Correzione della terza prova intercorso

ES.1

Determinare per quali valori reali di k il seguente integrale improprio converge

```
> Int(x^k*arctan(x)*sin(1/x^m)/((x^2+3)^(1/n)*x^p),x=i..infinity);
```

$$\int_i^\infty \frac{x^k \arctan(x)\sin(\frac{1}{x^m})}{(x^2+3)^{(\frac{1}{n})}\, x^p}\, dx$$

Soluzione

l'integrale converge se

```
> solve({p+m+2/n-k>1},{k});
```

$$\{k < \frac{-n + p\, n + m\, n + 2}{n}\}$$

****

ES.2

Siano

```
> f:=t->(t-a)^n*sin(1/(t-a))/(t^m+1);
```

$$f := t \to \frac{(t-a)^n \sin(\frac{1}{t-a})}{t^m + 1}$$

```
> F:=x->Int(f(t),t=0..x);
```

$$F := x \to \int_0^x \mathrm{f}(t)\, dt$$

dove n, m sono numeri pari positivi

Soluzione

Il dominio di F e' tutto l'asse reale.

I punti di max relativo sono

```
> solve({1/(t-a)=2*(k+1)*Pi},{t});
```

$$\{t = \frac{1}{2}\,\frac{1 + 2\,k\,\pi\,a + 2\,\pi\,a}{(k+1)\,\pi}\}$$

con k intero.

I punti di minimo relativo sono in

```
> solve({1/(t-a)=2*k*Pi},{t});
```

$$\{t = \frac{1}{2}\,\frac{1 + 2\,k\,\pi\,a}{k\,\pi}\}$$

con k intero.

Non esistono asintoti verticali poiche' m e' pari.

Esistono asintoti orizzontali (destro e sinistro) se

```
> solve({m+1-n>1},{m});
```

$$\{n < m\}$$

Poiche' n ed m sono pari e quindi (m+1) e' sempre diverso da n, non esistono asintoti obliqui.
****

ES.3 Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione f, il semiasse positivo delle x e la retta x=a.

```
> f:=x->1/(b^2*x^2+1);
```

$$f := x \to \frac{1}{b^2\,x^2+1}$$

Soluzione

Poiche' f e' positiva l'area e' data da

```
> Int(f(x),x=a..infinity)=int(f(x),x=a..infinity);
```

$$\int_a^\infty \frac{1}{b^2\,x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{-\mathrm{csgn}(b)\,\pi + 2\arctan(a\,b)}{b}$$

dove csgn=segno.
****

ES.4

Determinare il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado 6 della seguente funzione F

```
> F:=x^2*Int(f(t),t=0..x);
```

$$F := x^2 \int_0^x \frac{\cos(a\,t)-1}{1+b\,t}\,dt$$

Soluzione

Il polinomio di taylor di grado 3 della funzione integranda e'

```
> p:=convert(taylor(f(t),t=0,4),polynom);
```

$$p := -\frac{1}{2}\,a^2\,t^2 + \frac{1}{2}\,a^2\,b\,t^3$$

Il polinomio di F di grado 6 e' quindi

```
> collect(x^2*int(p,t=0..x),x);
```

$$\frac{1}{8}\,a^2\,b\,x^6 - \frac{1}{6}\,a^2\,x^5$$

****

ES.5

Per quali valori reali λ , ω la funzione f e' soluzione della seguente equazione differenziale?

```
f:=x->lambda*x*cos(omega*x)
```

$$f := x \to \lambda\,x\cos(\omega\,x)$$

```
>{diff(y(x),x,x)+b^2*y(x)=c*sin(b*x)};
```

$$\{(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)) + b^2\,\mathrm{y}(x) = c\sin(b\,x)\}$$

