# 1 Analisi mat. I - Esercizi del 13/10/99

**ES.1** Delle seguenti funzioni determinare: il dominio, l'immagine, gli eventuali asintoti, l'insieme dove sono continue e quali siano estendibili per continuita'. Determinare inoltre quali di esse siano pari, dispari, periodiche, invertibili, invertibili se ristrette alla semiretta positiva. Di quelle invertibili determinare l'inversa.

$$x \mapsto \frac{e^{(x^2)}-1}{e^{(x^2)}+1}, \qquad x \mapsto \frac{\log(x^2+1)-1}{\log(x^2+1)+1}, \qquad x \mapsto \frac{\arcsin x - \pi/2}{\arcsin x + \pi/2}, \qquad x \mapsto \frac{\arctan x + \pi/2}{\arctan x - \pi/2}$$

$$x \mapsto (x^2-x^4)^{\pi}, \qquad x \mapsto (2x^3-x^6)^{\sqrt{2}}, \qquad x \mapsto \sqrt{\frac{8x}{(x+1)}}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2-|x-1|}$$

$$x \mapsto \frac{|x+1|}{1-x}, \qquad x \mapsto log_3(x^3-x^2+2x), \qquad x \mapsto \arcsin\sqrt{1/2-x^2}, \qquad x \mapsto \tan(|x+1|)$$

$$x \mapsto \log(\sin(|x|)), \qquad x \mapsto \arcsin\sqrt{1/2-x^2}, \qquad x \mapsto e^{\arctan(x+1)}, \qquad x \mapsto \sqrt{\arccos(x)-1}$$

$$x \mapsto \frac{3x-[x]}{x}, \qquad x \mapsto \frac{\sin(x)}{[\sin(x)]}, \qquad x \mapsto e^{(-1/|x|)}, \qquad x \mapsto (\log(1+x^2))^{x+1}$$

$$x \mapsto e^{(x-1)\,\ln|x+2|}, \qquad x \mapsto \log\frac{|2-x|+1}{x}, \qquad x \mapsto (1-x^2)^{\arccos(x)}$$

$$x \mapsto |\sqrt[3]{x-3}|+1, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|\cos x|}}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt[4]{1-\sin x}}, \qquad x \mapsto |\cos(x)|^{[x]}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ -3 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

**ES.2** Disegnare il grafico delle seguenti funzioni (usare soltanto la conoscienza dei grafici delle funzioni elementari)

$$x \mapsto \max\{|x|, 1/x\}, \qquad x \mapsto [(e^x-1)], \qquad x \mapsto |x^3-1|, \qquad x \mapsto |x|^3-1$$

$$x \mapsto x-[x], \qquad x \mapsto \sin(x)-[\sin(x)], \qquad x \mapsto [\log(x)], \qquad x \mapsto [\log(x)]$$

$$x \mapsto \cos(2x), \qquad x \mapsto -3\cos(x)+1, \qquad x \mapsto \tan(x+1), \qquad x \mapsto cotan(3x)$$

$$x \mapsto \sin(x+1), \qquad x \mapsto \sin(x)+1, \qquad x \mapsto (0.5)^{x+1}, \qquad x \mapsto \log|x+1|$$

$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \in (-\infty,-1) \\ 1/x & \text{se} \quad x \in [-1,0) \\ |\sin(x)| & \text{se} \quad x \in [0,+\infty) \end{cases}$$

**ES.3** Siano date

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{4x}, \qquad g : x \mapsto x^2-1$$

determinare $f \circ g$, $\quad g \circ f$, il loro dominio e la loro immagine.

**ES.4** Sia $a \subset \mathbb{R}$ e sia $B = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$. Dimostrare che

$$\sup A = y \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \inf B = -y.$$

**Es 5)** (test del 12/11/98)
**a)** Definiamo

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{a+bx^3}{c|x|x^2}}.$$

Determinare, al variare dei parametri: dominio di $f$, l'equazione degli eventuli asintoti verticali, orizzontali e obliqui.
**b)** Determinare, al variare dei parametri, i valori $k \in \mathbb{R}$ che rendono continua su tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} k & \text{se} \quad x \leq b \\ ax^{2n} & \text{se} \quad x > b \end{cases}$$

**c)** Della funzione $g$ determinata all'esercizio b), disegnare il grafico e calcolare gli estremi superiore e inferiore, massimo e minimo.
**d)** Data $f : x \mapsto \exp(\arctan(\dfrac{x^2 + bx + c}{x - a}))$ calcolare, al variare dei parametri, i limiti:

