TEORIA GEOMETRICA DEL CONTROLLO - CONTROLLO OTTIMO

GIANNA STEFANI, EMAIL: STEFANI@DMA.UNIFI.IT

Lezioni del corso di dottorato - A.A. 2001/2002

1. Lezione 1 - Esempi introduttivi

Esempi introduttivi dal calcolo delle variazioni classico:

- Problema di Didone (problema isoperimetrico), handout 1 di [13], [2] pg. 17 formalizzazione, pg.66 soluzione.
- La brachistocrona (problema di tempo minimo), [13], [10] pg.311
- La catenaria (minimizzazione di un funzionale integrale), [13], [7] pg.126.

Esempi introduttivi dalla geometria:

- Le geodetiche rimaniane
- Le geodetiche subrimaniane

Esempi introduttivi dalla meccanica:

- Atterraggio morbido o fermata di un treno alla stazione, con vari criteri di ottimizzazione: tempo minimo, [1], [13], in un intervallo di tempo assegnato minimizzare l'accelerazione [1], in un intervallo di tempo finito minimizzare la norma L^2 dello spazio [13]
- Barca che vuol raggiungere un approdo in tempo minimo , [6], [10] pg.316
- Macchina di Dubins, [1], [13] , [10] pg.26

Esempi introduttivi dall'economia

- Modello di Ramsay di crescita economica, [7] pg. 123

2. Lezione 2,3,4 - Posizione del problema che intendiamo studiare

2.1. **Equazione di controllo tempo-indipendente.** Equazione differenziale ordinaria dipendente da un parametro

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.1}$$

La variabile di stato x appartiene ad una varietà connessa "smooth" (C^∞) M immersa in uno spazio euclideo (nel senso di [1], cap. 1, vedi anche [10], cap.1). Si può anche pensare che $M = \mathbb{R}^n$.
La variabile di controllo u appartiene ad un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^m$
$f : M \times \mathbb{R}^m \to TM$ è una applicazione C^∞ con la proprietà che per ogni $u \in \mathbb{R}^m$

$$f_u : M \to TM$$

è un campo vettoriale su M.
Per **soluzione di (2.1)** si intende una coppia di curve definite su un intervallo I, (ξ, υ), detta anche **coppia ammissibile**, con le seguenti proprietà:

$$\upsilon \in L^\infty(I, \Omega), \quad \xi \in W^{1,\infty}(I, \Omega), \quad \text{tali che} \quad \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), \upsilon(t)) \quad q.o. \quad t \in I.$$

Si dice anche che ξ è soluzione di (2.1) relativa al controllo υ.

Ci occuperemo essenzialmente del caso in cui I è un intervallo limitato $[0, T]$. T puó essere

- un dato del problema: **problema a tempo finale fissato**
- un' incognita del problema: **problema a tempo finale libero**.

Considereremo vincoli sui punti estremi della traiettoria del tipo

$$\xi(0) \in N_0 \quad \xi(T) \in N_T \tag{2.2}$$

Dove $N_0,\ N_T$ sono sottovarieta' di M, che possono essere anche punti. Talvolta è conveniente considerare le equazioni delle sottovarietà ed esprimere i vincoli come

$$\varphi_0(\xi(0)) = 0 \quad \varphi_T(\xi(T)) = 0 \tag{2.3}$$

con $\varphi_0,\ \varphi_T$ funzioni C^∞ su M a valori in opportuni spazi Euclidei.
Osservazioni: problemi tempo-dipendenti, vincoli misti.

2.2. **Il problema di Mayer.** Costo sui punti estremi.

$$\textbf{Minimizzare} \quad J(\xi, \upsilon) := \alpha(\xi(0)) + \beta(\xi(T)) \tag{2.4}$$

sulle soluzioni di (2.1) e (2.2).

In realtà lo spazio su cui si minimizza è $N_0 \times \mathcal{U}$, con $\mathcal{U}$ sottoinsieme di $L^\infty([0,T],\Omega)$.

