

METODI GEOMETRICI PER LA CONTROLLABILITÀ DI SISTEMI NONLINEARI

GIANNA STEFANI, EMAIL: GIANNA.STEFANI@UNIFI.IT

Lezioni del corso di dottorato - A.A. 2006/2007

1. LEZIONE 1,2 - POSIZIONE DEL PROBLEMA CHE INTENDIAMO STUDIARE

1.1. Equazione di controllo tempo-indipendente. Equazione differenziale ordinaria dipendente da un parametro

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(x, u)$$

La variabile di stato x appartiene ad una varietà connessa "smooth" (C^∞) M immersa in uno spazio euclideo (nel senso di [1], cap. 1, vedi anche [10], cap.1). Si può anche pensare che $M = \mathbb{R}^n$. La variabile di controllo u appartiene ad un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^m$

$f : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ è una applicazione C^∞ con la proprietà che per ogni $u \in \mathbb{R}^m$

$$f_u : M \rightarrow TM$$

è un campo vettoriale su M .

Per **soluzione di (1.1)** si intende una coppia di curve definite su un intervallo I , (ξ, v) , detta anche **coppia ammissibile**, con le seguenti proprietà:

$$v \in \mathcal{U} \subset L_{loc}^\infty(I, \Omega), \quad \xi \in W^{1,\infty}(I, \Omega), \quad \text{tali che} \quad \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), v(t)) \quad q.o. \quad t \in I.$$

$\mathcal{U}$ si dice classe delle funzioni di controllo ammissibili. Si dice anche che ξ è soluzione di (1.1) relativa al controllo v , o anche che ξ è una traiettoria del sistema.

Alcuni problemi da affrontare

- (1) esistenza di un controllo che trasferisca una configurazione del sistema in un'altra
- (2) il tempo necessario per trasferirla
- (3) esistenza e proprietà di un controllo ottimo (rispetto ad un qualche criterio) che operi il trasferimento.

In questo corso ci occuperemo essenzialmente dei punti 1 e 2. In particolare considereremo le proprietà degli insiemi raggiungibili

$$(1.2) \quad \mathcal{A}_T(x_0) = \{\xi(T) : \xi \text{ è una traiettoria di (1.1) , } \xi(0) = x_0\}$$

$$(1.3) \quad \mathcal{A}(x_0) = \cup_{T \geq 0} \mathcal{A}_T(x_0)$$

al variare di $\mathcal{U}$. Una classe particolarmente importante sarà quella dei controlli costanti a tratti, in questo caso avremo

$$(1.4) \quad \mathcal{A}_T(x_0) = \{\exp t_r f_{u_r} \circ \dots \circ \exp t_1 f_{u_1}(x_0) : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^r t_i = T\}$$

$$(1.5) \quad \mathcal{A}(x_0) = \{\exp t_r f_{u_r} \circ \dots \circ \exp t_1 f_{u_1}(x_0) : t_i \geq 0\}$$

dove $\exp t f_u(x_0)$ è la soluzione al tempo t dell'equazione differenziale $\dot{x} = f_u(x)$ che al tempo $t = 0$ è in x_0 .

2. ESEMPI

2.1. Geodetiche riemaniane e sub-riemaniane. Data una varietà riemanniana M , minimizzare la distanza lungo curve vincolate ad avere la tangente su un sottospazio assegnato, dipendente dal punto (distribuzione C^∞). Si perviene ad un sistema del tipo

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m.$$

2.2. Atterraggio morbido o fermata di un treno alla stazione. [1], [13], [1], [13]. Inglobando l'eventuale forza peso nel controllo si perviene ad un sistema del tipo:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in [u_0, u_1]$$

2.3. Barca che vuol raggiungere un approdo. [6], [10] pg.316. Indicando con f la corrente marina si perviene ad un sistema in $\mathbb{R}^2$ (superficie bidimensionale) del tipo

$$\dot{X} = f(X) + u$$

con u in un cerchio unitario.