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to a^-} f(x), \qquad \lim_{x \to a} f(x).$$

**ES.6** Per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$ definiamo

$$I_n = \qquad [0, (1+n)/(n)], \qquad (1 - 1/n, 1), \qquad [1, 1 + 1/n], \qquad (-1/n, 1/n)$$

Determinare

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

**ES.7** Determinare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi

$$\{\frac{7-n}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 0\}, \qquad \{\frac{2+n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{\frac{1+n^2}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$$

**ES.8** Determinare per quali valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{a+\cos(x)}{\sqrt[3]{x}} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin|x-1|}{2x-2} & \text{se} \quad x < 1 \\ b2^{ax} & \text{se} \quad x \in [1,2] \\ 3 - x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

**ES.9** i) Determinare i valori $a, b \in R$ che rendono continua su tutto $R$ la funzione

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se } -1 < x < 0 \\ -\arctan(x) & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Per la funzione determinata al punto i) :
ii) determinare eventuali asintoti verticali e gli intervalli di crescenza o decrescenza (usare le proprieta' delle funzioni elementari)
iii) disegnare il grafico e determinare, se esistono, massimo e minimo
iv) la $f$ e' invertibile? Lo e' qualche sua restrizione? In caso affermativo determinare l'inversa.

**ES.10** Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$$

**ES.11** Dimostrare, usando la definizione, che se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = 0$.
Quanto vale

$$\lim_{x \to a} (0.5)^{f(x)}$$

## 2 Anal. mat. I - Esercizi del 18/10/99

**ES.1** Determinare gli eventuali limiti delle seguenti successioni

$$n \mapsto (1 + 1/n)^{1/n}, \qquad n \mapsto \arctan\sqrt{\frac{2-n}{1-n^2}}, \qquad n \mapsto \exp((-1/n)^2), \qquad n \mapsto \log(n^2 - 2n)$$

$$n \mapsto e^{(n-1)} \sin(\pi/2 + n\,\pi), \qquad n \mapsto \frac{|2-n|+1}{n}, \qquad n \mapsto (1 - 2/n)^{\arctan(n)}$$

**ES.2** Determinare per quali delle funzioni che compaiono nei precedenti esercizi posso decidedere sull'esistenza di massimo e minimo in base al calcolo dei limiti e alle proprietà delle funzioni continue su intervalli.

**ES.3** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, una funzione crescente (decrescente) la cui immagine e' $(1, +\infty)$. Calcolare $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to b} f(x)$. Giustificare il fatto che la funzione e' continua in $(a, b)$.

**ES.4** Provare che non esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$\sin x = 2x + x^2 f(x)$$

e trovarne una tale che

$$\sin x = 2x + x\, f(x).$$

**ES.5** Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni ammettono asintoti obliqui?

$$x \mapsto \sqrt{\sin^3 x + (1-\lambda^2)x^2 + 1} \qquad x \mapsto \frac{\lambda x^4 + (2+\lambda)x^3 - x^2}{3x^2 - 1}$$

**I seguenti esercizi sono parte di prove di esame per l'Anno Accademico 97/98**

**ES.6**

Definiamo $$f : x \mapsto 1/\sqrt{|\sin x|}\ .$$

Determinare il dominio di $f$. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti. Determinare massimo e minimo di $f_{|[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}]}$

**ES.7**

Definiamo $$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{|x|+5}{x+5}\right).$$

Determinare il dominio di $f$. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti. Determinare gli eventuali punti di discontinuita' e classificarli

**ES.8**

Definiamo $$f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2 + x}.$$

Calcolare il massimo e minimo globale di $f$.

**ES.9**

Sia $$f : x \mapsto e^{(x-1)\,\log|x+2|}$$

Determinare il dominio ed eventuali asintoti verticali orizzontali e obliqui
Giustificare l'affermazione: $f$ ha massimo e minimo assoluti in $[2, 3]$

**ES.10** Sia

$$x \mapsto \frac{|x|}{\sin x\sqrt{\cos x}}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Determinare il dominio di $f$. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti. Determinare gli eventuali punti di discontinuita' e classificarli

**ES.11** Determinare il dominio e le equazioni degli eventuali asintoti di

$$f : x \mapsto \frac{|x|\sin x}{1 - \cos x}, \quad x \in (-\pi, 2\pi).$$

## 3 Anal. mat. I - Esercizi del 29/10/99

**ES.1**

Definiamo
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{7+x}{7-|x|}\right).$$

Determinare il dominio di $f$. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti. Determinare gli eventuali punti di discontinuita' e classificarli

