal{F}$ è un fascio se, per ogni oggetto $C \in \mathbf{C}$, il funtore

$$\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets} \,:\, U \longmapsto Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{F}(U))$$

è un prefascio d'insiemi su X. Verificare che la definizione usuale di prefascio d'insiemi, di R-moduli e di anelli commutativi, coincide con la definizione appena data, con $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$, $R - \mathbf{mod}$ e $\mathbf{CommRings}$, rispettivamente.
Verificare, più in generale, che tale definizione è equivalente alla usuale definizione di fascio su X a valori in una categoria $\mathcal{C}$ con prodotti.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ prefasci sullo spazio topologico X, a valori in una categoria $\mathcal{C}$. Si definisca

$$\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C} \,:\, U \longmapsto Hom_{\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U}).$$

- Completare $\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ad un prefascio su X (cioè definire $\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sui morfismi di $\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}}$ e mostrare che quello ottenuto è, in effetti, un funtore).
- Mostrare che, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci, allora $\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un fascio.

- Mostrare che se $\mathcal{C}$ ha prodotti, allora $\underline{Hom}(-,-)$ è un *Hom-intermo arricchito* in $\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)$ e in $\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$, cioè, per ogni $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\in\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)$ (rispettivamente $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\in\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$), esiste un isomorfismo in $\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)$ (risp. in $\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$)

$$\underline{Hom}(\mathcal{F}\times\mathcal{G},\mathcal{H})\simeq\underline{Hom}(\mathcal{F},\underline{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{H})),$$

naturale nelle variabili $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{H}$, cioè un isomorfismo

$$\underline{Hom}(-\times-,-)\simeq\underline{Hom}(-,\underline{Hom}(-,-)),$$

di funtori $\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)^{\mathrm{opp}}\times\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)^{\mathrm{opp}}\times\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)\to\mathbf{Psh}_{\mathcal{C}}(X)$ (risp. di funtori $\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)^{\mathrm{opp}}\times\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)^{\mathrm{opp}}\times\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)\to\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$).

Esercizio 4. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio d'insiemi su uno spazio topologico X. Si consideri l'assegnazione

$$\prod\mathcal{F}:\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}}\ni U\longmapsto\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x\in\mathbf{Sets}.$$

- Completare $\prod\mathcal{F}$ ad un prefascio su X (cioè definire $\prod\mathcal{F}$ sui morfismi di $\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}}$ e mostrare che quello ottenuto è, in effetti, un funtore).
- Mostrare che $\prod\mathcal{F}$ è un fascio.
- Completare l'assegnazione $\mathcal{F}\longmapsto\prod\mathcal{F}$ ad un funtore $\prod:\mathbf{PSh}_{\mathbf{Sets}}(X)\longrightarrow\mathbf{Sh}_{\mathbf{Sets}}(X)$.
- Esibire un morfismo di funtori $\alpha:\widetilde{(-)}\longrightarrow\prod$, dove $\mathcal{F}\longmapsto\widetilde{(\mathcal{F})}$ denota il funtore fascio associato.
- Mostrare che α è un monomorfismo in $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Sets}}(X)^{\mathbf{PSh}_{\mathbf{Sets}}(X)}$.

Esercizio 5. ($\star$) Se $\mathcal{G}$ un prefascio d'insiemi su uno spazio topologico X, indichiamo con $\widetilde{\mathcal{G}}$ il fascio associato e con

$$\prod\mathcal{G}:\mathbf{Opens}(X)^{\mathrm{op}}\ni U\longmapsto\prod_{x\in U}\mathcal{G}_x\in\mathbf{Sets}$$

il (pre)fascio considerato nell'esercizio precedente.

- esibire un morfismo naturale di prefasci $\beta(\mathcal{G}):\mathcal{G}\to\prod\mathcal{G}$ che sia un monomorfismo se $\mathcal{G}$ è un fascio.
- Sia $U\subseteq X$ un aperto in X ed $\mathcal{F}$ un prefascio d'insiemi su X. Sia $\delta:\widetilde{\mathcal{F}}(U)\to\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$ il morfismo la cui componente x, sia il morfismo canonico $\widetilde{\mathcal{F}}(U)\to\widetilde{\mathcal{F}}_x\simeq\mathcal{F}_x$. Sia $\alpha:=\alpha(\mathcal{F})(U):\widetilde{\mathcal{F}}(U)\to\prod\mathcal{F}(U)$ il morfismo definito nell'esercizio precedente. Sia $\gamma:=\prod_{x\in U}\beta(\mathcal{F})_x:\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x\to\prod_{x\in U}(\prod\mathcal{F})_x$. Dimostrare che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{F}(U) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & (\prod\mathcal{F})(U) \arrow[d, "\beta(\prod\mathcal{F})(U)"] \\
\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \arrow[r, "\gamma"'] & \prod_{x\in U}(\prod\mathcal{F})_x
\end{tikzcd}$$

è un pullback in $\mathbf{Sets}$.