2.4. Macchina di Dubins. Macchina il cui baricentro si muove con velocità scalare costante, si controlla la velocità angolare, [1], [13], [10] pg.26

$$\dot{x} = \cos(\theta), \quad \dot{y} = \sin(\theta), \quad \dot{\theta} = u, \quad |u| \leq 1$$

Si perviene cioè ad un sistema del tipo

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + ug(X) && \text{con} \\ f &= \cos(\theta) \partial_x + \sin(\theta) \partial_y && g = \partial_\theta \end{aligned}$$

2.5. Macchina di Markov-Dubins. Macchina il cui baricentro che si muove con velocità scalare costante e con accelerazione angolare controllabile, [13]

$$\dot{x} = \cos(\theta), \quad \dot{y} = \sin(\theta), \quad \dot{\theta} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = u \quad (\ddot{\theta} = u), \quad |u| \leq 1$$

Si perviene cioè ad un sistema del tipo

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + ug(X) && \text{con} \\ f &= \cos(\theta) \partial_x + \sin(\theta) \partial_y + \varphi \partial_\theta, && g = \partial_\varphi \end{aligned}$$

3. LEZIONE 3,4 - CAMPI VETTORIALI [1], [10]

Per i teoremi di esistenza e unicità di soluzioni di ODE con condizioni tipo Caratheodori si veda [8], [4].

Campi vettoriali come campi di vettori tangenti alle curve e come derivazioni nell'algebra delle funzioni (operazioni differenziali). Notazioni: $f \in \text{Vec}(M)$, $a \in C^\infty(M)$, $P \in \text{Diff}(M)$,

$$f \cdot a := L_f a : x \mapsto \langle da, f \rangle(x), \quad (AdP)V = P_*^{-1}V \circ P : x \in M \mapsto P_*^{-1}V(P(x)) \in T_x M$$

3.1. Flusso di un campo vettoriale e notazione esponenziale. Campi completi e proprietà del flusso

- (1) $\exp(tf) : U \rightarrow V$ omeomorfismo C^∞ , $(\exp(tf))^{-1} = \exp(-tf) = \exp(t(-f)) : V \rightarrow U$.
- (2) Per ogni compatto K esiste $\epsilon > 0$ tale che $\exp(tf)(x)$ è definito per ogni $(t, x) \in [-\epsilon, \epsilon] \times K$
- (3) Se esiste $\epsilon > 0$ tale che $\exp(tf)(x)$ è definito per ogni $(t, x) \in [-\epsilon, \epsilon] \times M$, allora f è completo.
- (4) Ogni campo vettoriale a supporto compatto è completo e quindi se ci interessano le soluzioni in un compatto possiamo pensare che il campo sia completo.

Cambiamento di coordinate e campi vettoriali con notazione di derivazione.

Parentesi di Lee (bracket), $[f, g]$, di due campi vettoriali e suo significato sia in termini di derivazione che di vettore tangente. Campi vettoriali commutativi, le seguenti condizioni sono equivalenti

- (1) $\exp(tf) \circ \exp(sg)(x) = \exp(sg) \circ \exp(tf)(x)$, per ogni $x \in M$ ed s, t sufficientemente piccoli.

- (2) $\exp(-tf) \circ \exp(-tg) \circ \exp(tf) \circ \exp(tg)(x) = x$, per ogni $x \in M$ e t sufficientemente piccolo.
 (3) $[f, g](x) = 0$, per ogni $x \in M$

4. LEZIONE 5,6 - SISTEMI LINEARI

$$\dot{x} = Ax + c + \sum_{i=1}^m u_i b_i = Ax + c + Bu, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

A matrice $n \times n$ e c, b_i vettori costanti. Nella bibliografia i sistemi si chiamano lineari quando $c = 0$.

Famiglia di campi associata al sistema, algebra di Lie associata al sistema e loro relazione con gli spazi di controllabilità e di controllabilità a tempo fissato. Controllabilità completa e controllabilità completa a tempo fissato. Matrice di Kalman. cambiamento di coordinate e forma canonica di Kalmaman. Criterio di completa controllabilità di Hautus. Equazioni differenziali di ordine n e matrici compagne (companion). Linearizzazione intorno ad un punto.

5. LEZIONE 7,8 - I TEOREMI DELLE ORBITE, [3], [10], [1]

Campi vettoriali, derivazioni e operatori differenziali nell'algebra delle funzioni. Algebra di Lie generata da una famiglia di campi vettoriali. Significato della notazione esponenziale in termine di operatori differenziali. Azione dei diffeomorfismi sui campi vettoriali.

Linearizzazione locale mediante diffeomorfismi (state local linearizability) di un sistema affine, [1].

