IL PRINCIPIO DI MASSIMO DI PONTRYAGIN

GIANNA STEFANI

Abstract. - Appunti parziali delle lezioni di Teoria Geometrica del Controllo sul Principio di Massimo di Pontryagin tenute nell'anno accademico 2001/02 al Dottorato in Matematica con sede a Firenze

1. Il principio di massimo di Pontryagin per il problema di Mayer a tempo fissato

1.1. **Note Bibliografiche.** La prima versione del Principio di Massimo (PMP) è dovuta a L.S. Pontryagin e ai suoi collaboratori [6]. In ogni libro di controllo si prova il principio di massimo, si veda ad esempio [5], [3] , [2], anche in un contesto di "nonsmooth analysis", si veda ad esempio [4].

Qui se ne da una versione invariante per cambiamenti di coordinate e valida su varietà differenziali, usando alcuni rudimenti di geometria simplettica e le proprietà dei campi vettoriali hamiltoniani ottenuti come lift al cotangente di campi vettoriali sulle varietà. I metodi sono analoghi a quelli usati in [1], dove si studiano problemi a punti fissi, e in [7], dove si studiano anche vincoli più generali.

La formulazione del PMP è data, per brevità, solo per le varità , **per esercizio se ne dia anche la versione valida per** $M = \mathbb{R}^n$

1.2. **Il problema di Mayer.** Costo sui punti estremi.

$$\textbf{Minimizzare} \quad J(\xi, v) := \alpha(\xi(0)) + \beta(\xi(T)) \tag{1.1}$$

sulle soluzioni di

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.2}$$

$$x(0) \in N_0 \quad x(T) \in N_T \tag{1.3}$$

La variabile di stato x appartiene ad una varietà, M, connessa e C^∞. Si può anche pensare che $M = \mathbb{R}^n$.
La variabile di controllo u appartiene ad un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^m$ e le funzioni di controllo sono $L^\infty([0, T], \Omega)$.
$f : M \times \mathbb{R}^m \to TM$ è una applicazione C^∞ con la proprietà che per ogni $u \in \mathbb{R}^m$

$$f_u : M \to TM$$

è un campo vettoriale su M.
L' intervallo $[0, T]$ é fissato.
N_0, N_T sono sottovarieta' di M, che possono essere anche punti.

1.3. **Il principio di massimo, formulazione.** Condizione necessaria.
Supponiamo che la coppia $(\hat{\xi}, \hat{v})$ risolva il problema, cioè che $\hat{\xi}$ sia soluzione di (1.2) relativa al controllo $\hat{v} \in L^\infty([0, T], \Omega)$, che

$$\hat{\xi}(0) = \hat{x} \in N_0, \quad \hat{\xi}(T) = \hat{y} \in N_T$$

e che

$$\hat{J} = \alpha(\hat{x}) + \beta(\hat{y}) \le \alpha(\xi(0)) + \beta(\xi(T))$$

per ogni coppia ammissibile che soddisfa ai vincoli.

Sarà conveniente considerare l' equazione della sottovarietà N_T "vicino" a $\hat{y}$ ed esprimere il vincolo come

$$\varphi_T(\xi(T)) = 0 \tag{1.4}$$

con φ_T funzione C^∞ su M a valori in $\mathbb{R}^k$.

Definiamo

- il campo vettoriale tempo-dipendente di riferimento
$$\hat{f} : [0,T] \times M \to TM, \quad \hat{f}(t,x) = f(x, \hat{\upsilon}(t))$$
- l' Hamiltoniana tempo-dipendente di riferimento
$$\widehat{H} : [0,T] \times T^*M \to \mathbb{R}, \ (t,\ell) \mapsto \langle \ell, \hat{f}_t(\pi\ell) \rangle,$$
($\pi : T^*M \to M$ è la proiezione canonica) e il campo vettoriale hamiltoniano tempo-dipendente associato
$$\vec{\widehat{H}}_t : T^*M \to T\,T^*M$$
- l'Hamiltoniana massimizzata
$$H : T^*M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \ell \mapsto \sup_{u\in\Omega} \langle \ell, f(\pi\ell, u) \rangle$$