**ES.2**

Definiamo
$$f(x) = \frac{6\,e^x}{1+4\,e^{2x}}.$$

Determinare il dominio di $f$ e le equazioni degli eventuali asintoti.
Giustificare l'affermazione : $f_{|[-1,1]}$ ha massimo e minimo assoluti e calcolarli.
Giustificare, senza usare la nozione di derivata, l'affermazione : l'immagine di $f$ e' un intervallo del tipo $(0, b]$.
Determinare gli eventuali punti di max e min relativo e assoluto. Disegnare il grafico della funzione.
Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero ed il segno delle soluzioni di

$$f(x) = a$$

Disegnare il grafico della funzione $g(x) = f(x) - [f(x)]$, si ricordi che $[y]$ e' la parte intera di $y$.

**ES.3** Determinare, al variare dei parametri $a, b, c, d$, l'insieme in cui la seguente funzione e' continua e quello su cui e' derivabile.

$$f : x \mapsto \begin{cases} d\,\frac{\sin(x-1)}{x-1} + c, & x < 1 \\ a\,x^2 + b\,x + |x-2|\ , & x \geq 1 \end{cases}$$

**ES. 4** Determinare, al variare dei parametri $a, b, c, n$ numero e segno delle radici del polinomio

$$a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + d$$

**ES.5** Determinare immagine, estremo superiore, estremo inferiore ed gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti delle funzioni che compaiono nei precedenti esercizi.

**ES.6** Determinare l'insieme in cui le seguenti funzioni sono derivabili e calcolare la derivata. Calcolare inoltre le eventuali derivate destre e sinistre ed gli eventuali punti a tangente verticale, tutte le funzioni devono intendersi estese per continuita' ove e' possibile.

$$x \mapsto (1 + 1/|x-1|)^{1/x}, \qquad x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{|2-x|}{1-x^2}}, \qquad x \mapsto \exp((-1/x)^2), \qquad x \mapsto \log(x^2 - 2x)$$

$$x \mapsto e^{(x-1)}\sin(\pi/2 + x\,\pi), \qquad x \mapsto \frac{|2+x|+1}{1-x}, \qquad x \mapsto (1-2/x)^{\arctan(x)}, \qquad x \mapsto \frac{|x-7|+1}{x},$$

$$x \mapsto \exp(-\frac{1}{|x|^3}) \qquad x \mapsto \exp(|x| sin\,x)$$

**ES.7** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, continua e derivabile, dimostrare che se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

allora $f$ ha un punto con derivata zero.

**ES.8** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, una funzione crescente (decrescente) e derivabile, posso affermare che la sua derivata non si annulla?.

**ES.9**

Sia
$$f(x) = lg\frac{|2-x|+1}{x}$$

**a)** Giustificare l'affermazione: $f$ ha massimo e minimo in $[1,3]$ e calcolarli
**b)** Disegnare il grafico della funzione e determinarne l'immagine e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto

**ES.10** Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ numero e segno delle radici reali del seguente polinomio.

$$-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + a.$$

**ES.11** Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ numero e segno delle radici reali del seguente polinomio.

$$x^4 + 2a\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}.$$

**ES.12** L'affermazione: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, allora $f$ é strettamente decrescente se e solo se $f' < 0$ su $I$ é vera o falsa?

**ES.13** $f : I \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana in $I$ se esiste $k > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Dimostrare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è $C^1$, allora è Lipschitziana (usare il teorema di Lagrange).
Verificare che il valore assoluto è Lipschitziana in $[-7,7]$.

**ES.14** Verificare che la funzione $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ $x \mapsto (x^2+1)^{(x+2)}$ è invertibile e determinare il dominio di $f^{-1}$, $Df^{-1}(1)$, $Df^{-1}(125)$ $Df^{-1}(2)$

**ES.15**

Sia $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\,lg(cos(sen\,x)) & \text{se } x > 0 \\ x^4 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare il massimo $k$ per cui $f \in C^k$ in un intorno di 0

**ES.16** Determinare il numero e il segno delle soluzioni della seguente equazione

$$(4x^3 + 7x^2 - 6x + 7)lg(x + 1/2) = 0$$

**ES.17** Studiare e disegnare il grafico in $(0,1]$ della funzione

$$f(x) = cos\left(\frac{1}{lg(2x)}\right)$$

**ES.18** Data la funzione

$$\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{1 + (x-1)^4}}$$

i) verificare che e' continua su tutto $R$ e determinare dove e' positiva, negativa o nulla
ii) calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$
iii) dedurre che la funzione ammette max e min assoluti e calcolarli
iv) disegnare il grafico