Esercizio 6. Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di *fasci* d'insiemi o di R-moduli su uno spazio topologico X. Si dimostri che

- f è un monomorfismo sse f è un monomorfismo di prefasci sse $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è un monomorfismo d'insiemi o di R-moduli, $\forall\, x \in X$.

- f è un epimorfismo sse $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è un epimorfismo d'insiemi o di R-moduli, $\forall\, x \in X$ sse $\forall\, U \subseteq X$ aperto e $\forall\, s \in \mathcal{G}(U)$ esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ di U e sezioni $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in \mathcal{I}$ tali che $f(U)(t_i) = s_{|U_i}$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

Esercizio 7. Sia $p : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un epimorfismo di fasci d'insiemi su uno spazio topologico X. Si mostri che il diagramma

$$\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F} \underset{\mathrm{pr}_1}{\overset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathcal{F} \xrightarrow{\;p\;} \mathcal{G}$$

è un equalizzatore in $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Sets}}(X)$. Dire se lo stesso risultato vale per fasci di gruppi abeliani su X.

Esercizio 8. Sia $\mathsf{C}^\infty_{\mathbb{R}^2}$ il fascio delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}^2$ a valori reali. Se $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, definiamo

$$\Omega^{1,\mathrm{cl}}_{\mathbb{R}^2}(U) := \{A(x,y)dx + B(x,y)dy \mid A, B \in \mathsf{C}^\infty_{\mathbb{R}^2}(U)\,,\ \partial_y A = \partial_x B \text{ in } U\}.$$

- Completare l'assegnazione $U \longmapsto \Omega^{1,\mathrm{cl}}_{\mathbb{R}^2}(U)$ ad un prefascio $\Omega^{1,\mathrm{cl}}_{\mathbb{R}^2}$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali su $\mathbb{R}^2$.

- Mostrare che $\Omega^{1,\mathrm{cl}}_{\mathbb{R}^2}$ è, in effetti, un fascio.

- Dimostrare che il differenziale di una funzione fornisce un morfismo $d : \mathsf{C}^\infty_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \Omega^{1,\mathrm{cl}}_{\mathbb{R}^2}$ di fasci di spazi vettoriali su $\mathbb{R}^2$.

- Dimostrare che d non è un epimorfismo di prefasci ma è un epimorfismo di fasci.
  [Suggerimento: si usi il Lemma di Poincaré.]

Esercizio 9. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{A}_X$ un prefascio di anelli commutativi su X e $\widetilde{\mathcal{A}_X}$ il fascio si anelli commutativi associato. Denotiamo con $\mathcal{A}_X - \mathbf{Mod}$ la categoria dei fasci di $\mathcal{A}_X$-moduli su X e con $\widetilde{\mathcal{A}_X} - \mathbf{Mod}$ la categoria dei fasci di $\widetilde{\mathcal{A}_X}$-moduli su X.

- Si costruisca un'equivalenza di categorie $\widetilde{\mathcal{A}_X} - \mathbf{Mod} \simeq \mathcal{A}_X - \mathbf{Mod}$.

- Si deduca un'equivalenza di categorie $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(X) \simeq \underline{\mathbb{Z}}_X - \mathbf{Mod}$, dove $\underline{\mathbb{Z}}_X$ denota il fascio costante di anelli su X, di stalk $\mathbb{Z}$.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{O}$ il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}^*$ il fascio su $\mathbb{C}$ delle funzioni olomorfe mai nulle (cioè $\mathcal{O}^*(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \,|\, f \text{ olomorfa su } U\}$) e $\underline{\mathbb{Z}}$ il fascio costante su $\mathbb{C}$ di stalk $\mathbb{Z}$. Consideriamo questi tre fasci come fasci abeliani su $\mathbb{C}$ (per $\mathcal{O}^*$ la struttura di gruppo è data dalla moltiplicazione di funzioni). Sia $j : \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}$ il morfismo di fasci abeliani indotto dal morfismo funzione-costante $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}(U)$, su ogni aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Sia $\exp(2\pi i) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ il morfismo di fasci abeliani definito da

$$\exp(2\pi i)(U) : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U) \; : \; (f : U \to \mathbb{C}) \longmapsto (e^{2\pi i f} : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{C}$.
Dimostrare che