Theorem 1.1 (PMP)**.** *Se la coppia $(\hat{\xi}, \hat{\upsilon})$ risolve il problema di Mayer allora esistono*
$$p_0 \in \{0,1\}$$
e una soluzione Lipschtz
$$\hat{\lambda} : [0,T] \to T^*M$$
del sistema hamiltoniano tempo-dipendente
$$\dot{\lambda} = \vec{\widehat{H}}_t(\lambda) \tag{1.5}$$
con le condizioni di trasversalità
$$\lambda(0) = p_0\, d\alpha(\hat{x}) \quad su\ T_{\hat{x}}N_0, \qquad \lambda(T) = -p_0\, d\beta(\hat{y}) \quad su\ T_{\hat{y}}N_T \tag{1.6}$$
tali che

(1) condizione di non banalità
$$p_0 + \|\hat{\lambda}\|_\infty \neq 0$$
(2) principio di massimo
$$\widehat{H}_t(\hat{\lambda}(t)) = H(\hat{\lambda}(t)), \qquad t \in [0,T]\ q.o.$$
o equivalentemente
$$\langle \hat{\lambda}(t), f(\hat{\xi}(t), \hat{\upsilon}(t)) \rangle = \max_{u\in\Omega} \langle \hat{\lambda}(t), f(\hat{\xi}(t), u) \rangle, \qquad t \in [0,T]\ q.o.$$

1.4. **Il principio di massimo, dimostrazione.** Faremo prima la dimostrazione nel caso che il controllo di riferimento $\hat{\upsilon}$ sia continuo per evitare difficoltà tecniche e capire i passi essenziali della dimostrazione. In un secondo tempo rimuoveremo questa ipotesi semplificativa.
Consideriamo l'insieme raggiungibile al tempo T con traiettorie ammissibili
$$\mathcal{R} = \{S_T(x,\upsilon) : (x,\upsilon) \in N_0 \times L^\infty([0,T],\Omega)\},$$
naturalmente si considerano coppie (x,υ) che producono traiettorie prolungabili fino a T.

Componendo il flusso del sistema di controllo col costo e con la funzione che definisce il vincolo sul punto finale, otteniamo un "insieme raggiungibile" in $\mathbb{R}^{k+1}$
$$\mathcal{A} = \left\{ \Big(\alpha(x) + \beta(S_T(x,\upsilon)) - \hat{J}, \varphi_T(S_T(x,\upsilon)) \Big) : (x,\upsilon) \in N_0 \times L^\infty([0,T],\Omega) \right\}.$$
Abbiamo che $0 \in \mathcal{A}$ e che se $\hat{J}$ è il minimo allora
$$\mathcal{A} \cap \{(a,0,\dots,0) : a \leq 0\} = \{0\} \tag{1.7}$$

Indichiamo il flusso (definito localmente) del campo vettoriale di riferimento, $\hat{f}_t$, con

$$\widehat{S}_t : M \to M,$$

cioè $\widehat{S}_t(x_0)$ è la soluzione al tempo t del problema di Cauchy

$$\dot{x} = \hat{f}_t(x), \ x(0) = x_0.$$

Definiamo le **variazioni di Pontryagin** come

$$g(t,u) = \widehat{S}_{T\,*}\widehat{S}_{t\,*}^{-1}(f(\hat{\xi}(t),u) - f(\hat{\xi}(t),\hat{v}(t))) \in T_{\hat{y}}M, \qquad t \in [0,T], \ u \in \Omega \tag{1.8}$$

e le **variazioni del punto iniziale** come

$$\widehat{S}_{T\,*}v \qquad v \in T_{\hat{x}}N_0.$$

I precedenti vettori in $T_{\hat{y}}M$ definiscono il seguente insieme $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ di direzioni tangenti a $\mathcal{R}$ in $\hat{y}$ (vedi il paragrafo: Dimostrazione della sommabilità delle variazioni)

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \Big\{ g(t,u), \ \widehat{S}_{T\,*}v : \quad t \in [0,T], \ u \in \Omega, \ v \in T_{\hat{x}}N_0 \Big\} \tag{1.9}$$

e quindi posto

$$\omega = (d\beta(\,\hat{y})\,,\, D\varphi_T(\hat{y})\,)$$

l'insieme $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ di direzioni tangenti a $\mathcal{A}$ in 0 definito da

$$\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \Big\{ \langle \omega,\, g(t,u) \rangle, \ \langle \omega,\, \widehat{S}_{T\,*}v \rangle + (\, d\alpha(\hat{x})v\,,\, 0\,) : \quad t \in [0,T], \ u \in \Omega, \ v \in T_{\hat{x}}N_0 \Big\}, \tag{1.10}$$

Esercizio Per ogni $w \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ trovare una curva in $\mathcal{A}$ che ha w come vettore tangente in 0.

