Soluzione della prova scritta del 21 Giugno 2000

ES.1

Determinare per quali valori del parametro k la seguente equazione ha soluzioni in numero maggiore o uguale a 4

```
> restart:
> x^2+ln(n-x^2)/2=k;
```

$$x^2 + \frac{1}{2}\ln(n - x^2) = k$$

Definiamo

```
> f:=x->x^2+ln(n-x^2)/2;
```

$$f := x \to x^2 + \frac{1}{2}\ln(n - x^2)$$

Soluzione

Il parametro n e' intero positivo . Il dominio della funzione e' l'intervallo aperto di estremi

```
> solve(n-x^2,x);
```

$$\sqrt{n},\ -\sqrt{n}$$

```
> Df(x):=simplify(diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{Df}(x) := \frac{x\,(-2\,n + 2\,x^2 + 1)}{-n + x^2}$$

I punti critici sono

```
> critici:=[solve(Df(x),x)];
```

$$\mathit{critici} := [0,\ \frac{1}{2}\sqrt{-2 + 4\,n},\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2 + 4\,n}]$$

che cadono nell'intervallo di definizione di f poiche' n e' intero positivo.

Inoltre

```
> 'f(0)'=f(0);
```

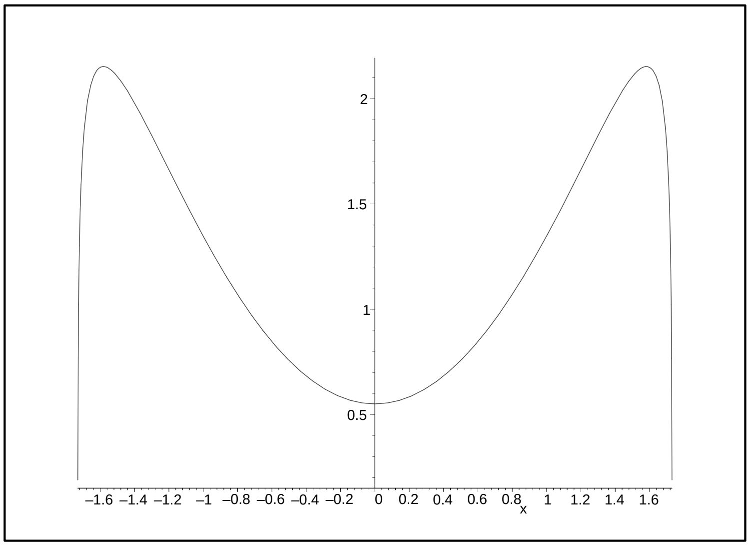
$$\mathrm{f}(0) = \frac{1}{2}\ln(n)$$

```
> 'f(x1)=f(x2)'=f(critici[2]);
```

$$(\mathrm{f}(x1) = \mathrm{f}(x2)) = -\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Il grafico e' del tipo

```
> plot(x^2+ln(3-x^2)/2,x=-1.731..1.731);
```



Si hanno soluzioni in numero maggiore o uguale a 4 se k appartiene all'intervallo aperto

$$\left(\ \frac{\ln(n)}{2},\ n-\frac{\ln(2)+1}{2}\ \right)$$

****

ES.2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

```
> restart:
> (d*y)/(d*x)=3*(y-n)*(y-(n+1))*x^2,y(0)=1/2+n;
```

$$\frac{d\,y}{d\,x}=3\,(y-n)\,(y-n-1)\,x^2,\ \mathrm{y}(0)=\frac{1}{2}+n$$

Soluzione

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. La soluzione e'

```
> simplify(dsolve(ode union ini,{y(x)}));
```

$$\mathrm{y}(x)=\frac{1+n\,e^{(x^3)}+n}{e^{(x^3)}+1}$$

****

Es. 3 Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra i grafici delle funzioni

```
> restart:
> f:=x->-ln(x-n);
```

$$f:=x\to -\ln(x-n)$$

```
> g:=x->log((x-n)/4);
```

$$g:=x\to \log(\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{4}\,n)$$

e la retta

```
> x=2*n+2;
```

$$x = 2\,n + 2$$

Soluzione

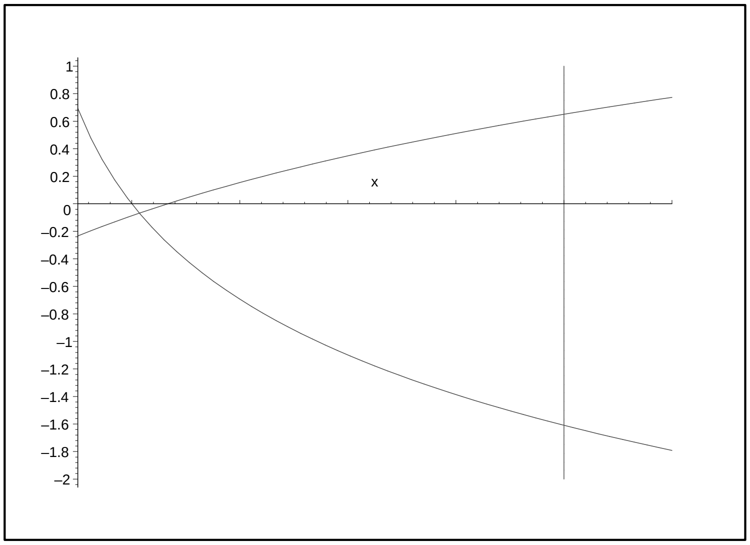
L'intersezione fra i grafici di f e g e' data dal punto di ascissa

```
> 'x'=solve(f(x)=g(x),x);
```

$$x = 2 + n$$

La regione e' del tipo rappresentato in figura.