**ES.19** Sia $f : R \to R$ derivabile e tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

Provare che

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+3) - f(x-2)) = 0$$

**ES.20** Trovare l'insieme dei $\lambda \in R$ per i quali la seguente equazione ha almeno una soluzione positiva

$$xe^{-x} + 2\lambda = 0$$

## 4 Anal. mat. I - Esercizi del 8/11/99

**ES.1** Determinare per quali valoridei parametri $h, k, \alpha$ la seguente funzione e' continua su tutto $\mathbb{R}$ e per quali e' derivabile.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^\alpha}\Big(\dfrac{4}{3}(x-1)^2 + o(x-1)^2\Big) + hx \ , & x < 1 \ , \\ 7x^2 + k \ , & x \geq 1 \ . \end{cases}$$

**ES.2** Determinare dominio e immagine di

$$f : x \mapsto \arcsin \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d} \ .$$

**ES.3** Trovare l'equazione della tangente al grafico della funzione $f : x \mapsto ax^2 + b + \int_c^x 2^t (t-3)^\pi \, dt$ nel punto di ascissa $x = c$.

**ES.4** Calcolare l'area della figura piana delimitata dalla curva $y = \lambda \cos\left(\dfrac{x}{3} - \pi\right)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = \pi$ , $x = 2\pi$.

**ES.5** Si consideri la funzione

$$f : x \mapsto \begin{cases} -3 & se \quad x < 1 \\ 25 & se \quad x = 1 \\ 2x & se \quad x > 1 \end{cases}$$

**a)** Disegnare il grafico di

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

senza calcolare l'integrale, mettendo in evidenza i risultati usati, in particolare giustificare il fatto che $F$ e' definita su $\mathbb{R}$.

**b)** Calcolare $F(x)$.

**c)** In generale cosa si puo' dire della funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt,$$

sapendo che la funzione $f$ e' $C^\infty$ su $\mathbb{R} - \{1\}$, ha una discontinuita' di salto in $x = 1$, e' positiva su $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ e negativa su $(0, 1)$? Illustrare la risposta con grafici.

**ES.6** Considerare la funzione

$$f : x \mapsto \frac{3 \log x}{x} + \frac{6}{x} + 3$$

**a)** Verificare che la funzione si annulla in un unico punto $x_0$.

**b)** Scegliere un valore approssimato per $x_0$, usando alcuni passi dell'algoritmo di bisezione. Spiegare i presupposti teorici del calcolo fatto e specificare l'intervallo di errore relativo alla scelta fatta.

**ES.7** Determinare il dominio e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo delle funzioni

$$F : x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

$$G : x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

**ES. 8** Determinare il dominio e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$G : x \mapsto 4x + \int_1^x \frac{|\sin(t)|}{t-3} dt.$$

Determinare la tangente al grafico nel punto di ascissa 1. Determinere l'insieme in cui la funzione e' continua e quello in cui e' derivabile.

## 5 Anal. mat. I - Esercizi del 24/11/99

**ES. 1** Determinare il dominio e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{|\cos(t)|}{e^t} dt.$$

a) Verificare che la funzione e' crescente e positiva per $x > 0$. b) Dedurre dal punto precedente che ha limiti per $x \to \pm\infty$ c) Usando la monotonia dell'integrale verificare che ha un asintoto orizzontale destro.

**ES. 2** Data la funzione

$$G : x \mapsto 4(1-x)) + \int_1^x \frac{|\sin(t)|}{(t-3)^2} dt,$$

determinarne il dominio, verificare che e' positiva e decrescente per $x < 1$. Seguendo uno schema di ragionamento analogo a quello suggerito nel precedente esercizio, dimostrare che la funzione ha un asintoto obliquo sinistro parallelo alla retta $y = -4x$.

**ES.3** Sapendo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

**a)** Determinare $f^{(3)}(0)$,
**b)** Quante derivate di $(f(x))^2$ in $x = 0$ posso determinare?
**c)** Esprimere in forma di Lagrange

$$f(1) - 1 - 1/3$$

**ES.4** Sapendo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$f(x) = 2(x-1)^2 + \frac{7}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^6)$$

**a)** Determinare $f^{(4)}(1)$
**b)** Determinare $f^{(5)}(1)$
**c)** Quante derivate in $x = 1$ posso determinare?
**d)** Esprimere in forma di Lagrange

$$f(2) - 2 - \frac{7}{12}$$

**ES.5** **a)** Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 in 0 della funzione

$$f(x) = e^{x+2x^2} - x - 5x^2/4$$

**b)** Posso decidere se $f(0)$ e' massimo o minimo relativo per la funzione usando la risposta al punto **a)**? In caso affermativo indicare cosa sia.