Denotiamo infine con $\mathcal{K}$ il cono convesso in $\mathbb{R}^{k+1}$ generato da $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^{h} a_i w_i : \ h \in \mathbb{N}, \ a_i \geq 0, \ w_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}} \right\}$$

La dimostrazione del PMP consiste nel dimostrare che da 1.7 discende la separazione di $\mathcal{K}$ da $\rho = \{(a,0,\dots,0) : a \leq 0\}$,

cioè esiste $\tilde{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k) = (p_0, p) \in \mathbb{R}^{k+1\,*}$ con $\tilde{p} \neq 0, \ p_0 \geq 0$ tale che

$$\langle \tilde{p}, w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{K}. \tag{1.11}$$

Dimostriamo che 1.11 implica il PMP.

Indichiamo con $\hat{\lambda}$ la soluzione di 1.5 con condizione a $t = T$,

$$\hat{\lambda}(T) = -\left(p_0\, d\beta(\hat{y}) + \langle p, D\varphi_t(\hat{y}) \rangle\right)$$

otteniamo

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}(T)\widehat{S}_{T\,*}\widehat{S}_{t\,*}^{-1} \in T^*_{\hat{\xi}(t)}M$$

o più esplicitamente in $\mathbb{R}^n$

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}(T)D\widehat{S}_T(\hat{x})D\widehat{S}_t^{-1}(\hat{\xi}(t)) = \hat{\lambda}(T)D\widehat{S}_T(\hat{x})\left(D\widehat{S}_t^{-1}(\hat{x})\right)^{-1}$$

Esercizio Provare che $\hat{\lambda}$ sopra definito è soluzione di 1.5.

Da 1.11 otteniamo

$$\langle p_0\, d\alpha(\hat{x}) - \hat{\lambda}(T)\widehat{S}_{T\,*}, v \rangle = 0 \qquad \forall v \in T_{\hat{x}}N_0$$

e quindi

$$\hat{\lambda}(T)_{|T_{\hat{y}}N_T} = -p_0\, d\beta(\hat{y})_{|T_{\hat{y}}N_T} \qquad p_0\, d\alpha(\hat{x})_{|T_{\hat{x}}N_0} = \left(\hat{\lambda}(T)\widehat{S}_{T\,*}\right)_{|T_{\hat{x}}N_0} = \hat{\lambda}(0)_{|T_{\hat{x}}N_0}.$$

Inoltre se $p_0 \neq 0$, si può scegliere $p_0 = 1$, mentre se $p_0 = 0$ allora $p \neq 0$ e quindi la verifica della condizione di non banalità: $\hat{\lambda}(T) = -\langle p, D\varphi_T(\hat{y}) \rangle \neq 0$.

Infine sempre da 1.11 otteniamo

$$\langle -\hat{\lambda}(T)\widehat{S}_{T\,*}\widehat{S}_{t\,*}^{-1}, f(\hat{\xi}(t),u) - f(\hat{\xi}(t),\hat{v}(t)) \rangle \geq 0 \qquad \forall t \in [0,t], \ u \in \Omega$$

e quindi il principio di massimo

$$\langle \hat{\lambda}(t), f(\hat{\xi}(t),u) \rangle \leq \langle \hat{\lambda}(t), f(\hat{\xi}(t),\hat{v}(t)) \rangle \qquad \forall t \in [0,t], \ u \in \Omega.$$

Dimostriamo che 1.7 implica 1.11. Per assurdo supponiamo che 1.11 sia falsa. Indicando con $C^{\perp}$ il cono polare di C, 1.11 può essere espressa con $(-\mathcal{K}^{\perp}) \cap \rho^{\perp} \neq \{0\}$ e quindi la sua negazione con

$$(-\mathcal{K})^{\perp} \cap \rho^{\perp} = \{0\}. \tag{1.12}$$

La dimostrazione consiste nei seguenti passi.

