Esercizi 0

`Strutture algebriche`

Esercizio. Siano

$$f : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] : p(x) \mapsto p(x^2 - 2x + 1),$$

$$g : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] : p(x) \mapsto p(x)^2$$

e

$$h : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] : p(x) \mapsto p(x - 3).$$

Si determini $(g \circ f)(x^3 - x^2)$ e $(f \circ g \circ h)(x + 3)$.

Esercizio. Dire se le applicazioni

$$\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] : p(x) \mapsto p(x)^2$$

$$\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] : p(x) \mapsto p(x^2)$$

$$\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q} : p(x) \mapsto p(0)$$

sono iniettive, suriettive o biiettive. Se consideriamo $\mathbb{Q}[x]$ come gruppo abeliano con la somma (di polinomi) e $\mathbb{Q}$ come gruppo abeliano per la somma, dire quali delle precedenti applicazioni è un omomorfismo di gruppi.

Esercizio. Dire delle seguenti applicazioni, se sono iniettive, suriettive o biiettive (e in quest'ultimo caso, trovarne l'inversa):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \longmapsto x^5$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \longmapsto \frac{3x-5}{12}$
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \ : \ x \longmapsto \exp x$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \longmapsto (2x - 3y, x, y)$.

Esercizio. Dire se le applicazioni

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2,$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto 2k,$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k+1,$$
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k^2$$

sono iniettive, suriettive o biiettive. Se $S \subseteq \mathbb{R}$ si ponga

$$f^{-1}(S) := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid f(P) \in S\}$$

e si determini $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}([1,3])$ e $f^{-1}([1,\infty))$ e si provi a rappresentare questi insiemi graficamente nel piano di coordinate (x,y).

Esercizio. Sia E un insieme finito con n elementi. Quanti elementi ha l'insieme $E \times E \times E$?

Esercizio. Scrivere la permutazione $\tau := \sigma \circ \sigma' \circ \sigma'' \in \Sigma_7$, dove

- $\sigma : (1,2,3,4,5,6,7) \mapsto (3,7,2,4,1,6,5)$;
- σ' è la permutazione ciclica $(3,4,6,7)$;
- σ'' è data da dalla composizione di trasposizioni $(2,6) \circ (1,3)$.

Esercizio. Si decomponga la permutazione $\sigma : (1,2,3,4,5,6) \mapsto (3,5,2,1,4,6)$ in trasposizioni e si dica se è pari o dispari.

Esercizio. Quante sono le permutazioni σ in Σ_5 che fissano 2 (cioè tali che $\sigma(2) = 2$) ?

Esercizio. Si riferisca il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (x,y). Sia Q il quadrato (pieno!) con vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Si definisca $\mathcal{R} \subset Q \times Q$ come $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathcal{R}$ se e soltanto se:

- $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ e $x_i \neq 0, x_i \neq 1$, $y_i \neq 0, y_i \neq 1$, per $i = 1,2$.
- $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $y_1 = y_2$;
- $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $y_1 = y_2$;
- $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ e $x_1 = x_2$;
- $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ e $x_1 = x_2$.

Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza su Q. *Si provi poi a descrivere geometricamente (con un disegno tridimensionale) il quoziente $Q/\mathcal{R}$.

Esercizio. Si mostri che $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ è un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione, con elemento neutro 1. Se $\mathbb{R}_{\text{add}}$ denota il gruppo abeliano $\mathbb{R}$ rispetto alla somma, si mostri che

$$\exp : \mathbb{R}_{\text{add}} \longrightarrow \mathbb{R}^* : x \mapsto e^x$$

è un omomorfismo di gruppi. È un isomorfismo ? Se lo è, si costruisca il suo inverso $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{\text{add}}$.

Esercizio. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle biiezioni del piano in sé che conservano la distanza tra due punti (cioè delle biiezioni φ tali che $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ per ogni coppia di punti (x, y) del piano, dove $d(x, y)$ è la distanza fra x e y) è un gruppo con l'operazione di composizione (qual'è l'elemento neutro ?). Si mostri poi che $\mathcal{A}$ non è abeliano esibendo φ e ψ in $\mathcal{A}$ tali che $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$. Si mostri anche, con un esempio, che esistono elementi di $\mathcal{A}$ che commutano fra loro (cioè $f, g \in \mathcal{A}$ tali che $f \circ g = g \circ f$).

