# Geometria Superiore 2016-17
# Foglio I di esercizi:
# Generalità su categorie e funtori

Ottobre 2016

Gli esercizi più complicati o lunghi sono contrassegnati con un certo numero di $\star$.

**Esercizio 1.** Sia $k$ un campo, $R := k[x]$ e $S = k(x)$ il campo delle frazioni di $R$ (= campo delle funzioni razionali a coefficienti in $k$). Se $i : R \to S$ è l'inclusione naturale, dire se $i$ è un monomorfismo nella categoria $\mathcal{C}$ delle $k$-algebre commutative unitarie. Dire se $i$ è un epimorfismo in $\mathcal{C}$. Motivare entrambe le risposte.

**Esercizio 2.** Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Si considerino le affermazioni seguenti

1. le categorie di funtori $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ e $(\mathcal{D}^{op})^{\mathcal{C}^{op}}$ sono isomorfe.
2. le categorie di funtori $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ e $((\mathcal{D}^{op})^{\mathcal{C}^{op}})^{op}$ sono isomorfe.

Dire se una, entrambe o nessuna delle affermazioni precedenti è corretta e motivare la risposta.

**Esercizio 3.** Siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori. Diremo che $F$ e $G$ sono *quasi-inversi* uno dell'altro se esistono isomorfismi di funtori $\alpha : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : G \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

1. Si dimostri che $F$ è un'equivalenza di categorie (cioè è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo) sse $F$ ammette un quasi inverso.
2. Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un'equivalenza di categorie e $d \in \mathcal{D}$. Si dimostri che se $(c, \varphi)$ è una coppia con $c \in \mathcal{C}$ e $\varphi : F(c) \to d$ un isomorfismo in $\mathcal{D}$, allora per ogni altra coppia $(c', \varphi')$ siffatta, esiste un unico isomorfismo $f : c \to c'$ in $\mathcal{C}$ tale che $\varphi' \circ F(f) = \varphi$.
3. Si dimostri che un'equivalenza di categorie preserva e riflette monomorfismi, epimorfismi ed isomorfismi.

**Esercizio 4.** Se $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denotiamo con $[n]$ l'insieme ordinato $\{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$. Sia $\mathbf{\Delta}$ la categoria in cui

- gli oggetti sono gli insiemi ordinati $[n]$, con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- i morfismi $Hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$ sono le applicazioni non-decrescenti $[n] \to [m]$.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria, $\mathcal{C}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ si dice categoria degli *oggetti simpliciali* in $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{\mathbf{\Delta}}$ la categoria degli *oggetti cosimpliciali* in $\mathcal{C}$.

(3.1) Calcolare $Hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[0])$ per ogni $[n] \in \mathbf{\Delta}$, $Hom_{\mathbf{\Delta}}([0],[1])$, $Hom_{\mathbf{\Delta}}([0],[2])$, $Hom_{\mathbf{\Delta}}([1],[2])$ e $Hom_{\mathbf{\Delta}}([2],[1])$.

(3.2) Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $X \in \mathcal{C}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ e $Y \in \mathcal{C}^{\mathbf{\Delta}}$. Calcolare $\lim X$ e $\operatorname{colim} Y$.

(3.3) $\star$ Sia $T$ uno spazio topologico e $\mathcal{U}_T := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ un suo ricoprimento aperto. Costruire uno spazio topologico simpliciale $\mathsf{Cech}(\mathcal{U}_T) \in \mathbf{Top}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ in modo che

$$\mathsf{Cech}(\mathcal{U}_T) : [n] \longmapsto \coprod_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathrm{I}^{n+1}} U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$$

ed esibire un morfismo

$$p : \mathsf{Cech}(\mathcal{U}_T) \longrightarrow \mathrm{Const}(T)$$

in $\mathbf{Top}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$.
[ Possibile suggerimento: $(i)$ dato un morfismo $f : X \to Y$ in una categoria qualsiasi $\mathcal{D}$ con prodotti fibrati, definire un oggetto $\mathsf{N}(f) \in (\mathcal{D}/Y)^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ tale che

$$\mathsf{N}(f)([n]) = X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X \qquad (n+1) \text{ volte.}$$

$(ii)$ Considerare il morfismo ovvio $f : \coprod_{\alpha \in \mathrm{I}} U_\alpha \to T$ e dimostrare che $\mathsf{N}(f)$ risponde ai requisiti. ]

**Esercizio 5.** Un funtore $c : J \to I$ tra categorie piccole si dice *cofinale* se, per ogni funtore $F : I \to \mathcal{C}$, si ha che $\operatorname{colim}_I F$ esiste sse $\operatorname{colim}_I (F \circ c)$ esiste ed inoltre tali colimiti coincidono.