```
> with(plots):
> a1:=plot( -ln(x-3), x=3.5..9):  a2:=plot(log(1/4*x-1/12),x=3.5..9):
a3:=plot([8,t,t=-2..1]):display(a1,a2,a3);
```



e si ottiene quindi come

```
> Int(g(x)-f(x),x=2+n..2*n+2)=collect(collect(int(g(x)-f(x),x=2+n..2*n+2),ln(n+2)),ln(2)
```

$$\int_{2+n}^{2\,n+2} \ln(\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}\,n) + \ln(x-n)\,dx = (-2\,n-4)\ln(2) + (2\,n+4)\ln(2+n) - 2\,n$$

****

ES.4

Determinare il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in n della seguente funzione

```
> restart:
> f:=x->sqrt(x)*ln(x);
```

$$f := x \to \sqrt{x}\ln(x)$$

Soluzione

```
> taylor(f(x),x=n,3);
```

$$\sqrt{n}\ln(n) + (\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\,\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}})\,(x-n) - \frac{1}{8}\,\frac{\ln(n)}{n^{(3/2)}}\,(x-n)^2 + \mathrm{O}((x-n)^3)$$

****

ES.5

Disegnare il grafico della seguente funzione

```
> 'f(x)'=f(x);
```

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x\,e^x & x < 0 \\ 2\,x^2 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

a) f ammette primitive?

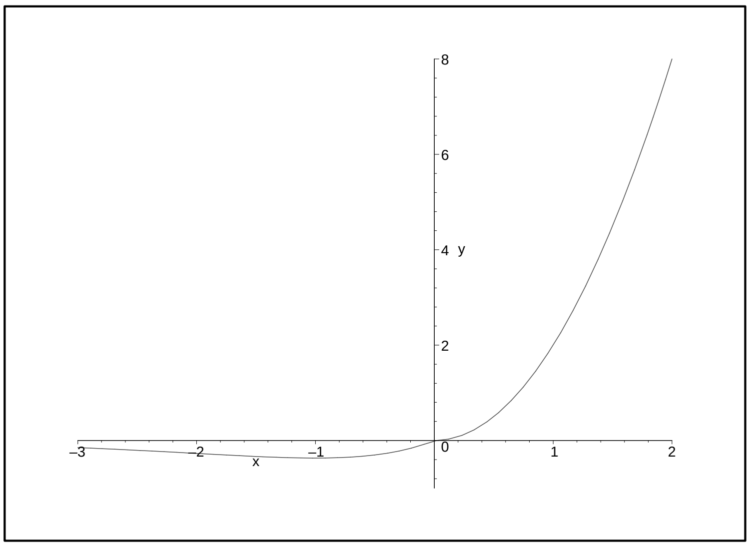
b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?

c) Calcolare la primitiva F di f tale che F(n)=0 e disegnarne il grafico

Soluzione

In 0 abbiamo un punto angoloso (funzione continua e non derivabile). Il grafico di f e' del tipo

```
> plot(f(x),x=-3..2,y=-1..8);
```



a) f e' continua, quindi ammette primitive per il teorema fondamentale del calcolo.

b) f e' continua ma non derivabile in 0, quindi le sue primitive sono derivabili una sola volta in 0.

c) Tale primitiva e' data da

```
> F:=x->Int(f(t),t=n..x);
```

$$F := x \to \int_n^x \mathrm{f}(t)\,dt$$

Poiche'

```
> Int(t*exp(t),t=0..x)=int(t*exp(t),t=0..x);
```

$$\int_0^x t\,e^t\,dt = x\,e^x - e^x + 1$$

```
> Int(2*t^2,t=n..x)=int(2*t^2,t=n..x);
```

$$\int_n^x 2\,t^2\,dt = \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{3}\,n^3$$

```
> Int(2*t^2,t=n..0)=int(2*t^2,t=n..0);
```

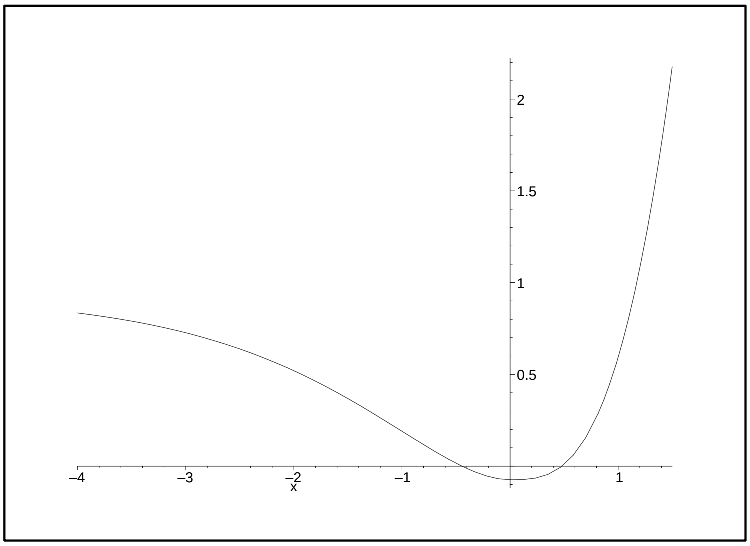
$$\int_n^0 2\,t^2\,dt = -\frac{2}{3}\,n^3$$

si ha che

```
> 'F(x)'=piecewise(x<0,x*exp(x)-exp(x)+1-2/3*n^3,2/3*x^3-2/3*n^3);
```

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} x\,e^x - e^x + 1 - \frac{2}{3}\,n^3 & x < 0 \\ \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{3}\,n^3 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Il grafico e' del tipo



La funzione ha un asintoto orizzontale