1. **Lemma sui coni convessi** (standard).
   1.12 implica che esistono $w_1, \dots, w_{k+2}$ nell'insieme dei generatori $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{K}$ tali che
   $$-\boldsymbol{e_0} \equiv -(1, 0, \dots, 0)$$
   appartiene all' interno del cono convesso
   $$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{k+2} a_i w_i : a_i \geq 0,\ i = 1 \dots k+2 \right\} \tag{1.13}$$
   generato da $w_1, \dots, w_{k+2}$.
2. **Sommabilità delle variazioni** (fondamentale anche per i principi di massimo di ordine superiore).
   $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ è un cono tangente di Boltyanskii ad $\mathcal{A}$ in 0. Cioè esiste un intorno U di $0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ ed una applicazione continua
   $$\phi : U \cap \mathcal{C} \to \mathcal{A}$$
   tale che
   $$\phi(w) = w + o(\|w\|).$$
   Nel nostro caso si può pensare che U sia un intorno di $0 \in \mathbb{R}^{k+2}$ e che $\phi : U \cap \mathbb{R}_+^{k+2} \to \mathcal{A}$ sia tale che
   $$\phi(a) = \sum_{i=1}^{k+2} a_i w_i + o(\|a\|). \tag{1.14}$$
3. **Lemma topologico** (standard).
   Se $-\boldsymbol{e_0} \in int\, \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ è un cono di Boltyanskii allora esiste $r > 0$ tale che
   $$-r\boldsymbol{e_0} \in \mathcal{A}$$
   e quindi $\hat{J}$ non è un minimo: assurdo.

Dimostrazione del Lemma sui convessi. Poichè ρ è una semiretta, se $\mathcal{K}$ e ρ non sono separati da un iperpiano di supporto, allora ρ è contenuto nella chiusura di $\mathcal{K}$. Inoltre se $-\boldsymbol{e_0}$ appartenesse alla frontiera di $\mathcal{K}$, esisterebbe un piano di supporto a $\mathcal{K}$ contenente ρ e quindi $\tilde{p}$ tale che $\langle \tilde{p}, \boldsymbol{e_0} \rangle = 0$ e $\langle \tilde{p}, w \rangle \geq 0,\ \forall w \in \mathcal{K}$.

Quindi $-\boldsymbol{e_0} \in int\, \mathcal{K}$ e possiamo scegliere $w_1, \dots, w_{k+2} \in \mathcal{K}$ tali che $-\boldsymbol{e_0}$ appartiene all' interno del cono convesso da essi generato. Dal Lemma di Caratheodori segue che $w_1, \dots, w_{k+2}$ possono essere scelti fra in $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$.

Dimostrazione del Lemma topologico. Vogliamo determinare $r > 0$ in modo da risolvere l'equazione

$$\phi(w) = -r\boldsymbol{e_0}, \quad \text{o equivalentemente} \quad -\phi(w) + w - r\boldsymbol{e_0} = w, \tag{1.15}$$

con un teorema di punto fisso.

Sia B una sfera di centro $-\boldsymbol{e_0}$ e raggio minore di 1 contenuta in $\mathcal{C}$. Ne segue che $b\,B \subset U \cap \mathcal{C}$, per i $b > 0$, "sufficientemente piccoli". Definiamo $G_r(w) = -\phi(w) + w - r\boldsymbol{e_0}$ e scegliamo $\bar{b} > 0$ tale che da $w \in \bar{b}\,B$ segua $\|\phi(w) - w\| < \|w\|/4$. Non é difficile vedere che

$$r = \frac{\bar{b}}{2} \Longrightarrow G_r(\bar{b}\,B) \subset \bar{b}\,B,$$

quindi 1.15 ha soluzione.

Dimostrazione della sommabilità delle variazioni. Da 1.9 e 1.10 segue che è sufficiente mostrare che per ogni insieme finito di variazioni $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ esiste un intorno U di $0 \in \mathbb{R}^r$ e che $\phi : U \cap \mathbb{R}^r_+ \to \mathcal{R}$ tale che

$$\phi \in C(U \cap \mathbb{R}^r_+, \mathcal{R}) \qquad \phi(a) = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i + o(\|a\|). \tag{1.16}$$

Senza perdere in generalità si può pensare che $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, in quanto si può provare la 1.16 in una carta in $\hat{y}$.

