Geometria, CdS Ingegneria Meccanica (M-Z)
Esempio di I parziale
Ottobre 2015

Esercizio Sia $t \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{B}_t := \{(t-1, 2t, 1, 0), (0, 5t, t-3, 1), (0, 0, t-2, 3t-2), (0, 0, 0, t+1)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Allora $\mathcal{B}_t$ è base di $\mathbb{R}^4$
- se e soltanto se $t \neq 0, 1, -1, 2$.
- se e soltanto se $t \neq 0, 1, -1, 2, 3$.
- per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.
- per nessun valore di $t \in \mathbb{R}$.
- se e soltanto se $t \neq 0, 1, -1, 2/3, 2, 3$.

Esercizio Il sistema , con parametro k, nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x & +ky & +z & = & 0 \\ kx & -y & & = & 0 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni
- per ogni k reale che soddisfa $k^2 + k - 1 = 0$
- per $k = -\frac{1}{4}$
- per tutti i valori di $k > -\frac{2}{5}$
- per ogni k reale che soddisfa $(4k-3)^2 = 1$
- Nessuna delle altre risposte

Esercizio Si consideri l'applicazione

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z, t) \mapsto (2x - 3y + 5z + t, y - z, t).$$

Si verifichi che T è un'applicazione lineare. Si ha
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$ e T è suriettiva.
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im} T = 2$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 0$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im} T = 4$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 2$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im} T = 2$.
- T è un isomorfismo.

Esercizio Un sistema lineare a coefficienti reali con termini noti nulli
- ammette almeno una soluzione.
- ammette sempre infinite soluzioni.
- può non avere soluzioni.
- ha soluzioni che non costituiscono uno spazio vettoriale reale.

Esercizio Sia A una matrice 2×2 a coefficienti reali. Supponiamo di sapere che A è invertibile (cioè esiste una matrice reale 2×2, A^{-1}, tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{I}_2$, dove I_2 è la matrice identica 2×2 con $(\mathrm{I}_2)_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $(\mathrm{I}_2)_{ii} = 1$ per $i = 1, 2$) e che, inoltre, vale l'uguaglianza (tra matrici)

$$A^{-1} - \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora possiamo concludere che
- $A_{11} = 1$
- $A_{11} = 0$
- $A_{11} = -1$
- $A_{21} = 6$
- Nessuna delle altre risposte.

Esercizio Il sistema $x + 2y + 3z = a, 2x + 4y + 6z = 2b, 3x + 5y + 8z = 3c$ ammette soluzioni esclusivamente se
- $a = b$
- $3a - 2b = 0$
- $2a - 3b + c = 0$
- $a = b = c$
- nessuna delle altre risposte.

Esercizio Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $T((1,1)) = (1,0)$ e $T((1,0)) = (0,0)$. Posto $T^2((x,y)) = T(T((x,y)))$ si ha che
- $T^2((4,2)) = (0,0)$
- $T^2((1,2)) = (0,2)$
- $T^2((2,1)) = (1,1)$
- Nessuna delle altre risposte
- $T^2((1,1)) = (1,0)$

Esercizio Sia $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ una base ortonormale e positiva dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici nello spazio e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ l'applicazione lineare data da $T(\underline{x}) = \underline{x} \wedge \underline{i} + \underline{x}$.
- T è iniettiva e $T(\underline{i}) = \underline{i}$
- T non è iniettiva e $T(\underline{i}) = \underline{k}$
- T è iniettiva e $T(\underline{k}) = -\underline{j} - \underline{k}$
- Nessuna delle altre risposte
- T non è iniettiva e $T(\underline{i}) = \underline{i}$

Esercizio Siano $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ due versori ortogonali. Quanti vettori $\underline{x}$ sono soluzioni del seguente sistema?

$$\begin{cases} \underline{x} \wedge \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{v}_1 = 2 \\ \underline{x} \cdot \underline{v}_2 = 10 \end{cases}$$

- Solo uno
- Infiniti

- Nessuno
- Esattamente due
- Nessuna delle altre risposte

Esercizio Sia U il sottospazio vettoriale delle matrici reali 2×2 generato dalle due matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia W il sottospazio vettoriale delle matrici A reali 2×2 tali che $A_{11}+A_{22} = A_{12}+A_{21}$. Sia $a = \dim U$, $b = \dim W$ e $c = \dim(U \cap W)$. Allora
- $(a, b, c) = (2, 3, 1)$
- $(a, b, c) = (1, 3, 1)$
- $(a, b, c) = (2, 1, 0)$
- $(a, b, c) = (2, 1, 1)$
- $(a, b, c) = (2, 2, 1)$

Esercizio Il sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & +4z & = 1 \\ 2x & -y & +3z & = 0 \\ & 3y & +z & = 1 \\ x & +y & & = 1 \end{cases}$$

- non ha soluzioni
- ha 3 soluzioni
- ha infinite soluzioni
- ha esattamente una soluzione
- nessuna delle altre risposte