Soluzione

Sostituendo f nell'equazione si ottiene

```
> combine(diff(f(x),x,x)+b^2*f(x)-c*sin(b*x))=0;
```

$$-2\,\lambda\sin(\omega\,x)\,\omega - \lambda\,x\cos(\omega\,x)\,\omega^2 + b^2\,\lambda\,x\cos(\omega\,x) - c\sin(b\,x) = 0$$

che sara' identicamente soddisfatta se

```
> omega=solve(b^2-omega^2=0,omega);
```

$$\omega = (b,\ -b)$$

```
> lambda=solve(-2*b*lambda-c=0,lambda);
```

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,\frac{c}{b}$$

****

ES.6

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

```
> ode:={diff(y(x),x)=3*(y(x)+a)*(y(x)-b)*x^2 };
```

$$ode := \{\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = 3\,(\mathrm{y}(x)+a)\,(\mathrm{y}(x)-b)\,x^2\}$$

```
> ic:={y(0)=y0};
```

$$ic := \{\mathrm{y}(0) = y0\}$$

Soluzione

La condizione iniziole e' dei seguenti due tipi

```
> ini:={y(0)=-2*a-b};
```

$$ini := \{\mathrm{y}(0) = -2\,a - b\}$$

```
> ini2:={y(0)=3*b+2*a};
```

$$ini2 := \{\mathrm{y}(0) = 3\,b + 2\,a\}$$

Nel primo caso la soluzione e'

```
> simplify(dsolve(ode union ini,{y(x)}));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{2\,e^{(x^3\,b + x^3\,a)}\,a + b}{-1 + 2\,e^{(x^3\,(a+b))}}$$

con dominio

```
> x>-root(ln(2)/(a+b),3);
```

$$-(\frac{\ln(2)}{a+b})^{(1/3)} < x$$

Nel secondo caso la soluzione e'

```
> simplify(dsolve(ode union ini2,{y(x)}));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{2\,e^{(x^3\,b + x^3\,a)}\,a + 3\,b}{-3 + 2\,e^{(x^3\,(a+b))}}$$

con dominio

```
> x<root(ln(3/2)/(a+b),3);
```

$$x < \left(\frac{\ln(\frac{3}{2})}{a+b}\right)^{(1/3)}$$

****

ES.7

a) Determinare la soluzione generale della seguente equazione

```
> ode:= {diff(y(x),x,x)-2*a*diff(y(x),x)+a^2*y(x)=b*x^2+c};
```

$$ode := \{(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)) - 2\,a\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)) + a^2\,\mathrm{y}(x) = b\,x^2 + c\}$$

La soluzione e'

```
> soln:=dsolve(ode,{y(x)});
```

$$soln := y(x) = \frac{a^2\,c + 6\,b + 4\,b\,x\,a + b\,x^2\,a^2}{a^4} + \_C1\,e^{(a\,x)} + \_C2\,e^{(a\,x)}\,x$$

b) Determinare la soluzione della precedente equazione con condizioni iniziali

```
> ic:={y(0)=c/a^2+6*b/a^4+a,D(y)(0)=a^2};
```

$$ic := \{y(0) = \frac{c}{a^2} + 6\,\frac{b}{a^4} + a,\ D(y)(0) = a^2\}$$

La soluzione e'

```
> dsolve(ode union ic,{y(x)});
```

$$y(x) = \frac{a^2\,c + 6\,b + 4\,b\,x\,a + b\,x^2\,a^2}{a^4} + a\,e^{(a\,x)} - 4\,\frac{b\,e^{(a\,x)}\,x}{a^3}$$

b) Determinare le eventuali soluzioni della precedente equazione con le condizioni

```
> y(0)=c/a^2+6*b/a^4+a,Limit(y(x),x=infinity)=infinity;
```

$$y(0) = \frac{c}{a^2} + 6\,\frac{b}{a^4} + a,\ \lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$$

Le soluzioni sono

```
> (c*a^2+6*b+4*b*x*a+b*x^2*a^2)/(a^4)+a*exp(a*x)+C2*exp(a*x)*x;
```

$$\frac{a^2\,c + 6\,b + 4\,b\,x\,a + b\,x^2\,a^2}{a^4} + a\,e^{(a\,x)} + C2\,e^{(a\,x)}\,x$$

con

```
> C2>0;
```

$$0 < C2$$