Esercizio. [Azione di un gruppo su un insieme] Sia G un gruppo (in cui la moltiplicazione di $g \in G$ con $h \in G$ si indica con gh e l'elemento neutro si indica con e) e X un insieme. Un'applicazione $\rho : G \times X \to X$ tale che

$$\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x)), \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$$

e $\rho(e, x) = x$ per ogni $x \in X$ si dice *azione* del gruppo G sull'insieme X. Si provi che, per ogni $g \in G$, l'applicazione

$$X \longrightarrow X : x \mapsto \rho(g, x)$$

e' una biiezione, esibendone l'inversa.
Diciamo che un sottoinsieme $H \subseteq G$ è un *sottogruppo* se è chiuso rispetto alla moltiplicazione in G e rispetto all'operazione di prendere l'inverso in G (cioè se $g, h \in H \Rightarrow gh \in H$ e se $g \in H \Rightarrow g^{-1} \in H$). Si dimostri, che per ogni $x \in X$ il sottoinsieme di $G_x \subseteq G$ definito da

$$G_x := \{g \in G | \rho(g, x) = x\}$$

è in effetti un sottogruppo di G, detto sottogruppo *stabilizzatore* di x in G. Si dimostri che

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : \rho(g, x) = y$$

definisce una relazione d'equivalenza su X. Denotiamo il quoziente con X/G. Si prenda $G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}^2$ e

$$\rho(n,(x,y)) := (x, y+n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

si dimostri che ρ è un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^2$ e che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha per lo stabilizzatore $\mathbb{Z}_{(x,y)} = \{0\}$. Sia $S := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; 0 \le x \le 1\big\}$ e si ponga, per (x_1,y_1) e (x_2,y_2) in S,

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$$

se e soltanto se

- $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ e $x_1 \ne 0,1, x_2 \ne 0,1$;
- $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $y_1 = y_2$;
- $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $y_1 = y_2$.

Si dimostri che $\sim$ definisce una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ su S e si costruisca una biiezione $S/\mathcal{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

Esercizio. Qunte sono le relazioni d'equivalenza su un insieme X di tre elementi (p. es. $X = \{a,b,c\}$) ?

Esercizio. Il gruppo Σ_3 delle permutazioni di 3 oggetti è abeliano?

Esercizio. Quanti sono gli omomorfismi di gruppi $\mathbb{Z}/3 \to \mathbb{Z}$? E quelli $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4$?

Esercizio. Dimostrare che $\mathbb{Z}/4$ non è un campo. (Suggerimento: dimostrare che non tutti gli elementi non nulli hanno un inverso.)

Esercizio. Un omomorfismo di campi è un'applicazione $f : K \to L$, in cui K e L sono campi, tale che $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni x e y in K. Si dimostri che per un tale f si ha $f(0_K) = 0_L$ e, se f è non nullo (f è nullo se $f(x) = 0_L$, per ogni $x \in K$), allora $f(1_K) = 1_L$. Dimostrare poi che un omomorfismo di campi $f : K \to L$ o è nullo oppure è iniettivo.

Esercizio. Si calcoli $(3-2i)\cdot(-3-5i)$, $(3-2i)\cdot(3+2i)$, $(-5i)\cdot(-4+10i)$, $(3-2i)/(3-3i)$, $(2+i)/(-3i)$, $|(1-i)\cdot(2-7i)|$, $|(2+3i)/(2-4i)|$, $|1+i|$

, $\arg(-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2)$, $\arg(-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$. Si trovino tutte le soluzioni complesse delle equazioni $z^4 = -2$, $z^3 = 1$, $z^5 = 32$, $z^2 - z + 1 = 0$.

Esercizio. Dimostrare che l'insieme

$$\mathbb{Q}(t) := \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \mid p(t) \in \mathbb{Q}[t], q(t) \in \mathbb{Q}[t] \setminus \{0\} \right\}$$

con la somma e moltiplicazione naturali (somma e moltplicazione di frazioni poliniomiali), con l'elemento neutro $0 = 0/1$ per la somma e con l'elemento neutro $1 = 1/1$ per la moltipliczione, forma un campo.

Esercizio. Si dimostri per induzione su n che:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{2n-1} i = n^2.$$

Esercizio. Si dimostri per induzione che se $N \geq 1$ allora la somma dei primi N numeri dispari vale N^2.

Esercizio. Si dimostri per assurdo che, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $x \neq 2x$ (!).

Esercizio. Si dimostri per assurdo che, per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vale $a^2 + b^2 \geq 2ab$.