- j è un monomorfismo di fasci abeliani.
- il morfismo canonico $\mathrm{im}(j) \to \ker(\exp(2\pi i))$ (indotto dal fatto che $\exp(2\pi i) \circ j = 0$) è un isomorfismo di fasci abeliani.
- $\exp(2\pi i)$ è un epimorfismo di fasci abeliani.
- $\exp(2\pi i)$ non è un epimorfismo di prefasci abeliani.

Si dica se qualcuno dei punti precedenti cambia sostituendo $\mathbb{C}$ con una qualsiasi varietà complessa X.

Esercizio 11. Sia X uno spazio topologico, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusione di un aperto e $i : Z \hookrightarrow X$ l'inclusione del chiuso complementare $Z := X \setminus U$.

- Usare le aggiunzioni note per costruire due morfismi funtoriali $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(X)} \to i_* i^{-1}$, $\beta : j_! j^{-1} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(X)}$.
- Dimostrare che, per ogni $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(X)$, la successione

  $$0 \longrightarrow j_! j^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\beta(\mathcal{F})} \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha(\mathcal{F})} i_* i^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

  è una successione esatta di fasci abeliani su X.

Esercizio 12. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio di R-moduli su X e $\mathcal{O}$ un fascio di anelli commutativi e unitari su X. Per $\mathcal{G} = \mathcal{F}, \mathcal{O}$, definiamo il supporto di $\mathcal{G}$ come $\mathsf{Supp}(\mathcal{G}) := \{x \in X \,|\, \mathcal{G}_x \neq 0\}$. Per un aperto $U \subseteq X$ e $s \in \mathcal{G}(U)$, definiamo il supporto di s come $\mathsf{supp}(s) := \{x \in U \,|\, s_x \neq 0 \text{ in } \mathcal{G}_x\}$

- Dimostrare che $\mathsf{supp}(s)$ è chiuso in U, per ogni $s \in \mathcal{G}(U)$
- Dimostrare che in generale $\mathsf{Supp}(\mathcal{F})$ non è chiuso in X [Suggerimento: usare somme infinite di skyscrapers opportunamente supportati oppure estensioni a 0 da un'aperto]
- Dimostrare che $\mathsf{Supp}(\mathcal{O})$ è chiuso in X [Suggerimento: esibire $\mathsf{Supp}(\mathcal{O})$ come supporto di una sezione globale di $\mathcal{O}$.]

Esercizio 13. Sia R un anello commutativo, X uno spazio topologico e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci di R-moduli su X.

- Dire se il prefascio $\mathbf{Opens}^{\mathrm{op}}(X) \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U) \in R - \mathbf{mod}$ è un fascio di R-moduli.

- Dare un esempio di una famiglia infinita $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ di fasci di gruppi abeliani su $X = \mathbb{C}$ tale che il morfismo canonico (verso il fascio associato) $a(X) : \bigoplus_I \mathcal{F}_i(X) \to (\bigoplus_I \mathcal{F}_i)(X)$ non è un isomorfismo in $\mathbf{Ab}$.
- Dimostrare che, se X è uno spazio topologico ed $U \subseteq X$ un aperto quasi-compatto (cioè ogni ricoprimento di U ammette un sottoricoprimento finito) e $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ è una famiglia arbitraria di fasci di R-moduli su X, allora il morfismo canonico $a(U) : \bigoplus_I \mathcal{F}_i(U) \to (\bigoplus_I \mathcal{F}_i)(U)$ è un isomorfismo in $R - \mathbf{mod}$.

