Analisi matematica I, c.d.l. Civile Edile

Correzione della prova scritta del 1 febbraio

ES.1

Determinare per quali valori di α in $\mathbf{R}$ risulta continua in 0 la seguente funzione f.

```
> 'f(x)'=f(x);
```

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\ln(1+a\,x)-(1+3\,a\,x)^{(1/3)}}{x^2} & x<0 \\ \alpha\ln(c+x) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Soluzione

```
> Limit('f(x)',x=0,left)=limit(f(x),x=0,left);
```

$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}\,a^2$$

```
> Limit('f(x)',x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{f}(x) = \ln(c)\,\alpha$$

```
> 'alpha'=solve(1/2*a^2=alpha*ln(c),alpha);
```

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{\ln(c)}$$

****

ES.2

Determinare per quali valori del parametro k la seguente equazione ha soluzioni in numero maggiore o uguale a tre

```
> restart:
> a*x^2-ln(b-a*b*x^2/2)=k;
```

$$a\,x^2-\ln(b-\frac{1}{2}\,a\,b\,x^2)=k$$

```
> f:=x->a*x^2-ln(b-a*b*x^2/2);
```

$$f := x \to a\,x^2-\ln(b-\frac{1}{2}\,a\,b\,x^2)$$

Soluzione

I parametri a, b sono positivi. Il dominio e' dato da ($-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$). Inoltre la derivata e'

```
> Df(x):=simplify(diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{Df}(x) := 2\,\frac{a\,x\,(-3+a\,x^2)}{-2+a\,x^2}$$

I punti critici sono

```
> critici:=[solve(Df(x),x)];
```

$$\mathit{critici} := [0,\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}},\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}]$$

Solo 0 e' interno al dominio.

```
> 'f(0)'=f(0);
```

$$\mathrm{f}(0) = -\ln(b)$$

Il grafico e' del tipo

```
> plot(x^2-ln(4-4*x^2/2),x=-1.4..1.4);
```

Per nessun k ci sono 3 soluzioni.

****

ES.3

Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e le rette x=1, x=-1, a>0.

```
> restart:
> f:=x->x*exp(x-b);
```

$$f := x \to x\, e^{(x-b)}$$

Soluzione

La primitiva di f, e'

```
> simplify(value(int(f(x),x)));
```

$$x\, e^{(x-b)} - e^{(x-b)}$$

L'area si ottiene

```
> "area"=-Int(f(x),x=-1..0)+Int(f(x),x=0..1);
```

$$\text{“area”} = -\int_{-1}^{0} x\, e^{(x-b)}\, dx + \int_{0}^{1} x\, e^{(x-b)}\, dx$$

Cioe'

```
> "area"=-int(f(x),x=-1..0)+int(f(x),x=0..1);
```

$$\text{“area”} = 2\, e^{(-b)} - 2\, e^{(-1-b)}$$

****

ES.4

Determinare la soluzione generale della seguente equazione.

```
> restart:
> ode:= {diff(y(x),x,x)+a*diff(y(x),x)-b*y(x)=x*exp(x)};
```

$$ode := \{(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)) + a\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)) - b\,\mathrm{y}(x) = x\,e^x\}$$

Soluzione

Poiche' a $b \neq a+1$, otteniamo come integrale generale

```
> collect(exp(x)*(-a+x+x*a-x*b-2)/(a+1-b)^2,x)+_C1*exp(-1/2*(a+sqrt(a^2+4*b))*x)+_C2
```

$$\frac{e^x\,x}{a+1-b} + \frac{e^x\,(-a-2)}{(a+1-b)^2} + \_C1\;e^{(-1/2\,(a+\sqrt{a^2+4\,b})\,x)} + \_C2\;e^{(-1/2\,(a-\sqrt{a^2+4\,b})\,x)}$$

****

ES.5

Disegnare il grafico della seguente funzione

```
> restart:
> f:=x->ln(cos(x-n*Pi));
```

$$f := x \to \ln(\cos(x - n\,\pi))$$

nell'intervallo I

```
> 'I'=[n*Pi-Pi/2,n*Pi+Pi/2];
```

$$I = [n\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi,\; n\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi]$$

Il grafico e' del tipo

```
> plot(ln(cos(x-Pi)),x=Pi/2..3*Pi/2,y=-5..0);
```

Considerare nello stesso intervallo

```
> F:=x->Int(f(t),t=n*pi..x);
```

$$F := x \to \int_{n\,\pi}^{x} \mathrm{f}(t)\,dt$$

Per $x \to n\,\pi - \frac{\pi}{2}$ e $x \to n\,\pi + \frac{\pi}{2}$ la funzione $\cos(x)$ e' equivalente rispettivamente a

```
> restart:
> convert(taylor(cos(x-n*Pi),x=n*Pi-Pi/2,2),polynom);convert(taylor(cos(x-n*Pi),x=n*
```

$$x - n\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi$$

$$-x + n\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi$$

Quindi, per il comportamento a 0 della funzione logaritmo, i seguenti integrali impropri convergono al valore esteso della funzione.

```
> 'F(n*Pi-Pi/2)'=Int(ln(cos(t-n*Pi)),t=n*Pi..n*Pi-Pi/2);'F(n*Pi+Pi/2)'=Int(ln(cos(t-
```

$$\mathrm{F}(n\,\pi - \frac{1}{2}\,\pi) = \int_{n\,\pi}^{n\,\pi - 1/2\,\pi} \ln(\cos(t - n\,\pi))\,dt$$

$$\mathrm{F}(n\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi) = \int_{n\,\pi}^{n\,\pi + 1/2\,\pi} \ln(\cos(t - n\,\pi))\,dt$$

Il grafico di F risulta quindi del tipo

```
> plot(F1(x),x=Pi/2..3*Pi/2);
```

Il polinomio di f di grado 2 centrato in $n\,\pi$ e' dato da

```
> taylor(ln(cos(t-n*Pi)),t=n*Pi,3);
```

$$-\frac{1}{2}\,(t - n\,\pi)^2 + \mathrm{O}((t - n\,\pi)^3)$$

Quindi il polinomio di F di grado 3 sara'

```
> Int(-1/2*(t-n*Pi)^2,t=n*Pi..x)=factor(int(-1/2*(t-n*Pi)^2,t=n*Pi..x));
```

$$\int_{n\,\pi}^{x} -\frac{1}{2}\,(t - n\,\pi)^2\,dt = -\frac{1}{6}\,(x - n\,\pi)^3$$