Si dimostri che

- $\star$ $c : J \to I$ è cofinale sse, per ogni oggetto $i \in I$, la categoria $c/i$, che ha oggetti le coppie $(j \in J, \alpha : c(j) \to i)$ e morfismi $(j \in J, \alpha : c(j) \to i) \to (j' \in J, \alpha' : c(j') \to i)$ i morfismi $f : j \to j'$ in $J$ tali che $\alpha = \alpha' \circ c(f)$, è non vuota e connessa (cioè ogni coppia di oggetti è connessa da uno zig-zag finito di morfismi, ovverosia il suo $\pi_0$ è $\{*\}$).
- $\star$ Si ricordi il testo dell'esercizio 4. Denotiamo con $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{inj}}$ la sottocategoria di $\mathbf{\Delta}$ con gli stessi oggetti e con morfismi limitati alle iniezioni. Dimostrare che l'inclusione $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{inj}}^{op} \to \mathbf{\Delta}^{op}$ è cofinale.
- Si ricordi il testo dell'esercizio 4. Dimostrare che, se $X$ è un insieme simpliciale o un $R$-modulo simpliciale, allora $\operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}^{op}} X$ è canonicamente isomorfo al coequalizzatore

$$\mathrm{Coeq}(\ X_1 \underset{s_1}{\overset{s_0}{\rightrightarrows}} X_0\ ).$$

- Si ricordi il testo dell'esercizio 4. Se $T$ è uno spazio topologico, $\mathcal{U}_T := \{U_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ un suo ricoprimento aperto e $\mathsf{Cech}(\mathcal{U}_T)$ il corrispondente nervo di Cech, allora esiste un omeomorfismo canonico $\mathrm{colim}_{\mathbf{\Delta}^{op}} \mathsf{Cech}(\mathcal{U}_T) \simeq T$.

**Esercizio 6.** Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Si dimostri che

- se $F$ è un aggiunto destro e $d : \mathrm{I} \to C$ un funtore (con I categoria piccola) tale che esiste $\lim\, d \in \mathcal{C}$, allora esiste $\lim\,(F \circ d) \in \mathcal{D}$ e la mappa canonica $F(\lim\, d) \to \lim\,(F \circ d)$ è un isomorfismo in $\mathcal{D}$.
- se $F$ è un aggiunto sinsitro e $d : \mathrm{I} \to C$ un funtore (con I categoria piccola) tale che esiste $\mathrm{colim}\, d \in \mathcal{C}$, allora esiste $\mathrm{colim}\,(F \circ d) \in \mathcal{D}$ e la mappa canonica $\mathrm{colim}\,(F \circ d) \to F(\mathrm{colim}\, d)$ è un isomorfismo in $\mathcal{D}$.

Se ne deduca una risposta alla seguente domanda: il funtore dimenticante $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$ può essere un aggiunto sinistro?

**Esercizio 7.** [Richiede qualche conoscenza di base di analisi funzionale.] Sia **SpMet** la categoria degli spazi metrici con morfismi le applicazioni uniformemente continue. Sia **SpMetCompl** la sottocategoria piena di **SpMet** i cui oggetti sono gli spazi metrici completi (cioè quelli in cui ogni successione di Cauchy converge). Si utilizzino i fatti di base sul completamento di uno spazio metrico per mostrare che il funtore d'inclusione $i : \mathbf{SpMetCompl} \hookrightarrow \mathbf{SpMet}$ ammette un aggiunto sinistro.