La famiglia D di campi vettoriali associata ad un sistema di controllo, la sua orbita $\mathcal{O}_{x_0}$ passante per il punto x_0 e sua interpretazione come insieme raggiungibile con controlli costanti a tratti in tempi positivi e negativi.

Varietà "immersed" e il teorema delle orbite (Nagano-Sussman). L'algebra di Lie $Lie D$ e sua relazione con lo spazio tangente $T_{x_0} \mathcal{O}_{x_0}$.

6. LEZIONE 9,10 - ANCORA SUI TEOREMI DELLE ORBITE

6.1. Il teorema delle orbite, casi particolari, [3], [10], [1]. Caso delle famiglie simmetriche $\mathcal{O}_{x_0} = \mathcal{A}(x_0)$ e il caso lineare.

Quando $T_{x_0} \mathcal{O}_{x_0} = Lie D(x_0)$, caso generale: $Lie D$ finitamente generato come modulo sulle funzioni $C^\infty(M)$, [1], [10]. Casi particolari: varietà e campi analitici, dimensione costante di $Lie D(x)$, [3], [10], [1], e relazione col teorema di Frobenius. Condizione sufficiente affinché $\mathcal{O}_x = M$, famiglie "bracket-generating".

6.2. Le zero-orbite, [3], [10]. L'orbita "a tempo zero" $\mathcal{O}_{x_0}^0$ come sottovarietà non necessariamente connessa di $\mathcal{O}_{x_0}$. Il caso in cui D contenga un campo completo. L'ideale massimale $Lie_0 D$, e il caso analitico. Esempio: il caso lineare.

7. LEZIONE 11,12 - INSIEMI RAGGIUNGIBILI, [1], [10]

Famiglie Lie-determinate e di rango massimo. Insiemi raggiungibili in tempo $[0, T]$ e senza vincoli di tempo e loro proprietà rispetto all'interno e la chiusura. Punti normalmente accessibili. Insiemi raggiungibili in tempo T . analogie e differenze con i lineari.

8. LEZIONE 13,14 - FAMIGLIE COMPATIBILI, [1], [10]

Campi compatibili e fortemente compatibili con una famiglia di campi vettoriali (sistema di controllo). Lie-saturato. Relazioni fra la controllabilità di un sistema e del suo Lie-saturato. Involuppo convesso, time-scaling e normalizzatori di una famiglia. Sistemi affini: proprietà di controllabilità con controlli illimitati e con controlli in un intorno compatto dell'origine.

REFERENCES

- [1] A. A. AGRACHEV AND Y. L. SACHKOV, *Geometric Control Theory from the geometric viewpoint*, Spriger.
- [2] V. ALEKSEEV, V. TIKHOMIROV, AND S. FOMIN, *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York, 1987.
- [3] A. BACCIOTTI, *Fondamenti Geometrici della Teoria del Controllo*, Quaderno UMI, 1986.
- [4] R. M. BIANCHINI, *Equazioni Differenziali Lineari e Teoria Matematica del Controllo*, Appunti del primo modulo di Equazioni differenziali, 2001/02.
- [5] R. M. BIANCHINI AND G. STEFANI, *Multivalued fields and control systems with unbounded control*, Ricerche di Automatica, 12 (1981), pp. 33–49.
- [6] A. BRESSAN, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems*, Lectures Notes SISSA, 2001.
- [7] L. CESARI, *Optimization. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] E. A. CODDINGTON AND N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, MacGrow-Hill, New York, 1955.
- [9] R. CONTI, *Processi di Controllo Lineari in $\mathbb{R}^n$* , Quaderno UMI n.30, 1974.
- [10] V. JURDJEVICH, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [11] E. LEE AND L. MARKUS, *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, 1967.
- [12] L. PONTRYAGIN, V. BOLTYANSKII, R. GAMKRELIZE, AND E. MISHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1962.
- [13] H. J. SUSSMANN, *Course at the Weizmann Institute*, handouts, November 2000 - January 2001.
- [14] H. J. SUSSMANN AND J. C. WILLEMS, *The brachistochrone problem and modern control theory*, in Contemporary Trends in Non-linear Geometric Control Theory and its Applications, J. G. F. M.-P. A. Anzaldo-Meneses, B. Bonnard, ed., London, 2002, World Scientific.