Esercizio 14. Uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice uno *spazio localmente anellato* se, per ogni $x \in X$, lo stalk in x $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello locale (cioè ha un solo ideale massimale). Se $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sono spazi localmente anellati, un morfismo $(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ di spazi anellati si dice un *morfismo di spazi localmente anellati*, se per ogni $x \in x$, il morfismo indotto $\varphi_x : \mathcal{O}_{y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è un morfismo di anelli locali (cioè invia l'deale massimale dentro ideale massimale). Denotiamo con **LocRingSp** la categoria degli spazi localmente anellati con morfismi di spazi localmente anellati e con $\mathbf{Loc\mathbb{R}AlgSp}$ la categoria analoga dove richiediamo che i fasci $\mathcal{O}_X$ siano fasci di $\mathbb{R}$-algebre (e quindi gli anelli locali $\mathcal{O}_{X,x}$ siano, anch'essi $\mathbb{R}$-algebre). Se M è una varietà differenziabile reale, denotiamo con $\mathcal{C}^\infty_M$ il fascio di $\mathbb{R}$-algebre delle funzioni smooth su M a valori reali. Sia, infine, $\mathbf{C^\infty Man}$ la categoria delle varietà differenziabili reali di dimensione pura, con morfismi le applicazioni smooth tra varietà.

- Si costruisca un funtore "naturale" $F : \mathbf{C^\infty Man} \to \mathbf{Loc\mathbb{R}AlgSp}$ che sugli oggetti valga $F(M) = (M, \mathcal{C}^\infty_M)$ e si dimostri che è pienamente fedele.
- Si dimostri che l'immagine essenziale di F consiste degli spazi localmente anellati in $\mathbb{R}$-algebre $(X, \mathcal{O}_X)$ per i quali esistono un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ di X, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia di aperti $\{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathbb{R}^n$ ed isomorfismi di spazi anellati $\psi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|U_i) \to (V_i, \mathcal{C}^\infty_{V_i})$.

Si formuli e risolva l'esercizio analogo nel caso di varietà complesse e varietà topologiche (diciamo, di dimensione pura).

Esercizio 15. Notazioni generali: se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato e $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusione di un aperto, indichiamo con $\mathcal{O}_U := j^{-1}\mathcal{O}_X \equiv \mathcal{O}_X|U$ e con $(U, \mathcal{O}_U)$ lo spazio anellato risultante. Si noti che esiste un morfismo ovvio $\underline{j} : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ di spazi anellati per cui l'immagine inversa $\underline{j}^*$ di $\mathcal{O}$-Moduli coincide con j^{-1}.

Si consideri $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ come varietà complessa e siano $U_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \,|\, z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \,|\, z_1 \neq 0\}$, $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Per ogni $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si consideri il seguente glueing datum di $\mathcal{O}$-Moduli $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi_m)$ relativo al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$, dove

- $\mathcal{F}_i := \mathcal{O}_{U_i}$, per $i = 0, 1$
- $\varphi_m : \mathcal{O}_{U_0}|U_{01} \simeq \mathcal{O}_{U_{01}} \to \mathcal{O}_{U_{01}} \simeq \mathcal{O}_{U_0}|U_{01}$ è il morfismo che associa a $f \in \mathcal{O}_{U_{01}}(V \subseteq U_{01})$ la sezione $(z_1/z_0)^{-m} \cdot f_{|V} \in \mathcal{O}_{U_{01}}(V)$ (si noti che, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, $(z_1/z_0)^m \in \mathcal{O}_X(U_{01})$).

Denotiamo con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(m)$ l'$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$-Modulo associato a tale glueing datum (dal Teorema di equivalenza di categorie tra glueing data per $\mathcal{O}$-Moduli ed $\mathcal{O}_X$-Moduli, su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ qualsiasi). Osservando che, per definizione di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, esistono isomorfismi di spazi anellati $\psi_i : (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\mathrm{hol}}_{\mathbb{C}})$, si calcoli la dimensione delle sezioni globali $\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(m))$. Si concluda che, per nessun $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(m)$ è isomorfo al fascio strutturale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$.

Svolgere lo stesso esercizio considerando $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ come schema sul campo $\mathbb{C}$.

Esercizio 16. Si definisca un morfismo naturale $\underline{p} : (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2\setminus\{0\}}) \to (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}})$ di spazi anellati, dove $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sono considerate come varietà complesse. Si calcoli $p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2\setminus\{0\}})$ in termini degli $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$-Moduli $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, definiti nell'esercizio precedente.
Si svolga lo stesso esercizio (con $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ rimpiazzato da $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$), considerando $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ come schemi sul campo $\mathbb{C}$.
($\star$) Si generalizzi uno od entrambi i risultati precedenti al caso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (rispettivamente, $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$).