Facciamo vedere che la proprietà vale per le variazioni che provengono da vettori tangenti ad N_0. Siano $g_1, \dots, g_r$ campi vettoriali tangenti ad N_0 e siano $v_1 = g_1(\hat{x}), \dots, v_r = g_r(\hat{x}) \in T_{\hat{x}} N_0$, definiamo

$$\psi : \delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \mapsto \exp(\delta_1 g_1) \circ \cdots \circ \exp(\delta_r g_r)(\hat{x}). \tag{1.17}$$

La funzione $\widehat{S}_T \circ \psi$ è definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^r_+$, è a valori in $\mathcal{R}$ ed è C^∞, quindi ha la proprietà 1.16.

Facciamo vedere che 1.16 vale per variazioni di Pontryagin $g(\tau, u_1), \dots, g(\tau, u_r)$ relative allo stesso tempo τ. Le variazioni di Pontryaghin si ottengono con variazioni del controllo di riferimento, che noi sceglieremo del tipo "needle-like". posto

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r) \in \mathbb{R}^r_+ \qquad |\varepsilon| = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i$$

definiamo il seguente controllo

$$v_\tau(\varepsilon) : t \mapsto \begin{cases} \hat{v}(t) & t \in [0, \tau] \cup [\tau + |\varepsilon|, T] \\ u_1 & t \in [\tau, \tau + \varepsilon_1] \\ \vdots & \\ u_r & t \in [\tau + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1}, \tau + |\varepsilon|] \end{cases} \tag{1.18}$$

Se $|\varepsilon|$ è sufficientemente piccolo, la soluzione uscente da $\hat{x}$ relativa al precedente controllo è prolungabile fino a T, la continuità di $\varepsilon \mapsto S_T(\hat{x}, v_\tau(\varepsilon))$ dipende dalla continuità della soluzione dell'equazione di controllo rispetto al punto iniziale e al tempo, cioè

$$(x, t) \mapsto S_t(x, v) \tag{1.19}$$

è continua per ogni controllo ammissibile v. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} S_T(\hat{x}, v_\tau(\varepsilon)) &= \widehat{S}_T \circ \widehat{S}^{-1}_{\tau+|\varepsilon|} \circ \exp(\varepsilon_r f_{u_r}) \circ \cdots \circ \exp(\varepsilon_1 f_{u_1})(\hat{\xi}(\tau)) = \\ &= \widehat{S}_T \circ \widehat{S}^{-1}_{\tau+|\varepsilon|} \left(\hat{\xi}(\tau) + \textstyle\sum_{i=1}^r \varepsilon_i f(\hat{\xi}(\tau), u_i) + o(|\varepsilon|)\right) = \\ &= \widehat{S}_T \left(\hat{x} + \textstyle\sum_{i=1}^r \varepsilon_i \widehat{S}^{-1}_{\tau\,*} f(\hat{\xi}(\tau), u_i) - |\varepsilon| \widehat{S}^{-1}_{\tau\,*} f(\hat{\xi}(\tau), \hat{v}(\tau)) + o(|\varepsilon|)\right) = \\ &= \hat{y} + \textstyle\sum_{i=1}^r \varepsilon_i \widehat{S}_{T\,*} \widehat{S}^{-1}_{\tau\,*} \left(f(\hat{\xi}(\tau), u_i) - f(\hat{\xi}(\tau), \hat{v}(\tau)\right) + o(|\varepsilon|). \end{aligned}$$

Nel precedente calcolo abbiamo usato i seguenti fatti validi nel nostro caso e in casi più generali

Lemma 1.2. *Nelle ipotesi considerate abbiamo*

1. *(1)* $\sigma \mapsto \exp(\sigma f_u)(x)$ *è differenziabile per* $\sigma = 0$ *uniformemente rispetto a* x *in un compatto.*
2. *(2) La derivata di* $\sigma \mapsto S_\sigma(\hat{\xi}(\tau), \hat{v})$ *in* $\sigma = 0$ *è* $f(\hat{\xi}(\tau), \hat{v}(\tau))$. *Per questo serve la continuità di* $\hat{v}$ *a* τ.
3. *(3)* $(x, t) \mapsto D\widehat{S}_t(x)$ *è continua.*

