TEORIA GEOMETRICA DEL CONTROLLO - CONTROLLO OTTIMO

GIANNA STEFANI, EMAIL: STEFANI@DMA.UNIFI.IT

Esempi - Esercizi - A.A. 2001/2002

Per ciascuno degli esempi suggeriti verificare quali dei risultati dati nel corso si possono applicare.

1. Esempi introduttivi

Formulare come problemi di controllo i seguenti problemi del calcolo delle variazioni classico e della meccanica.

- Problema di Didone (problema isoperimetrico), handout 1 di [6], [2] pg. 17 formalizzazione, pg.66 soluzione.
- La brachistocrona (problema di tempo minimo), [7], [5] pg.311
- La catenaria (minimizzazione di un funzionale integrale), [6], [4] pg.126.
- Atterraggio morbido o fermata di un treno alla stazione, con vari criteri di ottimizzazione: tempo minimo, [1], [6], in un intervallo di tempo assegnato minimizzare l'accelerazione [1], in un intervallo di tempo finito minimizzare la norma L^2 dello spazio [6]
- Barca che vuol raggiungere un approdo in tempo minimo , [3], [5] pg.316
- Macchina di Dubins, [1], [6] , [5] pg.26

2. Macchina di Dubins e di Markov-Dubins

Problema di tempo minimo per un sistema del tipo $\dot{X} = f(X) + u\, g(X)\,, \quad |u| \le 1$. Si determini la dimensione delle orbite e delle 0-orbite. Si può applicare il teorema di esistenza della traiettoria ottima?

2.1. Macchina di Dubins.

Macchina che si muove con velocità scalare costante, si controlla la velocità angolare, [1], [6]

$$\dot{x} = \cos(\theta)\,, \quad \dot{y} = \sin(\theta)\,, \quad \dot{\theta} = u\,, \quad |u| \le 1$$

$$f = \cos(\theta)\,\partial_x + \sin(\theta)\,\partial_y \quad g = \partial_\theta$$

2.2. Macchina di Markov-Dubins.

Macchina che si muove con velocità scalare costante e con accelerazione angolare controllabile, [6]

$$\dot{x} = \cos(\theta)\,, \quad \dot{y} = \sin(\theta)\,, \quad \dot{\theta} = \varphi\,, \quad \dot{\varphi} = u \qquad (\ddot{\theta} = u)\,, \quad |u| \le 1$$

$$f = \cos(\theta)\,\partial_x + \sin(\theta)\,\partial_y + \varphi\,\partial_\theta\,, \quad g = \partial_\varphi$$

3. Brachistocrona

Dati due punti su un piano verticale, trovare la linea (vincolo), appartenente al piano, che realizza il tempo minimo per una massa soggetta alla sola forza peso e al vincolo, si suppone che le unità di misura siano tali che la massa e l'accelerazione di gravità siano uguali a 1 e che l'asse z sia diretta come la forza peso. Vedere che cosa accade se si impone che il vincolo sia una superficie nello spazio.

3.1. **Brachistocrona, prima versione.** Si impone che la forza di reazione sia ortogonale al vincolo, pervenendo ad un sistema del tipo $\dot{X} = f(X) + u\, g(X)\,, \quad u \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = v\,, \quad \dot{z} = w\,, \quad \dot{v} = -wu\,, \quad \dot{w} = 1 + vu\,, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f = v\,\partial_x + w\,\partial_z + \partial_w\,, \quad g = -w\,\partial_v + v\,\partial_w$$

Le varietà integrali sono $z = \frac{v^2+w^2}{2} + k$, con k determinato dai dati iniziali. Il sistema diventa quindi

$$\dot{x} = v\,, \quad \dot{v} = -wu\,, \quad \dot{w} = 1 + vu\,, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f = v\,\partial_x + \partial_w\,, \quad g = -w\,\partial_v + v\,\partial_w$$

Il sistema è completamente controllabile: essendo u illimitato, la chiusura dell'insieme raggiungibile equivale a quello della famiglia $\{f, g\}$. Non si applica direttamente il teorema di esistenza visto. Per una dimostrazione dell'esistenza si veda [7].

3.2. **Brachistocrona, seconda versione.** Si fissa una curva riferita alla lunghezza d'arco $s \mapsto \nu(s) = (\xi(s), \eta(s))$, che passa per i due punti e si indica con $s = \omega(t)$ la legge oraria sulla curva. La traiettoria sarà data da

$$t \mapsto S(t) = (x(t), z(t)) = \nu(\omega(t))$$

Le equazioni del moto (reazione ortogonale al vincolo) portano a

$$\ddot{\omega}(t) = \eta'(\omega(t)) \qquad z(t) = \frac{(\dot{\omega}(t))^2}{2} + k,$$

dove la costante k è determinata dalle condizioni iniziali. Scegliendo come funzioni di controllo le componenti del vettore tangente alla curva lungo il moto, $\nu'(\omega(t))$, e come parametri per determinare il moto $y(t) = \dot{\omega}(t)$ e $x(t)$, si perviene al sistema

$$\dot{y} = u\,, \quad \dot{x} = y\,v\,, \quad u^2 + v^2 = 1$$

del tipo

$$\dot{X} = u\,f(X) + v\,g(X)\,, \quad u^2 + v^2 = 1\,, \quad f = \partial_y\,, \quad g = y\,\partial_x.$$

