Esercizi 1

`Spazi vettoriali`

Esercizio. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali su $\mathbb{R}$:

- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Z}\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Q}\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (2,2,2)\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z-1=0\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=3y=-8z\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2+t, y=3-2t, z=-5t-3, t \in \mathbb{R}\}$;
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-y)(z-x)=0\}$.

Esercizio. Si dica quali delle seguenti applicazioni sono omomorfismi di spazi vettoriali e per essi si dica se sono suriettivi, iniettivi e/o biiettivi:

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y,z) \longmapsto ((x-y),(y+z)(x-z))$;
- $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z,t) \longmapsto (y,z,x))$;
- $T : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ f \longmapsto \max_{t\in[0,1]} f(t)$;
- $T : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \ : \ f \longmapsto (\min_{t\in[0,1]} f(t), \max_{t\in[0,1]} f(t))$;
- $T : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ f \longmapsto f(0)+f(1)$;
- $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y,z,t) \longmapsto (y-z, x+y+z+t-2))$;
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y,z) \longmapsto (\sin(x+y), \cos z)$;
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ (x,y,z) \longmapsto \frac{x+y+z}{x^2+y^2+1}$.

Esercizio. Si dica se ogni spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Si dica se vale il viceversa e, in caso negativo, si dia un controesempio.

Esercizio. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$. Sia $T : V \to V$ l'omomorfismo definito da

$$T(v_1 + v_2) = 2v_3 \ , \ \ T(v_2 + v_3) = 2v_1 + 3v_2 - v_3 \ , \ \ T(v_1 + v_3) = 4v_1 + 2v_2.$$

Si determini $T(xv_1 + yv_2 + zv_3)$, per $(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

Esercizio. Sia $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue $[0,1] \to \mathbb{R}$. Si verifichi che $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; ha dimensione finita su $\mathbb{R}$? Se

$$T : \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \longmapsto \int_0^1 f(x)dx \,,$$

si verifichi che T è lineare e se ne calcoli $\mathrm{Im}\, T$. Si dica poi se il sottospazio vettoriale $\ker T \subseteq \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ha dimensione finita su $\mathbb{R}$.

Esercizio. Si dimostri che

$$\mathcal{B} := \{(2,0,1,0), (0,1,3,4), (1,1,2,-1), (1,1,1,1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$. Si determinino poi le coordinate di $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio. Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un' applicazione lineare $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T_\lambda(1,2,3) = (1,0) \ , \ \ T_\lambda(3,2,1) = (0,-1) \ , \ \ T_\lambda(1,1,1) = (\lambda, -\lambda).$$

Fra i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'omomorfismo T_λ esiste, si determinino quelli eventuali per cui T_λ è unica.

Esercizio. Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un' applicazione lineare $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T_\lambda(1,1,1) = (1, 2\lambda) \ , \ \ T_\lambda(0,1,1) = (14\lambda^2, 13\lambda^{13} + 1) \ , \ \ T_\lambda(1,0,1) = (1,0).$$

Fra i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'omomorfismo T_λ esiste, si determinino quelli eventuali per cui T_λ è unica.

Esercizio. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\mathcal{B}_\lambda := \{\lambda \cdot v_1 + v_2, \lambda \cdot v_1 + v_2 + \lambda \cdot v_3, v_1 + \lambda \cdot v_2 - v_3\}$$

è ancora una base di V ?

Esercizio. Sia $T_\lambda : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ definita da $T_\lambda(p(x)) := (\lambda - 3)p''(x) - (\lambda^2 - 1)$. Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$, T_λ è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$. Per tali valori, si determini $\ker T_\lambda$ e $\operatorname{Im} T_\lambda$.

Esercizio. Siano V e W spazi vettoriali su un campo k e $f : V \to W$ un omomorfismo. Si mostri che

1. se $H \subseteq V$ è un sottoinsieme di generatori di V su k allora $f(H) \subseteq W$ genera $\mathrm{Im} f$ su k;
2. se $\mathcal{U} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq V$ è un sottoinsieme finito, libero su k e f è iniettiva, allora $f(\mathcal{U}) \subseteq W$ è libero su k.