Supponiamo ora di avere r_0 variazioni provenienti da $T_{\hat{x}} N_0$,

$$v_1 = g_1(\hat{x}), \dots, v_{r_0} = g_{r_0}(\hat{x}),$$

e variazioni di Pontryagin relative a tempi $\tau_1 < \cdots < \tau_s$,

$$g(\tau_1, u_{1\,1}), \dots, g(\tau_1, u_{1\,r_1}), \cdots, g(\tau_s, u_{s\,1}), \dots, g(\tau_s, u_{s\,r_s}).$$

Per dimostrare 1.16 useremo la variazione di punto iniziale definita in 1.17 e la concatenazione di variazioni di controllo definite in 1.18. Poniamo

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{r_0}), \qquad x_\delta = \psi(\delta)$$
$$E^i = (\varepsilon_{i\,1}, \dots, \varepsilon_{i\,r_i}), \qquad E = (E^1, \dots, E^s),$$

se $|E^i| < \tau_{i+1} - \tau_i$ possiamo definire il controllo

$$v(E) : t \mapsto \begin{cases} \hat{v}(t) & t \in [0, \tau_1] \cup [\tau_1 + |E^1|, \tau_2] \cup \cdots \cup [\tau_s + |E^s|, T] \\ v_1(E^1)(t) & t \in [\tau_1, \tau + |E^1|] \\ \vdots & \\ v_s(E^s)(t) & t \in [\tau_s, \tau + |E^s|] \end{cases} \tag{1.20}$$

Consideriamo la traiettoria ammissibile di punto iniziale x_δ e controllo $v(E)$, se $|\delta| + |E|$ è sufficientemente piccolo la traiettoria sarà definita fino a T e possiamo definire

$$\phi : (\delta, E) \to \mathcal{R}, \qquad \phi(\delta, E) = S_T(x_\delta, v(E)).$$

La continuità di ϕ segue ancora dalla continuità di 1.19. Inoltre per le proprietà stabilite nel Lemma 1.2 abbiamo per x in un intorno compatto V di $\hat{x}$ su cui sia definito $S_T(x, v(E))$

$$S_T(x, v(E)) = \widehat{S}_T(x + \textstyle\sum_{i=1}^{s} \sum_{j_i=1}^{r_s} \varepsilon_{i\,j_i} \widehat{S}^{-1}_{\tau_i\,*} \Big(f(\widehat{S}_{\tau_i}(x), u_{i\,j_i}) - f(\widehat{S}_{\tau_i}(x), \hat{v}(\tau_i)\Big) + o(|E|)) =$$
$$= \widehat{S}_T(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{s} \sum_{j_i=1}^{r_s} \varepsilon_{i\,j_i} \widehat{S}_{T\,*} \widehat{S}^{-1}_{\tau_i\,*} \Big(f(\widehat{S}_{\tau_i}(x), u_{i\,j_i}) - f(\widehat{S}_{\tau_i}(x), \hat{v}(\tau_i)\Big) + o(|E|),$$

dove $\lim\limits_{E \to 0} \dfrac{o(|E|)}{|E|} = 0$, uniformemente rispetto a $x \in V$. Da questo segue, usando anche la locale lipschitzianità di f_u

$$S_T(\psi(\delta), v(E)) =$$
$$\widehat{S}_T(\psi(\delta)) + \textstyle\sum_{i=1}^{s} \sum_{j_i=1}^{r_s} \varepsilon_{i\,j_i} \widehat{S}_{T\,*} \widehat{S}^{-1}_{\tau_i\,*} \Big(f(\widehat{S}_{\tau_i}(\psi(\delta)), u_{i\,j_i}) - f(\widehat{S}_{\tau_i}(\psi(\delta)), \hat{v}(\tau_i)\Big) + o(|E|) =$$
$$= \hat{y} + \textstyle\sum_{i=1}^{r_0} \delta_i \widehat{S}_{T\,*} v_i + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j_i=1}^{r_s} \varepsilon_{i\,j_i} g(\tau_i, u_{i\,j_i}) + o(|E| + |\delta|)$$

Dimostrazione senza l'ipotesi che $\hat{v}$ sia continuo. Per rimuovere l'ipotesi che $\hat{v}$ sia continuo si deve introdurre la nozione di *punto di Lebesgue*, vedi [1] cap.11 pg.148 oppure un qualsiasi libro di equazioni differenziali o di analisi funzionale.