Il valore finale $y(T)$ si puó scegliere positivo. Si noti che in questo caso la famiglia è simmetrica e si deduca la controllabilità globale e l'esistenza della traiettoria ottima del sistema rilassato.
Esercizio Definire l'hamiltoniana $H : (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$H(p, q, x, y) = \max_{u^2+v^2 \leq 1} \{< p dx + q dy, u\, f(x, y) + v\, g(x, y) >\}$$

Calcolare le soluzioni del sistema hamiltoniano associato in funzione di stato e costato iniziali. Si tenga conto che l'hamiltoniana è costante lungo il flusso per semplificare i calcoli. In dipendenza di $\omega_0 = (p_0, q_0) \neq (0, 0)$ e di $X_0 = (x_0, y_0)$, Calcolare la traiettoria $t \mapsto S(t) = (x(t), y(t))$.

4. Didone, seconda versione

Nel piano, minimizzare il perimetro data l'area. Sistema del tipo

$$\dot{X} = u_1\, f(X) + u_2\, g(X)\,, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Il problema puó essere posto nell'intervallo fissato $[0, 1]$,

$$\dot{x} = u_1\,, \quad \dot{y} = u_2\,, \quad \dot{z} = x\,u_2, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

L'area è $z(1)$ assegnata.
Esercizi:

- Completare la formalizzazione del problema.

- Studiare le relazioni con la minimizzazione del funzionale $\|u\|^2_{L^2([0,1],\mathbb{R}^2)}$.
  Definire l'hamiltoniana $H : (\mathbb{R}^3)^* \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con
  $$H(p,q,r,x,y,z) =$$
  $$\max_{u\in\mathbb{R}^2}\{< pdx + qdy + rdz, u_1\, f(x,y,z) + u_2\, g(x,y,z) > -\frac{1}{2}\|u\|^2\}$$
  Calcolare le soluzioni del sistema hamiltoniano associato in funzione di stato e costato iniziali.
- Formulare il caso in cui una parte del perimetro appartiene ad una curva assegnata
- Formulare il problema come un problema di tempo minimo (pensare alla curva riferita al parametro d'arco)

5. Geodetiche riemanniane e sub-riemanniane

Data una varietà riemanniana M, minimizzare la distanza lungo curve vincolate ad avere la tangente su un sottospazio assegnato, dipendente dal punto (distribuzione C^∞). Sistema del tipo
$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i\, f_i(x)\,, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m.$$
Supponiamo di essere nel caso analitico (per esercizio si estenda il ragionamento al caso "rango costante", quale rango?)
Si ha che la famiglia D, dei campi associati al sistema, è simmetrica. Se $\dim L(D)(x_0) = L(f_1,\ldots,f_m)(x_0) = m$, siamo nel caso dello studio di geodetiche riemanniane uscenti da x_0 e appartenenti alla varietà integrale. Se $\dim L(D)(x_0) > m$, siamo nel caso dello studio di geodetiche sub-riemanniane uscenti da x_0. Si noti che in questo caso $L(D) = L^0(D)$ e che, se almeno uno dei campi è completo, l'orbita coincide con la la zero-orbita e con gli insiemi raggiungibili a tempo fissato.
Il problema può essere posto anche in termini di vincoli olonomi, $\dim L(D)(x_0) = m$, o anolonomi, $\dim L(D)(x_0) > m$. In particolare se $\dim L(D)(x_0) = n = \dim M$, si dice che siamo nel caso completamente anolonomo o "bracket-generating". Vedi [5], Sec 4.8, pg.121 e seguenti. Esercizi:

- Completare la formalizzazione del problema.
- Studiare il problema dell'esistenza.
- Studiare le relazioni con la minimizzazione del funzionale $J = \|u\|^2_{L^2([0,1],\mathbb{R}^m)}$. Studiare l'esistenza in questo problema.

- Formulare il problema come un problema di tempo minimo (pensare alla curva riferita al parametro d'arco) e studiare l'esistenza della traiettoria ottima

References

[1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov, *Lectures on Geometric Control Theory*, Lectures Notes SISSA n.38, 2001.
[2] V. Alekseev, V. Tikhomirov, and S. Fomin, *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York, 1987.
[3] A. Bressan, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems*, Lectures Notes SISSA, 2001.
[4] L. Cesari, *Optimization. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.
[5] V. Jurdjevich, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
[6] H. J. Sussmann, *Course at the Weizmann Institute*, handouts, November 2000 - January 2001.
[7] H. J. Sussmann and J. C. Willems, *The brachistochrone problem and modern control theory*, in Contemporary Trends in Non-linear Geometric Control Theory and its Applications, J. G. F. M.-P. A. Anzaldo-Meneses, B. Bonnard, ed., London, 2002, World Scientific.