Esercizio. Sia $V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili infinite volte. Si dica se l'insieme

$$\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$$

è libero in V.

Esercizio. Dare un esempio di omomorfismo $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ che sia iniettivo ma non suriettivo.

Esercizio. Sia

$$T_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) \longmapsto (x - y + \lambda z, y + (\lambda - 1)x + z, \lambda^2 x + y + (\lambda^{18} - 39)z - \lambda).$$

Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, T_λ è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) \longmapsto (x + y + 3z, y + 2z, 3x + y + 3z).$$

Si verifichi che f è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Si determinino le dimensioni di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$, trovando una base per ciascuno di essi.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y - z, 4x + y + 2z).$$

Si determini nucleo ed immagine di f.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) \longmapsto (-4x - 3y + 3z, 35x + 25y - 22z, -12x - 9y + 8z)$$

e

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) \longmapsto (x - y + 13z, 3x - z, -x + 5y - 6z).$$

Qual'è la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$?
Se $\mathcal{B} = \{(1, 3, 5), (2, -1, 2), (0, 1, 1)\}$, si mostri che $\mathcal{B}$ è base di $\mathbb{R}^3$ e si trovino le matrici di f e di g rispetto a $\mathcal{B}$. Qual'è la matrice di $f \circ g$ rispetto a $\mathcal{B}$? E quella di $g \circ f$?

Esercizio. Mostrare che

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado di } p(x) \leq 2\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Si dica poi se

$$\left\{ p_1(x) := \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3),\ p_2(x) := -(x - 1)(x - 3),\ p_3(x) := \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Esercizio. Mostrare che

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado di } p(x) \leq 2\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Si dica poi se

$$\{p_1(x) := 2,\ p_2(x) := (x - 1),\ p_3(x) := (x - 1)(x - 2)\}$$

è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Se la risposta è affermativa, si esprima il polinomio $p(x) := 6x^2 + 10x + 3$ in tale base.

Esercizio. Sia $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = p'(1) = 0 \ \text{ e grado di } p(x) \leq 5\}$.

- V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$?
- Se sì, si trovi una base di V su $\mathbb{R}$.
- Si trovi una base di $V \cap W$ dove $W := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\}$.

Esercizio. Sia

$$V := \langle (1,1,1,1), (1,0,1,0), (1,2,1,2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Si trovi una base di V su $\mathbb{R}$.

Esercizio. Sia

$$V := \big\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z + t = 0 \big\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?
- Se sì, si trovi una base di V su $\mathbb{R}$.

Esercizio. Sia $\mathcal{B} := \{(2,1),(1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2).$$

Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$. Se φ_A è l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alla base canonica è A, si trovi la matrice di φ_A rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio. Dire se le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$.

Esercizio. Dire se le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio. Dire se le matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3,3)$ su $\mathbb{R}$ e se la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

appartiene al sottospazio generato dalle prime tre matrici.

Esercizio. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$, si definisce la sua *traccia* come $\mathrm{tr}A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Si dica se

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \to \mathbb{R} \ : \ A \longmapsto \mathrm{tr}A$$

è un omomorfimo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Se la risposta è affermativa si dica se tr è suriettivo e si trovi una base per ker tr.

Esercizio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (2x + y - z, x - y, z + 2x).$$

Si trovi la matrice di $f \circ f$ relativamente alla base canonica e la matrice di f relativa alla base

$$\mathcal{B} = \{(2,1,0), (1,0,1), (1,1,0)\}.$$

Esercizio. Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) := x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2 - t_1t_2.$$

Si dica se g è un'applicazione bilineare e si determini la sua matrice relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Se g è bilineare, si dica se è definita positiva, se è non degenere e se ne trovi una base ortogonale. Si determini infine una base del sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ dei vettori g-ortogonali al vettore $(0,0,1,1)$.

Esercizio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che

$$g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

è bilineare e si determini una base g-ortogonale di $\mathbb{R}^3$.