2.3. **I problemi di Lagrange e di Bolza.** Costo integrale (running coast).

$$\textbf{Minimizzare} \quad J(\xi, \upsilon) := \alpha(\xi(0)) + \beta(\xi(T)) + \int_0^T f^0(\xi(t), \upsilon(t))\, dt \tag{2.5}$$

sulle soluzioni di (2.1) e (2.2).

Caso particolarmente importante: **tempo minimo a punti fissi**, $f^0 \equiv 1$, vincoli dati da

$$\xi(0) = x_0 \quad \xi(T) = x_T \tag{2.6}$$

2.4. **Relazioni fra i vari tipi di problemi.** È ovvio che il problema di Mayer è un caso particolare del problema di Bolza
Riduzione del problema di Bolza al problema di Mayer. È sufficiente introdurre una nuova coordinata x^0, una nuova equazione

$$\dot{x}^0 = f^0(x, u)$$

e il vincolo

$$x^0(0) = 0$$

mentre il valore finale $x^0(T)$ rimane libero. La dimensione della varietà degli stati aumenta di 1, quella del vincolo iniziale rimane invariata, quella del vincolo finale aumenta di 1.
Riduzione del problema a tempo finale variabile a uno nell'intervallo di tempo $[0,1]$**.** L'idea è di prendere il tempo finale T come nuova variabile, con equazione di controllo $\dot{T} = 0$, e riparametrizzare il tempo dall'intervallo $[0,T]$ all'intervallo $[0,1]$. Poniamo

$$\tilde{y} = (T, x) \quad \tilde{M} = \mathbb{R} \times M \quad \tilde{N}_0 = \mathbb{R} \times N_0 \quad \tilde{N}_1 = \mathbb{R} \times N_T$$
$$\tilde{\alpha}(\tilde{y}) = \alpha(x) \quad \tilde{\beta}(\tilde{y}) = \beta(x) \quad \tilde{f}(\tilde{y}, u) = (0, Tf(x,u)) \quad \tilde{f}^0(\tilde{y}, u) = Tf^0(x,u).$$

Cnsiderando il problema di bolza legato a questi dati otteniamo

$$\textbf{Minimizzare} \quad J(\tilde{\eta}, \upsilon) := \alpha(\eta(0)) + \beta(\eta(1)) + \int_0^1 Tf^0(\eta(s), \upsilon(s))\, ds \tag{2.7}$$

sulle soluzioni di

$$\dot{T} = 0 \qquad \dot{x} = Tf(x, u) \tag{2.8}$$

a di

$$\eta(0) \in N_0 \quad \eta(T) \in N_T. \tag{2.9}$$

Se (ξ, υ) è una coppia ammissibile per (2.1), (2.2), definita sull'intervallo $[0, \bar{T}]$ e definiamo

$$\tilde{\eta} : [0,1] \to \tilde{M} \quad s \mapsto (\bar{T}, \xi(\bar{T}s)), \qquad \tilde{\upsilon} : [0,1] \to \Omega \quad s \mapsto \upsilon(\bar{T}s)$$

abbiamo che $(\tilde{\eta}, \tilde{\upsilon})$ è una coppia ammissibile per (2.8), (2.9) e

$$J(\tilde{\eta}, \tilde{\upsilon}) = J(\xi, \upsilon)$$

Analogamente ogni costo ammissibile per (2.7), (2.8), (2.9) puó essere ridotto ad un costo ammissibile per (2.5), (2.1), (2.2).

3. Lezione 5,6 - Teoremi di esistenza di soluzioni di ODE ed esempi

Esistenza e unicità di soluzioni di ODE con condizioni tipo Caratheodori [8], [4]. Flusso di una ODE, di un campo vettoriale e di una equazione di di controllo, cambiamento di coordinate e campi vettoriali con notazione di derivazione. Il caso particolare di sistemi affini e polinomiali (nel controllo). Per i sistemi lineari si veda [9], [4].
Esempi: Macchina di Dubins, geodetiche, brachistocrona, vedi anche [14].

