Analisi matematica I, Ingegneria Civile e Edile

Correzione della prova scritta del 23 Febbraio

ES.1

Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

```
> restart:
> f:=x->(1+1/(x-a))^(x-b);
```

$$f := x \to (1 + \frac{1}{x-a})^{(x-b)}$$

```
> 'f(x)'=exp((x-b)*ln(1+1/(x-a)));
```

$$\mathrm{f}(x) = e^{((x-b)\ln(1+\frac{1}{x-a}))}$$

Soluzione

I parametri a, b sono positivi. Il dominio e' dato dagli x tali che

```
> restart:
> x<a-1,x>a;
```

$$x < a-1,\ a < x$$

I limiti da considerare sono

```
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a);
```

$$\lim_{x\to a} e^{((x-b)\ln(1+\frac{1}{x-a}))}$$

con a>b, a<b, a=b,

```
> assume(a>b):
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a);
```

$$\lim_{x\to a\tilde{}} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = \infty$$

```
> assume(a<b):
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a);
```

$$\lim_{x\to a\tilde{}} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = 0$$

```
> Limit(exp((x-a)*ln(1+1/(x-a))),x=a)=limit(exp((x-a)*ln(1+1/(x-a))),x=a);
```

$$\lim_{x\to a\tilde{}} e^{((x-a\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = 1$$

Inoltre

```
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1);
```

$$\lim_{x\to(a-1)} e^{((x-b)\ln(1+\frac{1}{x-a}))}$$

con a-1>b, a-1<b, a-1=b

```
> assume(a-1>b):
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1);
```

$$\lim_{x\to(a\tilde{}-1)} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = 0$$

```
> assume(a-1<b):
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1);
```

$$\lim_{x\to(a\tilde{}-1)} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = \infty$$

```
> Limit(exp((x-a+1)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1)=limit(exp((x-a+1)*ln(1+1/(x-a))),x=a-1);
```

$$\lim_{x\to(a\tilde{}-1)} e^{((x-a\tilde{}+1)\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = 1$$

Infine

```
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=+infinity)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=+infinity
```

$$\lim_{x\to\infty} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = e$$

```
> Limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=-infinity)=limit(exp((x-b)*ln(1+1/(x-a))),x=-infinity
```

$$\lim_{x\to(-\infty)} e^{((x-b\tilde{})\ln(1+\frac{1}{x-a\tilde{}}))} = e$$

Pertanto abbiamo l'asintoto verticale x=a se a>b e l'asintoto x=a-1 se a<b+1, y=e e' asintoto orizzontale destro e sinistro.

****

ES.2

Calcolare il seguente limite

```
> restart:
> Limit((a*n^2+3*n)/(sqrt(n^3)*(sqrt(b*n+7)-sqrt(n))),n=infinity)=limit((a*n^2+3*n)/(sqr
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\,n^2+3\,n}{\sqrt{n^3}\,(\sqrt{b\,n+7}-\sqrt{n})} = \frac{a}{\sqrt{b}-1}$$

****

ES.3

Calcolare l'area della regione (illimitata) di piano compresa fra il semiasse positivo delle x, l'asse y e il grafico della funzione

```
> restart:
> f:=x->(b*x-a)*exp(-x);
```

$$f := x \to (b\,x-a)\,e^{(-x)}$$

Una primitiva della funzione e'

```
> expand(value(int(f(x),x)));
```

$$-\frac{b\,x}{e^x} - \frac{b}{e^x} + \frac{a}{e^x}$$

Il segno della funzione non e' costante, a e b sono positivi, quindi l'area si ottiene

```
> "area"=-Int(f(x),x=0..a/b)+Int(f(x),x=a/b..infinity);
```

$$\text{"area"} = -\int_0^{\frac{a}{b}} (b\,x-a)\,e^{(-x)}\,dx + \int_{\frac{a}{b}}^{\infty} (b\,x-a)\,e^{(-x)}\,dx$$

```
> "area"=-int(f(x),x=0..a/b)+int(f(x),x=a/b..infinity);
```

$$\text{"area"} = 2\,b\,e^{(-\frac{a}{b})} - b + a$$

****

ES.4

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

```
> restart:
> ode:={diff(y(x),x)=-a*x/(y(x)+b)};
```

$$ode := \{\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = -\frac{a\,x}{\mathrm{y}(x)+b}\}$$

```
> ini:={y(0)=b};
```

$$ini := \{\mathrm{y}(0) = b\}$$

Se b>0 la soluzione e'

```
> assume(b>0): dsolve(ode union ini,{y(x)});
```

$$\mathrm{y}(x) = -b\tilde{} + \sqrt{4\, b\tilde{}^{2} - x^2\, a}$$

Se b<0 la soluzione e'

```
> assume(b<0): dsolve(ode union ini,{y(x)});
```

$$\mathrm{y}(x) = -b\tilde{} - \sqrt{4\, b\tilde{}^{2} - x^2\, a}$$

Il dominio delle precedenti funzioni e' l'intervallo limitato e chiuso di estremi

```
> solve(4*b^2-x^2*a,x);
```

$$2\, \frac{b\tilde{}}{\sqrt{a}},\ -2\, \frac{b\tilde{}}{\sqrt{a}}$$

ma agli estremi la funzione non e' derivabile (si noti che il metodo di separazione delle variabili si puo' applicare se y(x) e' diverso da -b), quindi il dominio della soluzione e' l'intervallo aperto di estremi

$$-\tfrac{2\,b}{\sqrt{a}},\ \tfrac{2\,b}{\sqrt{a}}\ .$$

****

ES.5

