

Correzione della prova intercorso del 10 Novembre 1999

Es.1

Determinare le soluzioni della seguente disequazione

$$|x - |x - b|| \leq c$$

Soluzione

Le soluzioni sono: se $|b| \leq c$ allora $[\frac{b}{2} - \frac{c}{2}, \infty]$

se $c < b$ allora $[\frac{b}{2} - \frac{c}{2}, \frac{b}{2} + \frac{c}{2}]$

se $b < c$ allora nessuna soluzione.

Es.2

Determinare il dominio della funzione

$$f := x \rightarrow \arcsin(\sqrt{a - x^2} + bx)$$

Soluzione

Posto

$$s1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 a - 1 + a}}{b^2 + 1}$$

$$s2 := -\frac{b + \sqrt{b^2 a - 1 + a}}{b^2 + 1}$$

$$t1 := \frac{b + \sqrt{b^2 a - 1 + a}}{b^2 + 1}$$

$$t2 := -\frac{-b + \sqrt{b^2 a - 1 + a}}{b^2 + 1}$$

Per la scelta dei parametri, le soluzioni sono :

per $0 < b$, $[s2, t2]$,

per $b < 0$, $[t1, s1]$.

Es.3

Determinare le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui di

$$f := x \rightarrow \sqrt{\frac{x^3 + ax}{bx + c}}$$

Soluzione

Abbiamo un asintoto verticale

$$x = -\frac{c}{b}$$

Non abbiamo asintoti orizzontali ed abbiamo un asintoto obliquo sinistro

$$y = -\frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{1}{2} \frac{c}{b^{(3/2)}}$$

e un asintoto obliquo destro

$$y = \frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2} \frac{c}{b^{(3/2)}}$$

Es.4

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a n \sin\left(\frac{b}{n}\right) = ba$$

Es.5

Determinare le discontinuita' di $f : [a-3b, a+b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f := x \rightarrow (x - a) e^{\left[\frac{x-a}{b}\right]}$$

Soluzione

Le discontinuita' sono per $x=a-2b, a-b, a+b$.

Es.6

Determinare per quali valori di α la seguente funzione risulta continua

$$x \mapsto \begin{cases} a e^{(e^{\frac{1}{x-x_0}})} + b & x < x_0 \\ \frac{\alpha \ln(2^n - x_0 + x)}{\ln(2)} & otherwise \end{cases}$$

Soluzione

$$\alpha = \frac{a+b}{n}$$

Es.7

Determinare l'immagine, gli estremi superiore e inferiore, il massimo e minimo di

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f := x \rightarrow \frac{c}{(x - a)(b - x)}$$

Soluzione

Se $0 < c$, abbiamo :

immagine = $[\frac{4c}{(-b+a)^2}, \infty]$, $\inf = \min = \frac{4c}{(-b+a)^2}$, $\sup = \infty$, il massimo non esiste.

Se $c < 0$, abbiamo:

immagine = $[-\infty, \frac{4c}{(-b+a)^2}]$, $\inf = -\infty$, il minimo non esiste, $\sup = \max = \frac{4c}{(-b+a)^2}$.

Es.8

Determinare l'equazione della tangente al grafico nel punto di ascissa $(a+1)$ di

$$f := x \rightarrow (x^2 - 2a)^{(b+x)}$$

Soluzione

Si ha

$$f(a+1) = ((a+1)^2 - 2a)^{(b+a+1)}$$

La derivata e'

$$Df := (x^2 - 2a)^{(b+x)} (\ln(x^2 - 2a) + 2 \frac{(b+x)x}{x^2 - 2a})$$

inoltre

$$Df(a+1) = ((a+1)^2 - 2a)^{(b+a+1)} (\ln((a+1)^2 - 2a) + 2 \frac{(b+a+1)(a+1)}{(a+1)^2 - 2a})$$

L'equazione della tangente risulta

$$y - f(a+1) = Df(a+1) (x - a - 1)$$