**ES.6)** **a)** Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 in 0 della funzione

$$f(x) = \cos(x + 2x^2) + x^2/2 + 2x^3 + 47\,x^4/24$$

**b)** Posso decidere se $f(0)$ e' massimo o minimo relativo per la funzione usando la risposta al punto **a)**? In caso affermativo indicare cosa sia.

**ES.7)** Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos(\frac{1}{n^\alpha})\right)^n$$

**ES.8)** Calcolare $f^{(5)}(-1)$, se

$$f(x) = \frac{(x+1)^3 + (x+1)^5\cos(\pi x)}{2 + (x+1)^9 e^x}.$$

**ES.9)** Studiare la convergenza delle seguenti successioni

$$n \mapsto \frac{1}{n-2}\left(n - \frac{1}{sen(1/n)}\right)$$

$$n \mapsto \left(\frac{n\log(n+n^2) - n^2}{\cos(n) - ne^n}\right)^n$$

**ES.10)** Studiare al variare di $\alpha \in R$ la convergenza delle successioni

$$n \mapsto n^\alpha \left(1 - (\cos(\frac{2}{n}))^{\tan(1/n)}\right)$$

$$n \mapsto \frac{(\alpha^2)^n}{|2\alpha|^n + |\alpha^2 - 3|^n}$$

**ES.11)** Calcolare al variare di $d \in R$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \log\left(\frac{\exp(n^{-1}) - \sin(n^{-1}) - d\,n^{-2}}{\cos(n^{-3/2})}\right)$$

**ES.12)** Calcolare l'area della figura piana delimitata dalla curva

$$y = \cos\left(\frac{x}{2} - 3\pi\right)$$

dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = 2\pi/3$, $x = 2\pi$.
**ES.13)** Calcolare l'area della figura piana delimitata dalla curva

$$y = (2x+3)\exp(\lambda x)$$

dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = -5$, $x = 0$.

# 6 Anal. mat. I - Esercizi del 30/11/99

**ES.1)** Studiare la continuita' e la derivabilita' in 0 della seguente funzione al variare di $\alpha,\ h \in \mathbb{R}$

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos((x-1))}{(x-1)^\alpha} + 2x\ , & x < 1\ , \\ 3x^2 + h\ , & x \geq 1\ . \end{cases}$$

**ES.2)** Determinare il dominio, eventuali asintoti, max e min relativi e disegnare il grafico della seguente funzione

$$F : x \mapsto \frac{2}{x^4} \int_0^x \frac{(\sin(t))^3\,(e^{3t}-1)}{t}\,dt$$

**ES.3** Disegnare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2},$$

e la semiretta positiva dell'asse $x$ che ha come estremo $x = \pi$.
Esprimere in forma di integrale improprio la precedente area e definirne il significato in termini di limite.
Verificare che la precedente area e' finita e trovarne una limitazione superiore.
**ES.4** Determinare quali dei seguenti integrali impropri convergono e, quando e' possibile determinarli

$$\int_0^\pi \left(1/\sqrt{|\sin(x)|}\right)dx \quad , \quad \int_0^{2\pi} \left(1/\sqrt[4]{1-\cos(x)}\right)dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx \quad , \quad \int_{-1}^0 \frac{e^t(t^4+1)}{t^2}dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^t(t^4+1)}{t^2}dt \quad , \quad \int_0^1 \frac{e^t(t^4+1)}{t^2}dt$$

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{e^t(t^4+1)}{t^2}dt \quad , \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^t(t^4+1)}{t^2}dt$$

**ES.5** Si consideri l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^n}\,dx$$

**b)** Calcolare il piu' piccolo $n$ intero per cui l'integrale converge, usando il criterio del confronto asintotico.
**c)** Calcolare l'integrale del punto b)
**ES.6** Determinare numero e segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$2x + 3 + log|x| = 0 \quad , \quad x^2 + 3 - 2\log|x| = 0$$

**ES.7** Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+1/x)}{\sqrt[3]{(x^2+1)^\alpha}}dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{\log(1+1/x)}{\sqrt[3]{(x^2+1)^\alpha}}dx$$

**ES.8** Calcolare i polinomi di Taylor centrati in 0 di gradi $4,\ 5,\ 6$ delle seguenti funzioni

$$\frac{\log(1+x^2)}{\cos(x)} \quad , \quad \frac{1-\cos(x)}{x} \quad , \quad \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$