```
> restart:
```

Disegnare il grafico della seguente funzione

```
> f:=x->piecewise(x<a-1,x-a,b);
```

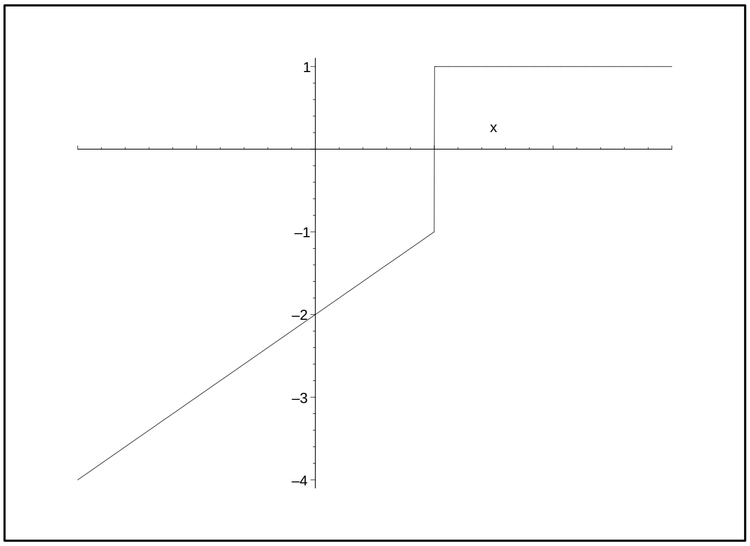
$$f := x \to \mathrm{piecewise}(x < a-1,\ x-a,\ b)$$

```
> 'f(x)'=f(x);
```

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-a & x < a-1 \\ b & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

Il grafico e' del tipo

```
> plot(piecewise(x<1,x-2,1),x=-2..3);
```



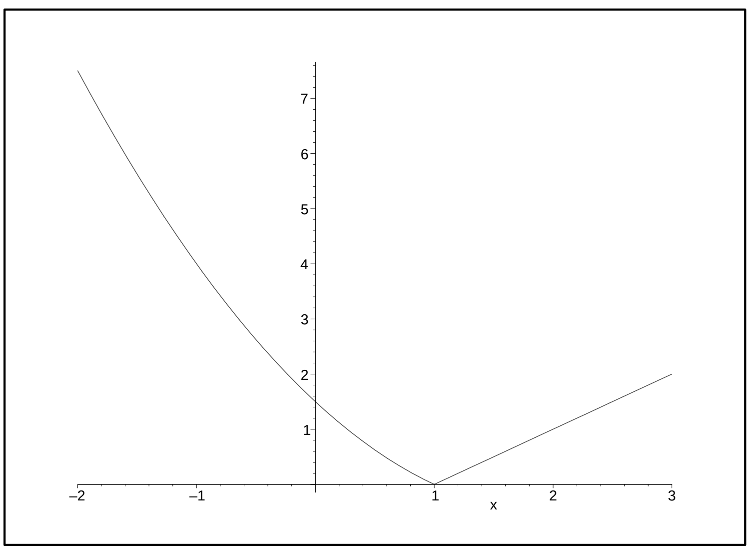
Considerare la funzione

```
> F:=x->Int(f(t),t=a-1..x);
```

$$F := x \to \int_{a-1}^{x} \mathrm{f}(t)\,dt$$

il cui grafico e' del tipo

```
> plot(piecewise(x<1,int(t-2,t=1..x),int(1,t=1..x)),x=-2..3);
```



Si ha infine

```
> 'F(x)'=piecewise(x<a-1,int(t-a,t=a-1..x),int(b,t=a-1..x));
```

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(a-1)^2 - a(-a+1+x) & x < a-1 \\ b(-a+1+x) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

****

ES.6

Sapendo che f e' in $(C^{\infty})(R)$ e che

```
> restart:
> Limit(f(a+h)/h^4,h=0)=b;
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(a+h)}{h^4} = b$$

cosa posso dire dell'approssimazione di Taylor di f in a?

Soluzione

Posso calcolare la parte principale di f e delle sue seguenti derivate fino all'ordine 4, in particolare

```
> f(a+h)=b*h^4+O(h^5);D(f)(a+h)=4*b*h^3+O(h^4);D^2*(f)(a+h)=12*b*h^2+O(h^3);
```

$$\mathrm{f}(a+h) = b\,h^4 + \mathrm{O}(h^5)$$

$$\mathrm{D}(f)(a+h) = 4\,b\,h^3 + \mathrm{O}(h^4)$$

$$\mathrm{D}^2\,\mathrm{f}(a+h) = 12\,b\,h^2 + \mathrm{O}(h^3)$$

Quindi

```
> D(f)(a+h)*D^2*(f)(a+h)=48*b^2*h^5+O(h^6);
```

$$\mathrm{D}(f)(a+h)\,\mathrm{D}^2\,\mathrm{f}(a+h) = 48\,b^2\,h^5 + \mathrm{O}(h^6)$$

```
> Limit((D(f)(a+h)*D^2*(f)(a+h))/(ln(1+h))^k,h=0)=Limit((48*b^2*h^5)/(h)^k,h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{D}(f)(a+h)\,\mathrm{D}^2\,\mathrm{f}(a+h)}{\ln(1+h)^k} = \lim_{h \to 0} 48\,\frac{b^2\,h^5}{h^k}$$

Se k<5, il limite e' 0.

Se k=5, il limite e' $48\,b^2$.

Se k>5 e pari , il limite e' ∞, se k>5 e dispari il limite non esiste.