4. Lezione 7 - Riduzione allo studio degli insiemi raggiungibili

Definizione degli insiemi raggiungibili, compattezza degli insiemi raggiungibili, teorema di esistenza, il sistema rilassato. Per le dimostrazioni si veda [1], cap. 9.3 ma anche [7], [12], [11] o anche qualsiasi altro libro sulla teoria dei controlli.
Esercizio: verificare le condizioni sui sistemi visti.

5. Lezione 8, 9 - Il teorema delle orbite, [3], [10], [1].

Notazione esponenziale per il flusso dei campi vettoriali, le parentesi di Lee $[f, g]$ di due campi vettoriali e loro significato. La famiglia D di campi vettoriali associata ad un sistema di controllo, la sua orbita $\mathcal{O}_{x_0}$ passante per il punto x_0 e sua interpretazione come insieme raggiungibile con controlli costanti a tratti in tempi positivi e negativi.
Varietà "immersed" e il teorema delle orbite (Nagano-Sussman). L'algebra di Lie $L(D)$ e sua relazione con lo spazio tangente $T_{x_0}\mathcal{O}_{x_0}$.

6. Lezione 10 - Il teorema delle orbite, casi particolari

Quando $T_{x_0}\mathcal{O}_{x_0} = L(D)(x_0)$, caso generale: $L(D)$ finitamente generato come modulo sulle funzioni $C^\infty(M)$, [1], [10]. Casi particolari: varietà e campi analitici, dimensione costante di $L(D)(x)$, [3], [10], [1]. Relazione col teorema di Frobenious e il punto di vista duale: gli integrali primi o coordinate adattate.

7. Lezione 11, 12 - Insiemi raggiungibili a tempo fissato

La zero-orbita $\mathcal{O}^0_{x_0}$ e l'ideale del "tempo zero" $L^0(D)$. Loro relazione con gli insiemi raggiungibili sotto l'ipotesi di esistenza di un campo vettoriale completo, [3] $(0, D)$-connessione, [10]. Il caso di famiglie simmetriche.
Il caso di rango massimo o analitico: proprietà degli insiemi raggiungibili con controlli costanti a tratti, [3] Th. 8.7.
Il principio debole del bang-bang, [5].
Sistemi lineari: matrice di Kalman e algebre di lie generate dai campi, [3].

8. Lezione 13 - Forme differenziali

Seconda formulazione della brachistocrona ed applicazione della teoria svolta: esistenta della curva di tempo minimo nel sistema rilassato.
Operatore tangente e operatore pull-back di un diffeomeomorfismo (o di una immersione). L'operatore differenziale dalle k-forme alle (k+1)-forme.

9. Lezione 14, 15 - Elementi di geometria differenziale e simplettica, [1]

Derivata di Lie di una forma differenziale lungo un campo vettoriale. Siano f, g campi vettoriali, $L_f g \equiv [f, g]$, ω una 1-forma differenziale, α una funzione (0-forma), le formule utili sono

$$L_f\alpha =< d\alpha, f >,\ L_gL_f\alpha = L_fL_g\alpha + L_{[f,g]}\alpha,\ L_f < \omega, g >=< L_f\omega, g > + < \omega, L_f g >$$

$$d\omega(f, g) =< L_f\omega, g > + < \omega, L_f g > - < L_g\omega, f >$$

La precedente formula è una conseguenza della seguente identità detta formula di Cartan (con $\imath_f$ si indica la contrazione)

$$L_f = d \circ \imath_f + \imath_f \circ d$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}(exp(-tf))_* g \circ \exp tf = (\exp(-tf))_* L_f g \circ \exp tf$$

e per ogni forma ω

$$\frac{d}{dt}(\exp tf)^* \omega = (\exp tf)^* L_f \omega$$

da cui si possono dedurre le seguenti approssimazioni asintotiche, che convergono in un intorno di 0 nel caso analitico

$$\alpha \circ \exp tf = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} L_f^k \alpha, \quad (\exp(-tf))_* g \circ \exp tf = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} L_f^k g \circ \exp tf$$

