Correzione del test del 2 dicembre 1999

ES.1 Determinare per quali valori del parametro k la seguente equazione ha soluzioni in numero maggiore o uguale a due

$$a\,x^n + b\,x^{(n-2)} = k$$

Soluzione.
I punti critici di f: $x \to a\,x^n + b\,x^{(n-2)}$ sono {0,x1,-x1} con

$$x1 := \frac{b\,(n-2)}{\sqrt{-b\,(n-2)\,a\,n}}$$

$$\mathrm{f}(x1) = -2\,\frac{\left(\frac{b\,(n-2)}{\sqrt{-b\,(n-2)\,a\,n}}\right)^n a}{n-2}$$

Se n e' pari e a>0, i valori di k sono [f(x1), ∞).
Se n e' pari e a<0, i valori di k sono (- ∞,f(x1)].
Se n e' dispari, i valori di k sono $[-|f(x1)|, |f(x1)|]$.
****

ES.2 Calcolare i valori massimo e minimo che la seguente funzione f assume nell'intervallo [a1,a2] .

Soluzione.
I parametri sono dati in modo che

$$a1 = s - \frac{3}{2}\,h,\ a2 = s + \frac{1}{4}\,h,\ x0 = s + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{f}(x) = k\,x^2 - 2\,k\,s\,x + k\,s^2 - h\,k\,|x - x0|$$

I parametri sono dati in maniera che l'intervallo contenga il solo punto critico y0=s-h/2 , inoltre

$$\mathrm{f}(y0) = \left(-\frac{1}{4}\,h^2 - \frac{1}{2}\,h\right)k$$

$$\mathrm{f}(x0) = \frac{1}{4}\,k$$

Per i valori dei parametri abbiamo:
Se k<0 , max = f(y0) , min = f(x0).
Se k>0 , max = f(x0) , min = f(y0).
****

ES.3 Calcolare una primitiva F della seguente funzione

$$f := x \to \frac{a+x}{b\,x^2+1}$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln(b\,x^2+1)}{b} + \frac{a\arctan(\sqrt{b}\,x)}{\sqrt{b}}$$

****

ES.4 Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione f, l'asse x e le rette x=a1, x=a2.

$$f := x \to c\sin(x\,a + b\,\pi)$$

Soluzione
Una primitiva di f e'

$$-\frac{c\cos(x\,a + b\,\pi)}{a}$$

L'intervallo e'

$$[a1,\ a2] = \left[\frac{-b\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi}{a},\ \frac{-b\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi}{a}\right]$$

La funzione cambia segno in $-\frac{\pi\, b}{a}$, l'area e' $2\,\left|\frac{c}{a}\right|$.
****
ES.5

$$\int_{a}^{a+2} \frac{x+\mathrm{floor}(x-a)}{b}\,dx = \frac{2\,a+3}{b}$$

floor=parte intera
****
ES.6 Determinare il dominio e la tangente al grafico nel punto di ascissa x0 di

$$F := x \to x + \int_{x0}^{x} \frac{\arctan(t)}{(t-a)\,(t-b)}\,dx$$

Soluzione
Se x0<a , dominio = ($-\infty$, a).
Se x0>b , dominio = (b, ∞).
Se a<x0<b , dominio = (a, b).
L'equazione della tangente e'

$$y - x0 = (1 + \frac{\arctan(x0)}{(x0-a)\,(x0-b)})\,(x - x0)$$

****
ES.7

$$\lim_{x\to(-\infty)} \frac{(1-\cos(\frac{a}{x}) - \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{x^2})\,x^3}{c\,\sin(\frac{1}{x})} = -\frac{1}{24}\,\frac{a^4}{c}$$

****
ES.8 Determinare il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in b di

$$f := x \to a\,x + \ln(\frac{x}{a\,x+b})$$

Soluzione

$$a\,b + \ln(\frac{b}{a\,b+b}) + (a + \frac{1}{b} - \frac{a}{a\,b+b})\,(x-b) + (-\frac{1}{2}\,\frac{1}{b^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{b\,(a+1)\,(a\,b+b)})\,(x-b)^2$$

****
ES.9 Calcolare al variare di k il seguente limite M.

$$M = \lim_{x\to 0+} x^k\,(\frac{a}{x^n} - \ln(i + e^{(\frac{b}{x^n})}))$$

Soluzione
Se k > n , M = 0.
Se k = n , M = a-b.
Se k < n , M = $\mathrm{sgn}(a-b)\,\infty$.