Le proprietà che ci interessano sono le seguenti

- Se $\tau \in [0, T]$ è un punto di Lebesgue per $\hat{v}$, vale la proprietà 2 de Lemma 1.2, fare la dimostrazione per esercizio.
- L'isieme dei punti che non sono di Lebesgue per $\hat{v}$ ha misura nulla in $[0, T]$.

Con queste proprietà si può ripetere la dimostrazione definendo le variazioni di Pontryagin solo per i τ che sono di Lebesgue per $\hat{v}$, cioè indicando con $\mathcal{T}$ l'isieme dei punti di $[0, T]$ che sono di Lebesgue per $\hat{v}$ e sostituendo $t \in \mathcal{T}$ a $t \in [0, T]$ in 1.8, 1.9, 1.10.

1.5. **Osservazioni.**

Remark 1.3. Abbiamo scelto che la variazione di controllo relativa a $g(\tau, u)$ avvenisse "dopo" τ, lo stesso risultato si otterrebbe con una variazione di controllo che avvenisse "prima" di τ. In particolare se $\tau = T$, la variazione di controllo per essere ammissibile deve avvenire prima di T.

Remark 1.4. Nella dimostrazione del PMP, si può scegliere variazioni di Pontryagin tutte relative a tempi diversi, vedi [1] cap.11 pg.148.

Remark 1.5. Si può dare il PMP anche per vincoli e costi sui punti estremi della traiettoria che non siano separati, cioè del tipo

$$J(\xi, v) = \gamma(\xi(0), \xi(T)) \qquad (x(0), x(T)) \in N \subset M \times M.$$

In questi casi cambieranno solo le condizioni di trasversalità.

Per la riduzione di questi casi al caso studiato si veda [7] pg.7 delle note del 3 gennaio.

Per esercizio si dia la formulazione del PMP nel caso di "vincoli periodici"

$$x(0) = x(T)$$

1.6. **Conseguenze importanti.** Quando l'equazione di controllo è tempo-indipendente si hanno le seguenti importanti proprietà delle hamiltoniane di riferimento e massimizzata.

Lemma 1.6. *L'hamiltoniana di riferimento valutata lungo il covettore aggiunto è costante:*

$$\hat{H}_t(\hat{\lambda}(t)) = costante$$

Per la dimostrazione si veda [1], Remark pg.142 del cap.11.

Lemma 1.7. *Se l'hamiltoniana massimizzata H è C^2, $\hat{\lambda}$ è soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H. Viceversa ad ogni soluzione del sistema hamiltoniano, si può associare una coppia (ξ, υ) che risulta un estremale di Pontryagin, cioè soddisfa al principio di massimo (senza condizioni di trasversalità).*

Per la dimostrazione si veda [1], Proposizione 11.1 pg.144 del cap.11.

2. Il PMP per il problema di Bolza e per il tempo finale variabile

Il Principio di Massimo per il problema di Bolza a tempo fisso e per quelli di Mayer e Bolza a tempo variabile si ottengono da quello di Mayer a tempo fisso usando i metodi indicati nella Sez. 2.4 del registro delle lezioni.

2.1. **Esercizi.**

- Ricavare le equazioni di Eulero Lagrange del calcolo delle variazioni dal PMP.
- Spiegare il significato degli estremali "anormali", cioè delle coppie ammissibili che soddisfani il PMP con $p_0 = 0$, in termini di vincoli.
- Formulare il PMP per il tempo minimo a punti fissati e equazione di controllo del tipo

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \qquad |u| \leq 1,$$

  nel caso che il controllo di riferimento sia bang-bang, cioè abbia un numero finito di punti di discontinuità ed assuma solo i valori ± 1. Considerare sia le traiettorie normali che quelle anormali.

  Se in un intervallo $[a, b]$ il controllo ottimale assume valori in $(-1, 1)$ aperto (controllo singolare), quale condizione si ottiene per $\hat{\lambda}$ nello stesso intervallo?
- Applicare il principio di massimo negli esempi considerati

References

[1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov, *Lectures on Geometric Control Theory*, Lectures Notes SISSA n.38, 2001.
[2] V. Alekseev, V. Tikhomirov, and S. Fomin, *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York, 1987.
[3] L. Cesari, *Optimization. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.
[4] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
[5] E. Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, 1967.
[6] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. GamKrelize, and E. Mishenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1962.
[7] H. J. Sussmann, *Course at the Weizmann Institute*, handouts, November 2000 - January 2001.