**Esercizio 8.** Sia $R$ un anello commutativo unitario ed $\{M_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ una famiglia, con supporto *infinito*, di $R$-moduli (cioè $\{i \in \mathrm{I} \,|\, M_i \neq 0\}$ è un insieme di cardinalità non finita). Si calcoli l'$R$-modulo duale di $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} M_i$.

**Esercizio 9.** $\star\star$ Sia $(X, x_0)$ uno spazio topologico puntato, localmente semplicemente connesso per archi (cioè ogni punto $x \in X$ ammette una base di intorni connessi per archi e semplicemente connessi) e sia $\mathbf{Riv}_{(X,x_0)}$ la categoria con oggetti i rivestimenti topologici $p : Y \to X$ e con morfismi le applicazioni $f : Y \to Y'$ continue tali che $p' \circ f = p$ (con notazioni, spero, ovvie). Si consideri il funtore $\mathsf{Fib}_{x_0} : \mathbf{Riv}_{(X,x_0)} \to \mathbf{Sets}$ che assegna ad un rivestimento $p : Y \to X$ la sua fibra $p^{-1}(x_0)$ in $x_0 \in X$. Si metta in relazione il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ con il gruppo di automorfismi di $\mathsf{Fib}_{x_0}$ (cioè il gruppo degli isomorfismi di funtori $\mathsf{Fib}_{x_0} \to \mathsf{Fib}_{x_0}$).
[ Suggerimento: si usi che un tale $X$ ammette un rivestimento universale. ]

**Esercizio 10.** Sia $\mathbf{Top}_*^{\mathrm{conn}}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{Top}_*$ costituita dagli spazi puntati connessi. Sia $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ un morfismo in $\mathbf{Top}_*^{\mathrm{conn}}$ che sia un rivestimento topologico.

- Mostrare che $p$ è un monomorfismo in $\mathbf{Top}_*^{\mathrm{conn}}$.

- Dedurne che il funtore dimenticante $\mathbf{Top}_*^{\mathrm{conn}} \to \mathbf{Sets} : (X, x_0) \mapsto U(X)$, dove $U(X)$ è l'insieme sottostante allo spazio topologico $X$, non può essere un aggiunto destro.

**Esercizio 11.** Diciamo che un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *riflette i limiti* (risp. *i colimiti*) se per ogni funtore $d : I \to C$, con $I$ piccola si ha la seguente proprietà: se $X \in \mathcal{C}$ e $\alpha : \mathrm{const}_X \to d$ (risp. $\beta : d \to \mathrm{const}_X$) è un morfismo in $\mathcal{C}^I$ tale che $F(\alpha) : \mathrm{const}_{F(X)} \to F \circ d$ (risp. $F(\beta) : F \circ d \to \mathrm{const}_{F(X)}$) esibisce $F(X)$ come limite (risp. colimite) di $F \circ d$, allora $\alpha$ (risp. $\beta$) esibisce $X$ come limite di $F$.

- Dimostrare che un funtore pienamente fedele riflette limiti e colimiti.
- Dimostrare che i funtori dimentichi $U : R - \mathbf{mod} \to \mathbf{Sets}$, $U' : \mathbf{CommRings} \to \mathbf{Sets}$ commutano con (o, sinonimicamente, preservano) i colimiti filtrati ma non i colimiti arbitrari.

**Esercizio 12.** Se $\mathcal{C}$ è una categoria, definiamo il *centro* di $\mathcal{C}$ come l'insieme $\mathrm{Z}(\mathcal{C})$ delle trasformazioni naturali $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, dove $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è il funtore identico.

- Si dimostri che, con l'operazione di composizione di trasformazioni naturali, $\mathrm{Z}(\mathcal{C})$ è un monoide commutativo unitario.
- Si dimostri che se inoltre $\mathcal{C}$ è additiva, allora $\mathrm{Z}(\mathcal{C})$ è un anello commutativo.
- Sia $R$ un anello (non necessariamente commutativo), $z(R)$ il suo centro (cioè il sottoanello di $R$ costituito dagli elementi che commutano moltiplicativamente con ogni elemento di $R$) ed $R - \mathbf{mod}$ la categoria (abeliana) degli $R$-moduli sinistri. Si esibisca un isomorfismo di anelli $z(R) \simeq \mathrm{Z}(R - \mathbf{mod})$.