9.1. **Elementi di geometria simplettica.** La forma $s \in \Lambda^1 T^*M$ di Liouville (o tautologica) e la struttura simplettica canonica $\sigma = ds$ su T^*M. Campi vettoriali hamiltoniani e invarianza dell'hamiltoniana lungo il flusso. Invarianza della struttura simplettica per il flusso di campi hamiltoniani (anche tempo-dipendenti).
Lift di un campo tempo-dipendente $X_t : M \to TM$ ad un campo hamiltoniano $\vec{H}_t : T^*M \to TT^*M$ e suo flusso in termini del flusso di X_t

10. Lezione 16, 17 - Principio di massimo di Pontryagin (PMP), [1], [13]

Formulazione del PMP per il problema di Mayer a tempo fissato. Conseguenze: valore costante dell'hamiltoniana di riferimento lungo il covettore aggiunto, caso dell'hamiltoniana massimizzata C^2, [1].

11. Lezione 18 - PMP

Derivazione del PMP per il problema di Bolza a tempo fissato e libero.

12. Lezione 19, 20 - PMP

PMP per il tempo minimo. Sintesi per il problema del "soft landing".

13. Lezione 21 - PMP

Calcolo della funzione di tempo minimo per il problema del "soft landing". Condizioni per la continuitá e la Hoelderianità della funzione di tempo minimo, cenni.

14. Lezione 21, 22 - PMP

Calcolo degli estremali della Brachistocrona.

15. Lezione 24, 25, 26 - PMP

Dimostrazione

16. Lezione 24, 25, 26 - PMP

Dimostrazione

17. Lezione 26, 27 - PMP e l'equazione di Eulero Lagrange

Principio di massimo debole. Derivazione dell'equazione di Eulero Lagrange dal principio di Massimo. La funzione eccesso di Weierstrass.
Esistenza di estremali singolari per il problema del tempo minimo per sistemi del tipo $\dot{x} = f(x) + ug(x)$, cenni.

References

[1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov, *Lectures on Geometric Control Theory*, Lectures Notes SISSA n.38, 2001.

[2] V. Alekseev, V. Tikhomirov, and S. Fomin, *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York, 1987.

[3] A. Bacciotti, *Fondamenti Geometrici della Teoria del Controllo*, Quaderno UMI, 1986.

[4] R. M. Bianchini, *Equazioni Differenziali Lineari e Teoria Matematica del Controllo*, Appunti del primo modulo di Equazioni differenziali, 2001/02.

[5] R. M. Bianchini and G. Stefani, *Multivalued fields and control systems with unbounded control*, Ricerche di Automatica, 12 (1981), pp. 33–49.

[6] A. Bressan, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems*, Lectures Notes SISSA, 2001.

[7] L. Cesari, *Optimization. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, MacGrow-Hill, New York, 1955.

[9] R. Conti, *Processi di Controllo Lineari in* $\mathbb{R}^n$, Quaderno UMI n.30, 1974.

[10] V. Jurdjevich, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.

[11] E. Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, 1967.

[12] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. GamKrelize, and E. Mishenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1962.

[13] H. J. Sussmann, *Course at the Weizmann Institute*, handouts, November 2000 - January 2001.

[14] H. J. Sussmann and J. C. Willems, *The brachistochrone problem and modern control theory*, in Contemporary Trends in Non-linear Geometric Control Theory and its Applications, J. G. F. M.-P. A. Anzaldo-Meneses, B. Bonnard, ed., London, 2002, World Scientific.